ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 12020

Ч.Й.Велчев, М.М.Еникова, В.И.Карлуковски

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ С КОНЕЧНОЙ ЭНЕРГИЕЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ $SU(2)\times SU(2)$ И $SU(2)\times SU(1,1)$ КИРАЛЬНЫХ ТЕОРИЯХ

1978

Р2 - 12020

Ч.Й.Велчев, М.М.Еникова, В.И.Карлуковски

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ С КОНЕЧНОЙ ЭНЕРГИЕЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ SU(2)×SU(2) И SU(2)×SU(1,1) КИРАЛЬНЫХ ТЕОРИЯХ

Направлено в Nuclear Physics B

Еникова М.М., Карлуковски В.И., Велчев Ч.Й. P2 - 12020

Точные решения с конечной энергией в нелинейных $SU(2)\times SU(2)$ и $SU(2)\times SU(1,1)$ киральных теориях

Рассматриваются нелинейные лагранжевы реализации компактной ($SU_2\times SU_2$) и некомпактной ($SU_2\times SU_{1,1}$) киральных симметрий. Найден большой класс точных решений соответствующих уравнений пионного поля в 3+1-мерном пространстве-времени, содержащий подкласс конечноэнергетических решений. Предложенная процедура позволяет, на основе любого (конечноэнергетического) решения волнового уравнения $\Box r = 0$, построить соответствующее (конечноэнергетическое) решение киральных полевых уравнений.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Velchev C.I., Enikova M.M., Karloukovski V.I. P2 - 12020

Exact Finite-energy Solutions in Nonlinear $SU(2)\times SU(2)$ and $SU(2)\times SU(1,1)$ Chiral Theories

Lagrangian realizations of the compact ($SU_2\times SU_2$) and non-compact ($SU_2\times SU_{1,1}$) chiral symmetries are considered. A large class of exact solutions to the corresponding pion field equations in 3+1-dimensional space-time is found. It contains a subclass of finite-energy solutions. Our procedure allows, in particular, given any (finite-energy) solution of the d'Alambert ware equation, $\Box r = 0$, to construct a corresponding family of (finite-energy) solutions of the chiral field equations.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

ВВЕДЕНИЕ

Концепция σ-моделей /линейных и нелинейных/ [1,2] возникла в конце пятидесятых годов в тесной связи с развитием физики высоких энергий. После работы Гелл-Манна и Леви [3] роль σ-моделей в физике элементарных частиц была широко признана, они были использованы в качестве теоретико-полевой реализации киральной алгебры токов и PCAC. Значение киральных теоретико-полевых моделей, однако, не исчерпывалось их успехом в феноменологии частиц. С самого начала они представляли интерес и с точки зрения математической физики,и, кстати, этот аспект преобладал в работах Скирма [2,4,5], который, к примеру, использовал в них модное сейчас понятие топологического заряда. Интерес к этому математическому аспекту киральных теорий заметно возрос в последние годы. Существует точка зрения [6,7], что киральные поля могут быть полезными при построении модели протяженных адронов.

Предпринимались неоднократные попытки найти конечноэнергетические решения в киральных теориях. В значительной части этих работ, из соображений стабильности, рассматривалось 2+1-мерное пространство-время, или, что то же самое, пространство-время считалось 3+1-мерным, однако построенные решения были вортексного типа, для которых одно из пространственных измерений являлось несущественным [8,9]. Здесь мы не будем рассматривать 2+1-мерный случай, хотя он тоже интересен в некоторых отношениях /см., например, [10] /.

Чтобы обеспечить стабильность решения в 3+1 пространственно-временных измерениях , в [11] была предложена модификация лагранжиана и действия, и таким образом были получены некоторые точные решения с конечной энергией модифицированных полевых уравнений. С другой стороны, несколько утверждений о несуществовании конечноэнергетических решений, основанных на вариационных рассмотрениях, были сформулированы в /12/, где можно также найти критические замечания по поводу решений, полученных в /8,9,11/.

В настоящей работе изучаются киральные модели для пионов с компактной $(SU_2 \times SU_2)$ и некомпактной $(SU_2 \times SU_{1,1})$ киральными группами. В первом разделе приведены основные соотношения нелинейных реализаций этих симметрий в обозначениях Вайнберга /13/.

В следующих разделах, пренебрегая требованием стабильности /напомним, что только немногие частицы в природе стабильны и что время жизни пиона, в частности, $2{,}6О3\cdot 1О^{-8}$ с для $\pi^{\pm}$ и $О{,}828\cdot 1О^{-16}$ с для π° /, мы осуществляем поиск максимально широкого класса точных решений полевых уравнений. При этом используется метод, описанный в /14/, заключающийся в вариации констант интегрирования плоско-волновых решений. Их мы приводим во втором разделе. Получаем богатый подкласс точных решений с конечной энергией, которые конструируются и обсуждаются в третьем разделе.

1. КОМПАКТНАЯ И НЕКОМПАКТНАЯ КИРАЛЬНОСТЬ

Обозначим через $V_a^{\mu}(x)$ и $A_a^{\mu}(x)$ векторные и аксиально-векторные токи, удовлетворяющие одновременным коммутационным соотношениям киральной алгебры токов:

$$[V_a^{\circ}(x), V_b^{\circ}(x')]\delta(x_0 - x_0') = i\epsilon_{abc}V_c^{\circ}(x)\,\delta^4(x-x')$$

$$[V_a^{\circ}(x), A_b^{\circ}(x')]\delta(x_0 - x_0') = i\epsilon_{abc}A_c^{\circ}(x)\,\delta^4(x-x')$$

$$[A_c^{\circ}(x), A_b^{\circ}(x').\delta(x_0 - x_0') = \eta\, i\epsilon_{abc}V_c^{\circ}(x)\,\delta^4(x-x'). \qquad /1.1/$$

Здесь $\eta = \pm 1$, и при этом $\eta = +1$ и $\eta = -1$ соответствуют так называемым компактной и некомпактной киральностям /15/. Хорошо известно, что, например, знак пион-нуклонных длин рассеяния согласуется с компактной киральностью, т.е. киральной $(SU_2 \times SU_2)$ -группой /некомпактная киральная группа Q_{31}, однако, рассматривалась в /16/ как допустимая с физической точки зрения/. Здесь нас не интересует феноменология частиц, и нам кажется естественным рассматривать как компактную, так и некомпактную киральную группу на равных основаниях. Отметим также что мы ограничиваем рассмотрение рамками классической теории поля и пренебрегаем, в частности, всеми проблемами операторного умножения.

В настоящей работе мы находим классические решения в нелинейных лагранжевых реализациях киральной симметрии. Выпишем уравнения, решения которых будем искать. Лагранжиан пионного поля $\vec{\pi} = (\pi^1, \pi^2, \pi^3)$ имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{ab}(\vec{\pi})\,\partial_{\mu}\pi^a \partial^{\mu}\pi^b, \qquad /1.2/$$

где метрический тензор

$$g_{ab}(\vec{\pi}) = d_1(\pi^2)\,\delta_{ab} + d_2(\pi^2)\,\pi_a\pi_b, \qquad /1.3/$$

$$d_1(\pi^2) = \frac{F_{\pi}^2}{\eta\pi^2 + f^2}, \quad d_2(\pi^2) = -F_{\pi}^2\frac{\eta + 4ff' - 4\pi^2 f'^2}{(\eta\pi^2 + f^2)^2}. \qquad /1.4/$$

Здесь $F_{\pi} = 95$ *МэВ* - константа распада пиона, а $f(\pi^2)$ - произвольная функция π^2, отвечающая тому или иному выбору параметризации в кривом изоспиновом пространстве.

Уравнения поля могут быть записаны в форме

$$\Box\pi^a + \Gamma^{a}_{bc}\,\partial_{\mu}\pi^b\partial^{\mu}\pi^c = 0, \qquad /1.5/$$

где

$$\Gamma^{a}_{bc} = \frac{1}{2} g^{an}\left(\frac{\partial g_{nc}}{\partial\pi^b} + \frac{\partial g_{bn}}{\partial\pi^c} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial\pi^n}\right) \qquad /1.6/$$

- символ Кристоффеля, соответствующий метрике /1.3/, /1.4/. Можно выразить его через функции Вайнберга $f(\pi^2)$:

$$\Gamma^{a}_{bc} = -\frac{\eta + 2ff'}{\eta\pi^2 + f^2}(\pi_b\delta_c^a + \pi_c\delta_b^a) - \frac{2f'}{f - 2\pi^2 f'}\pi^a\delta_{bc} - \frac{4f'^4}{f - 2\pi^2 f'}\pi^a\pi_b\pi_c. \qquad /1.7/$$

Геометрическая интерпретация нелинейных реализаций компактной киральной группы широко обсуждалась в литературе /см., например, [17-20] /.

Дальше будут использованы следующие выражения:

$$V^{\mu}_{a} = \frac{F_{\pi}^{2}}{\eta\pi^{2}+f^{2}}\epsilon_{abc}\pi^{b}\partial^{\mu}\pi^{c},$$

$$A^{\mu}_{a} = \frac{F_{\pi}^{2}}{\eta\pi^{2}+f^{2}}[f\partial^{\mu}\pi_{a} - f'(\partial^{\mu}\pi^{2})\pi_{a}] \qquad /1.8/$$

для векторного и аксиально-векторного тока. Оба они сохраняются:

$$\partial_{\mu}A^{\mu}_{a} = 0, \quad \partial_{\mu}V^{\mu}_{a} = 0. \qquad /1.9/$$

Мы будем обозначать через

$$Q^{V}_{a} = \int V^{o}_{a}(x)\,d^{3}x, \quad Q^{A}_{a} = \int A^{o}_{a}(x)\,d^{3}x \qquad /1.10/$$

соответствующие заряды. Отметим также, что плотность энергии

$$\mathcal{H} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{0}\pi^{a})}\partial_{0}\pi^{a} - \mathcal{L} \qquad /1.11/$$

может быть записана в виде

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}d_{1}[(\frac{\partial\pi}{\partial x_{0}})^{2} + (\nabla\pi)^{2}] + \frac{1}{8}d_{2}[(\frac{\partial\pi^{2}}{\partial x_{0}})^{2} + (\nabla\pi^{2})^{2}]. \qquad /1.12/$$

2. *ПЛОСКО-ВОЛНОВЫЕ РЕШЕНИЯ*

В недавней работе [21] Коулмен нашел плоско-волновые решения неабелевой калибровочной теории поля /без источников/ в пространстве Минковского. В этом разделе мы решаем аналогичную проблему для киральной теории поля. С этой целью отыскиваем решения уравнения /1.5/ вида

$$\pi^{a} = \pi^{a}(\tau), \quad \tau = px, \qquad /2.1/$$

где p - 4-вектор, для которого $p^{2} = s \neq 0$. Уравнения поля /1,5/ тогда сводятся к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^{2}\pi^{a}}{d\tau^{2}} + \Gamma^{a}_{bc}\frac{d\pi^{b}}{d\tau}\frac{d\pi^{c}}{d\tau} = 0, \qquad /2.2/$$

и это как раз уравнения геодезических в кривом изоспиновом пространстве. Введем сферические координаты $\pi(x)$, $\theta(x)$, $\phi(x)$, связанные с декартовыми координатами $\pi^{a}(x)$ соотношением

$$\pi^{1} = \pi\sin\theta\cos\phi,$$

$$\pi^{2} = \pi\sin\theta\sin\phi,$$

$$\pi^{3} = \pi\cos\theta. \qquad /2.3/$$

Решая эти уравнения в дифференциальной геометрии, получаем следующее семейство геодезических в случае $\eta = +1$:

$$\frac{1}{\pi}f(\pi^{2}) = \sqrt{F_{\pi}^{2}C_{2}^{2}-C_{3}^{2}}\,[F_{\pi}^{2}C_{2}^{2}\cos^{2}(F_{\pi}^{-1}C_{2}(\tau+C_{1})) + C_{3}^{2}\sin^{2}(F_{\pi}^{-1}C_{2}(\tau+C_{1}))]^{1/2}\times$$

$$\times\sin[F_{\pi}^{-1}C_{2}(\tau+C_{1})],$$

$$\sin\theta = [F_{\pi}^{2}C_{2}^{2}\cos^{2}(F_{\pi}^{-1}C_{2}(\tau+C_{1})) + C_{3}^{2}\sin^{2}(F_{\pi}^{-1}C_{2}(\tau+C_{1}))]^{-1/2}\times$$

$$\times[F_{\pi}C_{2}\sin C_{4}\cos(F_{\pi}^{-1}C_{2}(\tau+C_{1})) - C_{3}\cos C_{4}\sin(F_{\pi}^{-1}C_{2}(2+C_{1}))],$$

$$\phi = C_{5}, \qquad /2.4/$$

или, в нашей задаче, плоско-волновые решения вида /2.1/. Здесь $C_{1},\ldots C_{5}$ - вещественные константы интегрирования. В случае некомпактной киральности, $\eta = -1$, аналогичным образом получается следующее семейство плоско-волновых решений:

$$\frac{1}{\pi}f(\pi^{2}) = \sqrt{F_{\pi}^{2}C_{2}^{2}+C_{3}^{2}}\,[F_{\pi}^{2}C_{2}^{2}\mathrm{ch}^{2}(F_{\pi}^{-1}C_{2}(\tau+C_{1})) + C_{3}^{2}\mathrm{sh}^{2}(F_{\pi}^{-1}C_{2}(\tau+C_{1}))]^{-1/2}\times$$

$$\times\mathrm{sh}[F_{\pi}^{-1}C_{2}(\tau+C_{1})], \qquad /2.5/$$

$$\sin\theta = [F_\pi^2 C_2^2 \operatorname{ch}^2(F_\pi^{-1}C_2(\tau+C_1)) + C_3^2 \operatorname{sh}^2(F_\pi^{-1}C_2(\tau+C_1))]^{-1/2} \times$$

$$\times [F_\pi C_2 \sin C_4 \operatorname{ch}(F_\pi^{-1}C_2(\tau+C_1)) - C_3 \cos C_4 \operatorname{sh}(F_\pi^{-1}C_2(\tau+C_1))],$$

$$\phi = C_5 .$$

Легко видеть, что семейство решений /2.5/ может быть получено из /2.4/ заменой вещественной константы C_2 чисто мнимой константой $iC_2 = C_2\sqrt{\eta}$.

Не приводя здесь детальных вычислений, отметим, что система дифференциальных уравнений /2.2/ обладает следующей системой нулевых интегралов:

$$d_1(\pi^2)(\pi^2\dot{\pi}^3 - \pi^3\dot{\pi}^2) = -C_3 \sin C_5 \equiv J_1 ,$$

$$d_1(\pi^2)(\pi^3\dot{\pi}^1 - \pi^1\dot{\pi}^3) = C_3 \cos C_5 \equiv J_2 ,$$

$$d_1(\pi^2)(\pi^1\dot{\pi}^2 - \pi^2\dot{\pi}^1) \equiv J_3 = 0 \qquad /2.6/$$

и

$$d_1(\pi^2)[f(\pi^2)\dot{\pi}^1 - 2f'(\pi^2)(\pi\dot{\pi})\pi^1] = -\sqrt{F_\pi^2 C_2^2 - C_3^2}\sin C_4 \cos C_5 \equiv K_1 ,$$

$$d_1(\pi^2)[f(\pi^2)\dot{\pi}^2 - 2f'(\pi^2)(\pi\dot{\pi})\pi^2] = -\sqrt{F_\pi^2 C_2^2 - C_3^2}\sin C_4 \sin C_5 \equiv K_2 ,$$

$$d_1(\pi^2)[f(\pi^2)\dot{\pi}^3 - 2f'(\pi^2)(\pi\dot{\pi})\pi^3] = \sqrt{F_\pi^2 C_2^2 - C_3^2}\cos C_4 \equiv K_3 . \qquad /2.7/$$

Пять из них независимы; все шесть интегралов связаны соотношением $\underline{J}\cdot\underline{K} = 0$.

При выборе $f(\pi^2) = \sqrt{F_\pi^2 - \pi^2}$ /2.4/ принимает вид

$$\pi = [F_\pi^2 \cos^2(F_\pi^{-1}C_2(\tau+C_1)) + C_3^2 C_2^{-2} \sin^2(F_\pi^{-1}C_2(\tau+C_1))]^{1/2} ,$$

$$\pi\sin\theta = F_\pi \sin C_4 \cos[F_\pi^{-1}C_2(\tau+C_1)] - C_2^{-1}C_3 \cos C_4 \sin[F_\pi^{-1}C_2(\tau+C_1)],$$

$$\phi = C_5 . \qquad /2.8/$$

Плотность энергии

$$H = \frac{1}{2} C_2^2 (p_0^2 + \vec{p}^2) \qquad /2.9/$$

всех решений /2.4/, /2.5/ постоянна и, следовательно, ограничена везде в пространстве-времени, однако их полная энергия бесконечна. Плоские волны полезны в линейных теориях, где из них можно образовывать суперпозиции и строить любое другое решение, в частности решения с конечной энергией. Здесь мы имеем дело с нелинейной теорией поля и не знаем, чем заменяется этот принцип суперпозиции. Однако в следующем разделе мы покажем, что все-таки можно использовать плоско-волновые решения /2.4/, /2.5/ для построения решений с конечной энергией.

3. РЕШЕНИЯ С КОНЕЧНОЙ ЭНЕРГИЕЙ

Прежде всего попробуем расширить насколько возможно семейство решений, полученных во втором разделе. Сделаем это с помощью метода вариации постоянных, предложенного в недавней работе [11]. Вместо $px+C_1, C_2, \ldots C_5$ в /2.4/ и /2.5/ подставляем некоторые функции $\tau(x)$, $\xi_2(x), \ldots \xi_5(x)$. Обозначим

$$A(x) = \{F_\pi^2 \xi_2^2(x)\cos^2[F_\pi^{-1}\xi_2(x)\tau(x)] + \xi_3(x)\sin^2[F_\pi^{-1}\xi_2(x)\tau(x)]\}^{-1/2} \qquad /3.1/$$

и напишем

$$\frac{1}{\pi} f(\pi^2) = A(x)[F_\pi^2\xi_2^2(x) - \xi_3^2(x)]^{1/2} \sin[F_\pi^{-1}\xi_2(x)\tau(x)],$$

$$\sin\theta = A(x)\{F_\pi\xi_2(x)\sin\xi_4(x)\cos[F_\pi^{-1}\xi_2(x)\tau(x)] -$$

$$- \xi_3(x)\cos\xi_4(x)\sin[F_\pi^{-1}\xi_2(x)\tau(x)]\},$$

$$\phi = \xi_5(x) . \qquad /3.2/$$

Можно показать непосредственно, принимая во внимание /2.2/, что если функции τ, $\xi_2, \ldots \xi_5$ удовлетворяют уравнениям

$$\Box\tau = 0, \tag{/3.3/}$$

$$\Box\xi_n = 0, \tag{/3.4/}$$

$$\partial_\mu\tau\partial^\mu\xi_n = 0, \quad \partial_\mu\xi_m\partial^\mu\xi_n = 0, \quad m, n = 2, \ldots 5, \tag{/3.5/}$$

то пионные поля, построенные при помощи /3.2/, удовлетворяют уравнениям поля /1.8/. Дальше нетрудно написать, с учетом /2.2/, следующее выражение для плотностн энергии /1.12/ в терминах τ и ξ:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\xi_2^2(x)\left[\left(\frac{\partial\tau}{\partial x_0}\right)^2 + (\nabla\tau)^2\right] +$$

$$\sum_{n=2}^{4}\left[(d_1 + \pi^2 d_2)\frac{\partial\pi}{\partial\tau}\frac{\partial\pi}{\partial\xi} + \pi^2 d_1\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\frac{\partial\theta}{\partial\xi_n}\right]\frac{\partial\tau}{\partial x_0}\frac{\partial\xi_n}{\partial x_0} +$$

$$+\sum_{m,n=2}^{4}\left[(d_1 + \pi^2 d_2)\frac{\partial\pi}{\partial\xi_m}\frac{\partial\pi}{\partial\xi_n} + \pi^2 d_2\frac{\partial\theta}{\partial\xi_m}\frac{\partial\theta}{\partial\xi_n}\right]\frac{\partial\xi_m}{\partial x_0}\frac{\partial\xi_n}{\partial x_0} +$$

$$+ d_1\pi^2\sin^2\theta\left(\frac{\partial\xi_5}{\partial x_0}\right)^2. \tag{/3.6/}$$

К несчастью, мы не знаем общей процедуры решення волновых уравнений /3.3/ н /3.4/ прн наличии связей /3.5/. Мы можем только получать некоторые семейства точных решений. Простейшнмн нз ннх являются:

$$\xi_2 = \ldots = \xi_5 = \text{const}, \qquad \Box\tau(x) = 0 \tag{/3.7/}$$

и

$$\xi_n = \eta_n(kx), \quad k^2 = 0,$$

$$\Box\tau(x) = 0, \qquad k^\mu\partial_\mu\tau = 0, \tag{/3.8/}$$

где η_n - произвольные функции их аргумента kx. В случае /3.7/ плотность энергии принимает простой вид

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\xi_2^2\left[\left(\frac{\partial\tau}{\partial x_0}\right)^2 + (\nabla\tau)^2\right], \tag{/3.9/}$$

так же как и тензор плотности энергии-импульса:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\xi_2^2[\partial_\mu\tau\partial_\mu\tau - \eta_{\mu\nu}\partial_\lambda\tau\partial^\lambda\tau]. \tag{/3.10/}$$

Оказывается, однако, что уже набора /3.7/ достаточно, чтобы написать обширное семейство точных решений с конечной энергией уравнения поля /1.5/. Чтобы показать это, напомним, что если

$$\alpha = \alpha(\vec{x}), \quad \beta = \beta(\vec{x}) \tag{/3.11/}$$

- любые функции пространственных переменных, то существует еднннственное решение $\tau(x_0, x)$ уравнения /3.3/, удовлетворяющее начальным условиям

$$\tau(0, \vec{x}) = \alpha(\vec{x}), \qquad \frac{\partial\tau}{\partial x_0}(0, \vec{x}) = \beta(\vec{x}). \tag{/3.12/}$$

Оно имеет вид

$$\tau(x_0, \vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_0}\left[\frac{x_0}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\alpha(\vec{x} + x_0\vec{n})\sin\mu\, d\mu\, d\lambda\right] +$$

$$+ \frac{x_0}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\beta(\vec{x} + x_0\vec{n})\sin\mu\, d\mu\, d\lambda, \tag{/3.13/}$$

где $n = (\sin\mu\cos\lambda, \sin\mu\sin\lambda, \cos\mu)$. Полная энергия

$$P_0 = \frac{1}{2}\xi_2^2\int\left[\left(\frac{\partial\tau}{\partial x_0}\right)^2 + (\nabla\tau)^2\right]d^3x \tag{/3.14/}$$

сохраняется, т.е. равняется в произвольный момент времени x_0 своему значению при $x_0 = 0$:

$$P_0 = \frac{1}{2}\xi_2^2\int[\beta^2(\vec{x}) + (\nabla\alpha(\vec{x}))^2]\, d^3x. \tag{/3.15/}$$

Следовательно, каждому выбору функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, для которых интеграл /3.15/ сходится, соответствует семейство полевых решений с конечной энергией, даваемых уравнением /3.2/, в котором $\xi_n = \text{const}$ и $\tau(x)$ равно своему выражению /3.13/.

На многообразии наших решений /3.2/, /3.7/ векторный и аксиально-векторный токи принимают вид

$$V_a^\mu(x) = J_a\partial^\mu\tau(x), \quad A_a^\mu(x) = K_a\partial^\mu\tau(x), \tag{/3.16/}$$

где J_a и K_a определены через /2.6/ и /2.7/. Соответствующие заряды:

$$Q_a^V = J_a \int \frac{\partial \tau}{\partial x_0} d^3x, \quad Q_a^A = K_a \int \frac{\partial \tau}{\partial x_0} d^3x. \qquad /3.17/$$

Кроме этого, существуют две возможности определить сохраняющиеся топологические токи /4,6,7,22,23/. Первая из них:

$$j_1^\mu(x) = N_1 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{abc} \partial_\nu \hat{\pi}^a \partial_\rho \hat{\pi}^b \partial_\sigma \hat{\pi}^c, \qquad /3.18/$$

где $\hat{\pi}^a = \pi^a/\pi$. Чтобы определить другой топологический ток, отметим, что можно рассматривать теорию /1.2/, /1.3/, /1.4/ как теорию четырех полей $\sigma(x)$, $\tilde{\pi}^a(x)$, $a = 1,2,3$, со свободным лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \tilde{\pi}^a \partial^\mu \tilde{\pi}^a + \frac{\eta}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma \qquad /3.19/$$

и связью

$$\sigma^2 + \eta^2 \tilde{\pi}^2 = F_\pi^2. \qquad /3.20/$$

Поля в двух формулировках теории связаны посредством выражений

$$\Phi^0(x) \equiv \sigma(x) = F_\pi f(\pi^2) [\eta \pi^2 + f^2(\pi^2)]^{-1/2},$$

$$\Phi^a(x) \equiv \tilde{\pi}^a(x) = F_\pi \pi^a [\eta \pi^2 + f^2(\pi^2)]^{-1/2}. \qquad /3.21/$$

Тогда

$$j_2^\mu(x) = N_2 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \Phi^\alpha \partial_\nu \Phi^\beta \partial_\rho \Phi^\gamma \partial_\sigma \Phi^\delta \qquad /3.22/$$

тоже является сохраняющимся топологическим током. Постоянные N_1 и N_2 определяют нормировку.

Нетрудно показать, что решения /3.2/, /3.7/ обладают нулевыми топологическими зарядами

$$Q_1 = \int j_1^0(x) d^3x = 0, \quad Q_2 = \int j_2^0(x) d^3x = 0. \qquad /3.23/$$

Мы заканчиваем этот раздел следующим примером. Выберем начальные данные задачи Коши /3.12/:

$$\tau(x) = 0, \quad \beta(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le r \le 1 \\ 0 & 1 < r \end{cases}. \qquad /3.24/$$

Для сферически симметричных начальных условий решение /3.13/ задачи Коши принимает вид

$$\tau(x_0, x) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x_0}{2} \int_{-1}^{1} \alpha(\sqrt{x_0^2 + r^2 + 2x_0 r\zeta}) d\zeta \right] +$$

$$+ \frac{x_0}{2} \int_{-1}^{1} \beta(\sqrt{x_0^2 + r^2 + 2x_0 r\zeta}) d\zeta. \qquad /3.25/$$

В частности, в случае /3.24/ имеем

$$\tau(x_0, x) = \begin{cases} x_0 & 0 \le r \le 1 - x_0, \\ \frac{1}{4r}[1 - (x_0 - r)^2] & 1 - x_0 \le r \le 1 + x_0, \\ 0 & 1 + x_0 \le r \end{cases} \qquad /3.26/$$

при условии, что $0 \le x_0 \le 1$, и

$$\tau(x_0, x) = \begin{cases} 0 & 0 \le r \le x_0 - 1, \\ \frac{1}{2r}[1 - (x_0 - r)^2] & x_0 - 1 \le r \le x_0 + 1, \\ 0 & x_0 + 1 \le r \end{cases} \qquad /3.27/$$

в последующие моменты $x_0 \ge 1$. Подставляя /3.26/, /3.27/ в /3.2/, получаем явное выражение для киральных полей. Их полные энергия и импульс имеют значения

$$P_0 = \frac{2\pi}{3} \xi_2^2, \quad P_n = 0, \qquad /3.28/$$

в то время как для векторных и аксиально-векторных зарядов получается

$$Q_a^V = \frac{4\pi}{3} J_a, \quad Q_a^A = \frac{4\pi}{3} K_a. \qquad /3.29/$$

где J_a и K_a определены посредством /2.6/ и /2.7/. В частности, как следствие того, что $J_3 = 0$, это решение, а также каждое из решений /3.2/ и /3.7/, обладает нулевым полным электрическим зарядом.

Авторы признательны проф. И.Т.Тодорову за полезные обсуждения и Е.А.Иванову за обсуждение рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Schwinger J. Ann.Phys. (N.Y.), 1958, 2, p.407.*
2. *Skyrme T.H.R. Proc. Roy. Soc. (London), 1958, A247, p.260.*
3. *Gell-Mann M., Levy M. Nuovo Cimento, 1960, 16, p.705.*
4. *Skyrme T.H.R. Proc. Roy. Soc. (London), 1961, A260, p.127.*
5. *Skyrme T.H.R. Proc. Roy. Soc. (London), 1961, A262, p.237.*
6. *Фаддеев Л.Д. В кн.: Материалы* IV *Международного совещания по нелокальным, нелинейным и неренормируемым теориям поля, 1976, Алушта, СССР. ОИЯИ, Д2-9788, Дубна,*
7. *Faddeev L.D. Lett. Math. Phys., 1976, 1, p.289.*
8. *Duff M.J., Isham C.J. Nucl.Phys., 1976, B108, p.130.*
9. *Honerkamp J. e.a. Lett. Nuovo Cim., 1976, 15, p.97.*
10. *Polyakov A.M. Phys. Lett., 1977, 72B, p.224.*
11. *Deser S., Duff M.J., Isham C.J. Nucl.Phys., 1976, B114, p.29.*
12. *Hietarinta J. J.Math.Phys., 1977, 18, p.65.*
13. *Weinberg S. Phys. Rev., 1968, 166, p.1568.*
14. *Enikova M.M., Karloukovski V.I. Submitted for publication*
15. *Weinberg S. In: Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory. Brandeis Univ., Summer Institute in Theoretical Physics, 1970, v.1.*
16. *De Urries F.J., Leon J., Tiemblo A. Nuovo Cimento, 1976, A34, p.59.*
17. *Coleman S., Wess J. Zumino B. Phys. Rev., 1968, 177, p.2239.*
18. *Meetz S.K. J. Math.Phys., 1969, 10, p.589.*
19. *Isham G. Nuovo Cimento, 1969, 59A, p.356.*
20. *Славнов А.А., Фаддеев Л.Д. ТМФ, 1971, 8, с.297.*
21. *Coleman S. Phys. Lett., 1977, 70B, p.59.*
22. *Arafune J., Freund P.G.O., Goebel C.J. J.Math. Phys., 1975, 16, p.433.*
23. *Patani A., Schlindwein M., Shafi Q. J.Phys., 1976, A9, p.1513.*

Рукопись поступила в издательский отдел
13 ноября 1978 года.