ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 12015

М.И.Широков

СТРОГО ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ СОСТОЯНИЯ И ЧАСТИЦЫ

1978

P2 - 12015

М.И.Широков

СТРОГО ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ СОСТОЯНИЯ И ЧАСТИЦЫ

Направлено в ТМФ

Широков М.И. P2 - 12015

Строго локализованные состояния и частицы

В квантовой теории скалярного и спинорного полей построен новый класс локализованных состояний, распространяющихся строго причинным образом. Обсуждены корпускулярные свойства этих состояний.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Shirokov M.I. P2 - 12015

Strictly Localized States and Particles

We construct a new class of localized states of the scalar and spinor quantum fields theory, which propagate in a strictly causal manner. The particle properties of these states are discussed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

1. ВВЕДЕНИЕ

1. Давно известно явление мгновенного расплывания релятивистского волнового пакета. Оно означает, что если частица вначале была локализована в конечном объеме V, то чуть позже она может быть найдена в объеме W, расположенном сколь угодно далеко от V. Хегерфельдт показал /1/, что это явление имеет место при довольно общих предположениях о понятии локализации частицы. Он предложил преодолеть эту трудность следующим образом: считать невозможной строгую локализацию частицы внутри V /такую, что вероятность найти ее вне V строго равняется нулю/. Однако это предложение нарушает принцип суперпозиции; можно взять два возможных /согласно этому предложению/ нелокализованных состояния, таких, что их суперпозиция будет уже строго локализованным состоянием /которое Хегерфельдт предлагает считать невозможным/. К тому же в /1/ не показано, что это предложение может разрешить трудность. Действительно, если частицу нельзя строго локализовать внутри V, то условие причинности должно формулироваться иначе, чем (ii) в /1/. В этом случае вероятность найти частицу в момент t в объеме W конечно, не может равняться нулю, если расстояние r между V и W больше ct: она не равна нулю уже при t = 0. Однако причинность подсказывает нам, что эта вероятность не может быть слишком большой: в объеме W в момент t не может быть больше частиц, чем их было в объеме W + ΔW с размером, большим размера W на 2ct*.

* Этот критерий причинности был предложен в работе автора /2/. Сходный критерий см. в /3,4/. В /2/ было показано, что он нарушается в случае дираковского электрона, волновую функцию которого нельзя локализовать в конечном объеме.

Поэтому мы считаем, что работа [1] указывает лишь на то, что в релятивистской теории существует трудность с причинностью. Кроме [1–4] к этой проблеме имеют также отношение работы, цитированные в [1] /ссылки 2, 3/, а также [5].

2. В работе Найта [6] было показано, что в релятивистской локальной теории поля существуют локализованные состояния, которые распространяются строго причинным образом в смысле предложенного им критерия причинности /см. далее /1//.

Рассмотрим всевозможные шредингеровские операторы $Q_W(\phi)$, зависящие от полевых операторов $\phi(\vec{x},0)$, $\partial_t\phi(\vec{x},0)$, нумерующихся точками $\vec{x}$, принадлежащими некоторому конечному объему W. Примерами могут служить сами операторы $\phi(x,0)$, $x \in W$, импульс поля в объеме $W - \int_W d^3x\,\pi(x)\,\nabla\phi(x)$, энергия $\int_W d^3x\,H(x)$ и т.п. Состояние Ψ_V назовем локализованным в объеме V, если для любых W, не пересекающихся с V, средние $(\Psi_V|Q_W|\Psi_V)$ от операторов Q_W не зависят от Ψ_V. Конкретно Найт требует, чтобы все эти средние равнялись вакуумному среднему $\langle 0|Q_W|0\rangle$, но можно потребовать, чтобы они равнялись и другому "эталонному" значению.

Состояние Ψ_V естественно считать эволюционирующим строго причинным образом, если средние $(\Psi_V(t)|Q_W|\Psi_V(t))$ в состоянии $\Psi_V(t) = \exp(-iHt)\,\Psi_V$ не зависят от Ψ_V при условии, что расстояние $r(V,W)$ между V и W больше ct. Ввиду

$$(\Psi_V(t)|Q_W(\phi)|\Psi_V(t)) = (\Psi_V|e^{iHt}\,Q_W(\phi)e^{-iHt}|\Psi_V) = (\Psi_V|\mathbf{Q}_W(\phi_t)|\Psi_V)$$

этот критерий можно переписать в терминах средних от гейзенберговских операторов $\mathbf{Q}_W(\phi_t) = \exp(iHt)\,Q_W(\phi)\exp(-iHt)$.

Примем <u>Определение</u>: состояние Ψ_V называется строго локализованным в объеме V, если для любого объема W и любых операторов Q_W среднее $(\Psi_V|\mathbf{Q}_W(\phi_t)|\Psi_V)$ не зависит от Ψ_V при $r(V,W) > ct$.

Критерий строгой локализуемости Найта в наших обозначениях имеет вид

$$(\Psi_V|\mathbf{Q}_W(\phi_t)|\Psi_V) = \langle 0|\mathbf{Q}_W(\phi_t)|0\rangle \qquad /1/$$

при $r(V,W) > ct$ для всех $\mathbf{Q}_W(\phi_t)$, принадлежащих алгебре операторов, генерированных $\phi(\vec{x},t)$ с $\vec{x} \in W$.

Указанные в [6] строго локализованные состояния имеют вид $\Psi_V = \exp(iR_V)|0\rangle$, где эрмитовский оператор R_V зависит только от операторов поля $\phi(\vec{x},0)$, $\partial_t\phi(\vec{x},0)$, $\vec{x} \in V$. Для них /1/ выполняется, потому что имеем

$$\exp(-iR_V)\mathbf{Q}_W(\phi_t)\exp iR_V = \mathbf{Q}_W(\phi_t)\exp(-iR_V)\exp(iR_V) = \mathbf{Q}_W(\phi_t) \qquad /2/$$

вследствие того, что все полевые операторы в R_V коммутируют с полевыми операторами в $\mathbf{Q}_W(\phi_t)$, если $r(V,W) > ct$ ввиду локальности перестановочных соотношений

$$[\phi(\vec{x}_V,0),\,\phi(\vec{x}_W,t)] = 0 \quad \text{при} \quad (\vec{x}_V,0) \sim (\vec{x}_W,t).$$

3. Однако хорошее причинное поведение состояний Найта имело бы отношение к трудности мгновенного расплывания пакета частицы, только если их можно было бы считать описывающими состояния частиц. В работах [7–9] было сделано предложение такого рода: квантовое "односолитонное состояние" там описывается когерентным состоянием, являющимся частным случаем состояний $\exp(iR)|0\rangle$, когда R линейно зависит от полевых операторов. Однако можно показать, что когерентные состояния не удовлетворяют некоторым естественным требованиям к состояниям, описывающим одну частицу, в частности, следующим: 1/ одночастичное состояние должно обладать определенным зарядом /в случае теории заряженного поля/; 2/ одночастичное состояние должно быть ортогонально вакуумному /должна быть равна нулю вероятность найти частицу в бесчастичном состоянии/; 3/ суперпозиция двух одночастичных состояний тоже должна быть возможным одночастичным состоянием /принцип суперпозиции/; 4/ должны существовать одночастичные состояния с достаточно определенным импульсом.

Невыполнение 1/ и 2/ следует из того, что состояния Найта раскладываются по вакуумному и обычным одно- и многочастичным состояниям [6]. Относительно невыполнения 3/ /см., напр., [10]. Наконец, для когерентных состояний можно показать, что разброс по импульсам может иметь порядок среднего импульса.

4. В этой работе мы предлагаем еще один класс строго локализованных состояний релятивистской локальной теории поля. Среди них есть состояния, удовлетворяющие требованиям 1/-4/, и в этом смысле похожие на одночастичные /хотя и нельзя считать, что они могут описывать наблюдаемые частицы, см. далее/. Идея работы состоит в следующем.

Выполнение /1/ для состояний $\exp(iR_V)|0\rangle$ следует из а/ локальной коммутативности, б/ унитарности оператора $\exp(iR_V)$, см. /2/. Унитарность, однако, вовсе не является необходимой. Вместо $\exp iR_V$ можно взять оператор T неунитарный, но такой, что $T^+T|0\rangle = |0\rangle$. Тогда /1/ будет выполняться для состояний $\Psi_V = T|0\rangle$, если T зависит только от полевых операторов объема V.

Примером неунитарных операторов T, удовлетворяющих условию $T^+T|0\rangle$, могут служить обычные операторы рождения скалярных частиц

$$a_f^+ = \int d^3k\, \tilde f(k) a_k^+ \sim \int d^3x\, f(\vec x)\phi^{(+)}(x), \qquad ||f|| = 1, \quad a_f a_f^+|0\rangle = |0\rangle. \qquad /3/$$

Однако вследствие известной нелокальности оператора $\phi^{(+)}(x)$ оператор a_f^+ выражается через операторы поля всех точек пространства, даже если $f(\vec x) = 0$ вне конечного объема.

Вместо $\phi^{(+)}(x)$ мы укажем простые локальные операторы $A^+(x)$ такие, что построенные с их помощью /по образцу/3// состояния $A_f^+|0)$ оказываются похожими на одночастичные. Подчеркнем, что $|0)$ не совпадает с обычным вакуумом $|0\rangle$ /см. далее/. По причине $A_f A_f^+|0) = |0)$ состояния $A_f^+|0)$ являются строго локализованными в смысле нашего Определения /см. пункт 2/.

Однако состояния $A_f^+|0)$ не могут описывать наблюдаемые частицы хотя бы по той причине, что энергия этих состояний не может быть сколько-нибудь определенной /при определенном импульсе/. Это обстоятельство можно рассматривать как плату за строго причинное поведение: согласно теореме Хегерфельдта[1], пакеты частиц с определенной массой с необходимостью должны расплываться мгновенно.

В разделе II рассматривается случай скалярного поля, а в разделе III - спинорного.

Подчеркнем, что в этой работе рассматриваются только строго локализованные состояния. Не обсуждаются состояния типа essentially localized states, рассматриваемые в[11].

II. СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ

1. Обычный оператор уничтожения частиц $\phi^{(-)}(x)$ нелокально выражается через $\phi(x)$. Из разложений

$$\phi = \phi^{(-)} + \phi^{(+)} = \phi^{(-)} + [\phi^{(-)}]^+, \quad \pi = -i\hat\omega[\phi^{(-)} - \phi^{(+)}] \qquad /4/$$

вытекает

$$\phi^{(-)}(x) = \frac{1}{2}[\phi(x) + i\hat\omega^{-1}\pi(x)] = \frac{1}{2}[1 + i\hat\omega^{-1}\partial_t]\phi(x). \qquad /5/$$

Здесь $\hat\omega$ обозначает нелокальный оператор $(-\Delta + m^2)^{1/2}$, имеющий вид $(k^2 + m^2)^{1/2}$ в импульсном пространстве.

Для сравнения с последующим приведем менее известное видоизменение /4/, /5/:

$$\phi = (2\hat\omega)^{-1/2}[\mathfrak{A} + \mathfrak{A}^+], \qquad \mathfrak{A} = [\hat\omega^{1/2}\phi + i\hat\omega^{-1/2}\pi]/\sqrt{2} \qquad /6/$$

$$\mathfrak{A}(\vec x) = (2\pi)^{-3/2}\int d^3k \exp(i\vec k\vec x)a_k, \quad [a_k, a_{k'}^+] = \delta^{(3)}(\vec k - \vec k'). \qquad /7/$$

Коммутатор $[\mathfrak{A}(\vec x, x_0), \mathfrak{A}^+(\vec y, y_0)]$ пропорционален $\partial_t\Delta^{(+)}$ и, в отличие от $[\phi^{(-)}(\vec x, x_0), \phi^{(+)}(\vec y, y_0)]$, при $x_0 = y_0$ оказывается локальным, равным $\delta^{(3)}(\vec x - \vec y)$. Разложение /6/ связано с употреблением координаты Ньютона-Вигнера в качестве оператора положения скалярной частицы /см.[12] после формулы /54//.

2. Простейший локальный аналог разложения /6/ имеет вид

$$\phi(x) = (2\mu)^{-1/2}[A(x) + A^+(x)], \quad \pi(x) = -i(\mu/2)^{1/2}[A(x) - A^+(x)] \qquad /8/$$

$$A = [\mu^{1/2}\phi + i\mu^{-1/2}\pi]/\sqrt{2}, \qquad /9/$$

где μ есть произвольный параметр размерности массы. Все коммутации $A(x)$ с $\phi(x)$ и $\pi(x)$, а также коммутация $[A(x), A^+(y)]$ оказываются локальными. В частности,

$$[A(\vec{x},t),\ A^+(\vec{y},t)]=\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}). \qquad /10/$$

Вместо /9/ можно было бы написать несколько более общее линейное и локальное выражение A через ϕ и π. Но если потребовать, чтобы коммутация $[A(\vec{x},t),\ A^+(\vec{y},t)]$ точно равнялась $\delta(x-y)$, то придем к виду /9/.

Конечно, $A(x)$, в отличие от $\phi^{(-)}$, не является лоренцевским скалярным полем, но и $\mathfrak{A}(x)$ из /6/ тоже не является таковым.

Приняв разложение /8/, далее действуем в полной аналогии с обычной процедурой корпускулярной интерпретации. Для шредингеровского оператора $A(\vec{x},0)$ вводим разложение

$$A(\vec{x},0)=(2\pi)^{-3/2}\int d^3k\,\exp(i\vec{k}\vec{x})\alpha_k\ ,\ [\alpha_k,\alpha^+_{k'}]=\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}'). \quad /11/$$

Операторы α_k, α^+_k выражаются через a_k, a^+_k из /7/ преобразованием Боголюбова.

Определяем уравнениями

$$A(\vec{x})|0)=0\quad \forall\,\vec{x} \qquad \text{или} \qquad \alpha_{\vec{k}}|0)=0\quad \forall\,\vec{k} \qquad /12/$$

"бесчастичный" вектор $|0)$. С его помощью определяем состояние, аналогичное одночастичному

$$\Phi_f=\int d^3x\ f(\vec{x})A^+(\vec{x})|0)=\int d^3k\ \tilde{f}(\vec{k})\alpha^+_{\vec{k}}|0)\equiv A^+_f|0). \qquad /13/$$

3. В случае заряженного скалярного поля аналогично пишем

$$\phi(x)=[A(x)+B^+(x)]/\sqrt{2\mu}$$

$$A=(\mu^{1/2}\phi+i\mu^{-1/2}\pi^+)/\sqrt{2},\quad B^+=(\mu^{1/2}\phi-i\mu^{-1/2}\pi^+)/\sqrt{2} \qquad /14/$$

и формулы, подобные /11/. Для оператора полного заряда получаем при любом μ выражение

$$Q=ie\int d^3x(\phi^+\pi^+-\phi\,\pi)=e\int d^3k\,(\alpha^+_k\alpha_k-\beta^+_k\beta_k). \qquad /15/$$

4. Если функция f в /13/ нормирована $\int d^3x\,|f(\vec{x})|^2=1$ и исчезает вне объема V, то мы получаем

$$(\Phi_f\,|\mathbf{Q}_W(\phi_t)|\Phi_f)=(0|\mathbf{Q}_W(\phi_t)|0),\qquad r(V,W)>ct, \qquad /16/$$

потому, что A_f выражается через полевые операторы $\phi(\vec{x}),\pi(\vec{x})$, $x\in V$ и $A_f\,A^+_f\,|0)=|0)$. Поэтому состояния /13/ являются строго локализованными. В качестве Q_W в /16/ можно теперь взять и оператор $\int_W d^3x\,A^+(\vec{x})A(\vec{x})$, аналогичный оператору числа частиц в объеме W, ср./12/.

Строго локализованными оказываются и "двухчастичные" состояния вида

$$\Phi_2=\iint d^3x\,d^3y\ f(\vec{x},\vec{y})A^+(\vec{x})A^+(\vec{y})|0), \qquad /17/$$

/где $f(\vec{x},\vec{y})=0$, если $\vec{x},\vec{y}\notin V$ /, а также аналогичные "многочастичные".

Действительно, нетрудно проверить, что

$$(\Phi_2|Q_W(\phi_t)|\Phi_2)/(\Phi_2|\Phi_2)=(0|Q_W(\phi_t)|0),\quad r(V,W)>ct. \qquad /18/$$

Вместо того, чтобы предполагать, что норма Φ_2 равна 1, мы поделили в /18/ среднее от Q_W на $(\Phi_2|\Phi_2)$.

Легко также проверить, что состояния вида $\exp(iR_V)A^+_f|0)$, /где $\exp(iR_V)$ - унитарные операторы Найта, см. п. 2 Введения/ тоже являются строго локализованными состояниями.

Можно показать, что состояния /13/, рассматриваемые как одночастичные, распространяются причинно и в смысле отсутствия мгновенного расплывания пакета /13/, см. п. 1 Введения. Этот критерий причинности в случае состояния /13/ оказывается частным видом критерия /16/.

5. Может ли "одночастичное" состояние вида /13/ действительно описывать наблюдаемую частицу / π -мезон/?

Оно удовлетворяет требованиям 1/-4/ из пункта 3 Введения по тем же причинам, по каким им удовлетворяет одночастичное состояние при обычной корпускулярной интерпретации. В частности, оператор заряда /15/ выражается через операторы

$\alpha_k, \alpha^+_k, \beta_k, \beta^+_k$ так же, как и через обычные операторы рождения-уничтожения. То же относится и к оператору импульса

$$\vec{P} = -\frac{1}{2}\int d^3x\,(\vec{\nabla}\phi\pi + \pi\vec{\nabla}\phi) = \int d^3k\, k\alpha^+_k\alpha_k . \qquad /19/$$

Поэтому состояние $\alpha^+_k|0)$ обладает определенным зарядом и импульсом.

Выполняется и такое естественное требование: 5/ если "частица" локализована в V, то ее нельзя найти в тот же момент времени в непересекающемся с V объеме W: $(\Phi_f|\Phi_g) = 0$, если функция f локализована в V, а g - в W. Более того, выполняется и релятивистское обобщение этого требования, эквивалентное отсутствию мгновенного расплывания.

Однако свободный гамильтониан

$$H_0 = \frac{1}{2}\int d^3x\,[\pi^2(x) + (\vec{\nabla}\phi(x))^2 + m^2\phi^2(x)] \qquad /20/$$

при подстановке /8/ и /11/ уже не приобретет простого "диагонального" вида $\int d^3k\,\omega(k)\,a^+_k a_k$, который он имеет в терминах операторов a_k, a^+_k из /7/. Он содержит члены $\alpha_k\alpha_{-k}$ и $\alpha^+_k\alpha^+_{-k}$. Ввиду этого состояния $|0)$ и $\alpha^+_k|0)$ не являются собственными векторами H_0 и не обладают определенными энергиями. Состояние $|0)$ с течением времени может переходить в двухчастичное, а $\alpha^+_k|0)$ - в трехчастичное. Однако при наличии взаимодействия не сохраняется и число обычных, "голых" частиц.

Рассмотрим далее величину

$$E_{cp} = (k|H_0|k) - (0|H_0|0), \quad |k) \equiv \alpha^+_k|0). \qquad /21/$$

Вместо вычитания "вакуумного" среднего H_0 можно брать H_0 в нормальной форме по отношению к операторам α^+_k, α_k. E_{cp} оказывается конечным, и, в случае $\mu = m$, имеем $E_{cp} = m + k^2/2m$, т.е. нерелятивистское значение!

Оказывается, что *в любом состоянии вида /13* (с неточным импульсом) *соотношение между средней энергией и средним импульсом не может иметь релятивистского вида* $E_{cp} = [k^2_{cp} + \mathrm{inv}]^{1/2}$.

Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что при $k_{cp} \to \infty$ средняя энергия растет быстрее среднего импульса /при любых значениях параметра μ в /8/, /9//. Это вытекает из неравенства вида

$$\int d^2k\,|f(k)|^2 k^2_x > (\int d^3k\,|f(k)|^2 k_x)^2, \quad \int d^3k\,|f(k)|^2 = 1,$$

являющегося частичным случаем неравенства Шварца-Буняковского, см. также теорему 192 в [13].

Дисперсия $(k|(H_0 - E_{cp})^2|k)$ оказывается бесконечной, но только потому, что и $(0|H^2_0|0)$ бесконечно. Разность

$$(k|(H_0 - E_{cp})^2|k)/(k|k) - (0|[H_0 - (0|H_0|0)]^2|0) \qquad /22/$$

получается равной $(k^2/2m)^2$, т.е. квадрату "кинетической" части полной средней энергии $m + k^2/2m$ /в /22/ гамильтониан считается взятым в "нормальной" форме/. Можно показать, что и *в любом состоянии вида /13/ разброс по энергиям* /вычисляемый по формуле /22// *не может быть меньше средней "кинетической" энергии"* $\int d^3k\, k^2 |f(k)|^2 / 2m$.

III. СПИНОРНОЕ ПОЛЕ

В обычном разложении $\psi = \psi^{(-)} + \psi^{(+)}$ уничтожающий электроны оператор $\psi^{(-)}$ следующим образом выражается через ψ:

$$\psi^{(-)}_\mu(\vec{x}) = \int d^3x'\,\Pi^{(-)}_{\mu\nu}(\vec{x},\vec{x}')\,\psi_\nu(\vec{x}') \qquad /23/$$

$$\Pi^{(-)}_{\mu\nu}(\vec{x},\vec{x}') = \int d^3p\,\frac{1}{2}[1 + (\vec{\alpha}\vec{p} + \beta m)/E_p]_{\mu\nu} e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{x}')} =$$

$$= -iS^{(-)}(\vec{x},0;\vec{x}',0)\gamma_0 . \qquad /24/$$

Проектор $\Pi^{(-)}$ соответствует проектору $\frac{1}{2}(1 + \partial_t/\hat{\omega})$ в /5/ и тоже является нелокальным. Обсудим разложения вида

$$\psi_\mu(\vec{x}) = A_\mu(\vec{x}) + B_\mu(\vec{x}) \qquad /25/$$

$$A_\mu(\vec{x}) = (2\pi)^{-3/2}\int d^3p \sum_{r=1,2} a_\mu(\vec{p},r)\, e^{i\vec{p}\vec{x}}\, \alpha_{\vec{p}r}\,.$$

$$B_\mu(\vec{x}) = (2\pi)^{-3/2}\int d^3p \sum_{r=1,2} b_\mu(p,r)\, e^{-i\vec{p}\vec{x}}\, \beta^+_{pr}\,, \qquad /26/$$

где A и B локально выражаются через ψ. Потребуем, чтобы для новых "одночастичных" состояний выполнялись требования 1/-4/ из пункта 3 Введения. Для этого прежде всего надо, чтобы оператор заряда

$$Q \sim \int d^3x\, \psi^+(x)\psi(x) =$$

$$= \int d^3p \sum_{r_1,r_2} \{ a^+(\vec{p},r_1)\, a(\vec{p},r_2)\, \alpha^+_{pr_1}\alpha_{pr_2} +$$

$$+ a^+(\vec{p},r_1)\, b(-\vec{p},r_2)\, \alpha^+_{pr_1}\beta^+_{-p,r_2} + b^+(-\vec{p},r_1)\, a(\vec{p},r_2)\, \beta_{-pr_1}\alpha_{pr_2}$$

$$+ b^+(\vec{p},r_1)\, b(\vec{p},r_2)\, \beta_{pr_1}\beta^+_{pr_2} \} \qquad /27/$$

не содержал членов $\alpha^+\beta^+$ и $\beta\alpha$, для чего необходимо, чтобы

$$a^+(\vec{p},r_1)\, b(-\vec{p},r_2) = \Sigma_\mu\, a^*_\mu(\vec{p},r_1)\, b_\mu(-\vec{p},r_2) = 0 \quad \forall\ \vec{p}, r_1, r_2.$$

Далее, чтобы $Q\alpha^+_{pr}|0) \sim \alpha^+_{pr}|0)$, надо иметь

$$a^+(\vec{p},r_1)\, a(\vec{p},r_2) = \delta_{r_1 r_2} f_{r_1}(\vec{p})$$

и, аналогично, для b^+b. Мы видим, что спиноры a и b должны быть ортогональными и их можно нормировать. Пользуясь ортонормированностью a и b, можно выразить через ψ операторы α_{pr} и затем $A_\mu(x)$, исходя из /25/, /26/.

$$\alpha_{pr} = \int d^3x' \,\Sigma_\nu\, a^+_\nu(\vec{p},r) \exp(-i\vec{p}\vec{x}')\, \psi_\nu(\vec{x}') \qquad /28/$$

$$A_\mu(\vec{x}) = \int d^3p \sum_r \int d^3x' \,\Sigma_\nu\, a_\mu(\vec{p},r)\, a^+_\nu(\vec{p},r) \exp(ip(\vec{x}-\vec{x}'))\, \psi_\nu(\vec{x}') \equiv$$

$$\equiv \int d^3x' \,\Sigma_\nu\, \Pi^A_{\mu\nu}(\vec{x},\vec{x}')\, \psi_\nu(\vec{x}'), \qquad /29/$$

В /29/ Π^A оказывается проекционным оператором, если a и b ортонормированы:

$$(\Pi^A)^2 \equiv \int d^3y\, \Sigma_\nu\, \Pi^A_{\mu\nu}(\vec{x},\vec{y})\, \Pi^A_{\nu\lambda}(\vec{y},\vec{x}') = \Pi^A_{\mu\lambda}(\vec{x},\vec{x}') \equiv \Pi^A. \qquad /30/$$

A будет локально выражаться через ψ, если $\Pi^A(\vec{x},\vec{x}')$ выражается через $\delta(\vec{x}-\vec{x}')$ и ее производные. Для этого выражение $P_{A\mu\nu} = \Sigma_r\, a_\mu(\vec{p},r)\, a^+_\nu(\vec{p},r)$, фигурирующее в Π^A, см. /29/ /и являющееся тоже проектором/, должно быть полиномиальной функцией импульса p /такой проектор P_A мы назовем локальным/. В частности, оно не должно содержать выражения $E_p = (p^2+m^2)^{1/2}$, которое есть в проекторе $P_- = [1 + (\vec{\alpha}\vec{p} + \beta m)/E_p]/2$, см. /24/. Если просто заменить E_p на μ в P_-, то полученное выражение $[1 + (\vec{\alpha}\vec{p} + \beta m)/\mu]/2$ не будет проектором. Выражение $(1+\beta)/2$, получающееся из P_- при $\vec{p} = 0$, оказывается проектором. Подставляя в /29/ $P_A = (1+\beta)/2$ вместо $\Sigma_r\, a(\vec{p},r)\, a^+(\vec{p},r)$, получаем

$$A = \frac{1}{2}(1+\beta)\psi\ ; \qquad B = \frac{1}{2}(1-\beta)\psi \equiv P_B\psi\,. \qquad /31/$$

Примером локального вращательно-инвариантного проектора P_A, зависящего от импульса, может служить $[(1+\beta) + (1+\beta)(\vec{\alpha}\vec{p})/2\mu]/2$. Существуют и локальные лоренц-инвариантные проекторы $(1 \pm \gamma_5)/2$.

Имея локальный оператор $A = \Pi^A\psi$, мы можем выписать общий вид состояния, похожего на обычное одноэлектронное

$$\Phi_f = \int d^3x\, \Sigma_\mu\, A^+_\mu(\vec{x})\, f_\mu(\vec{x})|0) \equiv A^+_f|0)\,, \quad A_\mu(\vec{x})|0) = 0\ \ \forall\ \vec{x},\mu\,. \qquad /32/$$

Критерий причинности /16/ выполняется для состояний /32/, если функции $f_\mu(\vec{x})$, $\mu = 1,2,3,4$, равны нулю вне объема V и нормированы - $\int d^3x\, \Sigma_\mu |f_\mu(\vec{x})|^2 = 1$. Действительно, все наблюдаемые Q_W должны быть билинейны по спинорным полям и поэтому при $r(V,W) > ct$ имеем

$$A_f Q_W(t) A^+_f|0) = Q_W(t) A_f A^+_f|0) = Q_W(t)|0)\,. \qquad /33/$$

Могут ли состояния вида /32/ описывать наблюдаемые частицы? Как и в скалярном случае, выполняются требования 1/-4/, см. Введение.

В частности, состояния $a^+_{pr}|0)$ обладают определенным импульсом. Однако среди /32/ нет состояний с определенной энергией. Действительно, гамильтониан $H_D = \int d^3x\, \psi^+(\vec{x})(\vec{\alpha}\vec{p}+\beta m)\psi(\vec{x})$ при подстановке в него /25/, /26/ не будет содержать членов $a^+\beta^+$ и $a\beta$, рождающих и уничтожающих пары, только если

$$a^+(\vec{p}, r_1)(\vec{\alpha}\vec{p}+\beta m)b(-\vec{p}, r_2)=0,$$

/34/

$$b^+(-\vec{p}, r_1)(\vec{\alpha}\vec{p}+\beta m)a(\vec{p}, r_2)=0$$

для всех $\vec{p}, r_1, r_2$. Первое равенство в /34/ означает, что в разложении выражения $(\vec{\alpha}\vec{p}+\beta m)b$ по полной системе спиноров a и b есть только члены, пропорциональные b. Другими словами, оператор $(\vec{\alpha}\vec{p}+\beta m)$ не выводит спинор из пространства спиноров, натянутых на $b(\vec{p},1)$, $b(\vec{p},2)$. Это значит, что $(\vec{\alpha}\vec{p}+\beta m)$ должен коммутировать с проекционным оператором P_B. Из второго равенства в /34/ следует, что он должен коммутировать и с P_A. Все упомянутые выше локальные проекторы не коммутируют с $\vec{\alpha}\vec{p}+\beta m$. И вообще можно доказать, что при $m\neq 0$ никакие локальные проекторы не могут коммутировать с $\vec{\alpha}\vec{p}+\beta m$. Это означает, что равенства /34/ не могут иметь места. Состояния /32/ поэтому не могут обладать определенной энергией, и число "электронов" не может сохраняться.

Рассмотрим среднее от H_D в состоянии $a^+_{pr}|0)$, где r есть проекция спина на ось z, так что $a_\mu(\vec{p},1)=\delta_{\mu,1}$ и $a_\mu(\vec{p},2)=\delta_{\mu,2}$. Оно оказывается равным m в случае $P_A=(1+\beta)/2$, т.е. не зависит от импульса $\vec{p}$. Разброс энергий в этом состоянии, вычисляемый по формуле /22/, оказывается равным $|\vec{p}|$. В случае $P_A=(1+\gamma_5)/2$ ситуация еще хуже: средняя энергия состояния $a^+_{pr}|0)$ оказывается равной p_z, т.е. может принимать и отрицательные значения наряду с положительными.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построен класс состояний релятивистской локальной теории скалярного и спинорного полей, которые являются строго локализованными в смысле определения, данного в пункте 2 Введения. Они описываются с помощью операторов $A(x), A^+(x)$, в некоторых отношениях похожих на операторы $\phi^{(-)}(x)$, $\phi^{(+)}(x)$ уничто-

жения-рождения частиц. Однако, в отличие от последних, они локально выражаются через полевые операторы, см. /9/ для скалярного поля и /32/ для спинорного. Имея $A^+(\vec{x})$, строим состояния

$$\Phi_f = \int d^3x\, f(\vec{x})A^+(\vec{x})|0)\equiv A^+_f|0),$$

а также $A^+_f A^+_f|0)$ и т.п. Здесь вектор $|0)$ определен уравнениями $A(\vec{x})|0)=0$, $\forall\ \vec{x}$. Он неинвариантен относительно сдвигов во времени и лоренцевских преобразований. Если $f(\vec{x})=0$ вне некоторого объема V, то построенные выше состояния удовлетворяют критерию строгой локализуемости в форме /16/ или /18/.

Строго локализованными являются также состояния вида

$$U_V|0),\quad U_V A^+_f|0),\quad U_V A^+_f A^+_f|0),\dots$$

где операторы U_V зависят от полевых операторов $\phi(x)$, $x\in V$ и имеют свойство $U_V^+U_V=1$.

Состояния $A^+_f|0)$ не обладают сколько-нибудь определенной энергией. Средний импульс p_{cp} и средняя энергия E_{cp} этих состояний не связаны релятивистским соотношением $E^2_{cp}-p^2_{cp}=\mathrm{inv}$. Поэтому состояния $A^+_f|0)$, несмотря на их "одночастичный" вид, не могут описывать наблюдаемые частицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hegerfeldt G.C. Phys.Rev. 1974, D10, p. 3320.*
2. *Широков М.И. ОИЯИ,Е1-1252, Дубна, 1963.*
3. *Gerlach B. et al. Zeit.Physik, 1968, 208, p. 301.*
4. *Gromes D. Zeit.Physik,1970, 236, p. 276.*
5. *Perez J.F., Wilde I.F. Phys.Rev., 1977, D16, p. 315.*
6. *Knight J.M. Journal.Math.Phys., 1961, 2, p. 459.*
7. *Cahill K. Phys.Letters. 1974, 53B, p. 174.*
8. *Vinciarelli P. Phys.Letters. 1975, 59B, p. 380.*
9. *Шапиро И.С. ЖЭТФ, 1976, 70, с. 2050.*

10. *Licht A.L. Journ.Math.Phys., 1963, 4, p. 1443.*
11. *Haag R., Swieca J. Comm.Math.Phys., 1965, 1, p. 308.*
12. *Wightman A.S., Schweber S.S. Phys.Rev., 1955, 98, p. 812.*
13. *Харди Г., Литтлвуд Д., Полиа Г. Неравенства, ИЛ, М., 1948.*

Рукопись поступила в издательский отдел
10 ноября 1978 года.