ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 12010

А.Б.Пестов

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ДЕЙТРОНА

1978

P2 - 12010

А.Б.Пестов

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ДЕЙТРОНА

Направлено в ЯФ

Пестов А.Б.

Р2 - 12010

Волновое уравнение для дейтрона

Предложены релятивистские уравнения движения дейтрона в заданном внешнем поле. Указано их нерелятивистское приближение. Определены уровни энергии дейтрона в постоянном однородном магнитном поле.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Pestov A.B.

P2 - 12010

Wave Equation for Deuteron

Relativistic equations for motion of deuteron in a given external field are proposed. Their nonrelativistic approximation is indicated. The deuteron energy levels in a constant homogeneous magnetic field are determined.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

Из имеющихся экспериментальных данных можно заключить, что дейтрон во многих отношениях ведет себя как простой объект. С этой точки зрения уместна постановка вопроса о волновой функции дейтрона как целого и соответствующем волновом уравнении. Используя обычные структурные представления о дейтроне как наводящие, приходим к выводу, что движение дейтрона во внешнем электромагнитном поле следует описывать уравнениями

$$\nabla^{\sigma}\psi_{\sigma} = \frac{mc}{\hbar}\psi,$$

$$\nabla_{\mu}\psi_{\nu} - \nabla_{\nu}\psi_{\mu} - i e_{\mu\nu\alpha\beta}\nabla^{\alpha}\psi^{\beta} = \frac{mc}{\hbar}\psi_{\nu\mu}, \qquad /1/$$

$$\nabla^{\sigma}\psi_{\sigma\mu} - \nabla_{\mu}\psi = \frac{mc}{\hbar}\psi_{\mu},$$

где $\nabla_{\mu} = \partial_{\mu} - \frac{ie}{\hbar c}A_{\mu}$, $e_{\mu\nu\alpha\beta}$ - антисимметричный единичный 4-тензор с $e_{0123}=1$. Из второй группы уравнений /1/, следует, что $\tilde{\psi}_{\mu\nu} = i\psi_{\mu\nu}$, где $\tilde{\psi}_{\mu\nu}$ - бивектор, дуальный $\psi_{\mu\nu}$. Таким образом, пространственные компоненты 4-вектора ψ_{μ} и бивектора $\psi_{\mu\nu}$ образуют два независимых трехмерных вектора: $\vec{\psi} = \psi_1\vec{e}_1 + \psi_2\vec{e}_2 + \psi_3\vec{e}_3$, $\vec{\phi} = \phi_1\vec{e}_1 + \phi_2\vec{e}_2 + \phi_3\vec{e}_3$, $\phi_1 = \psi_{23}$, $\phi_2 = \psi_{31}$, $\phi_3 = \psi_{12}$. Временная компонента $\psi_0 = i\phi$ 4-вектора ψ_{μ} совместно с ψ составляют пару трехмерных скаляров. Согласно /1/ ψ, ϕ, $\vec{\psi}$, $\vec{\phi}$ удовлетворяют уравнениям

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} + eA_0\psi = ic\vec{P}\vec{\phi} + mc^2\phi,$$

$$i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t} + eA_0\phi = ic\vec{P}\vec{\psi} + mc^2\psi, \qquad /2/$$

$$i\hbar\frac{\partial\vec{\psi}}{\partial t} + eA_0\vec{\psi} = -ic(\vec{P}\times\vec{\psi}) - ic\vec{P}\phi - mc^2\vec{\phi},$$

$$i\hbar\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial t} + eA_0\vec{\phi} = ic(\vec{P}\times\vec{\phi}) - ic\vec{P}\psi - mc^2\vec{\psi},$$

где $\vec{P} = -i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\vec{A}$. Исключив из /2/ ψ, $\vec{\phi}$, получим уравнения второго порядка, которым подчиняются ϕ и $\vec{\psi}$:

$$\{(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + eA_0)^2 - c^2\vec{P}^2 - m^2c^4\}\phi = -e\hbar c(\vec{E} - i\vec{H})\vec{\psi},$$

$$\{(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + eA_0)^2 - c^2\vec{P}^2 - m^2c^4\}\vec{\psi} = e\hbar c\{(\vec{E} - i\vec{H})\phi + (\vec{E} - i\vec{H})\times\vec{\psi}\},$$

/3/

где $\vec{E}$ и $\vec{H}$ - векторы электрического и магнитного полей. В нерелятивистском приближении ϕ и $\vec{\psi}$ подчиняются уравнениям

$$i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{1}{2m}\vec{P}^2\phi - eA_0\phi + \frac{ie\hbar}{2mc}\vec{H}\vec{\psi},$$

$$i\hbar\frac{\partial\vec{\psi}}{\partial t} = \frac{1}{2m}\vec{P}^2\vec{\psi} - eA_0\vec{\psi} - \frac{ie\hbar}{2mc}(\vec{H}\times\vec{\psi}) - \frac{ie\hbar}{2mc}\vec{H}\phi.$$

/4/

Подчеркнем, что скаляры ψ, ϕ соответствуют синглетному состоянию дейтрона и органически входят в уравнения движения, обеспечивая релятивистскую инвариантность. Из уравнений /3/, /4/ следует, что если $\vec{\psi}$ =0, то и ϕ =0. Таким образом, дейтрон не может находиться только в синглетном состоянии.

Пусть $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ - тройка взаимно ортогональных единичных векторов. Эти векторы определяют операторы $\hat{s}_1$, $\hat{s}_2$, $\hat{s}_3$, которые каждому вектору $\vec{\psi}$ ставят в соответствие вектор $\hat{s}_k\vec{\psi} = i\hbar(\vec{e}_k \times \vec{\psi})$. Нетрудно убедиться, что $\hat{s}_1^2 + \hat{s}_2^2 + \hat{s}_3^2 = 2\hbar^2$, $\hat{s}_k\hat{s}_j - \hat{s}_j\hat{s}_k = i\hbar e_{kj\ell}\hat{s}_\ell$. Следовательно, $\hat{s}_1$, $\hat{s}_2$, $\hat{s}_3$ есть операторы спина 1. Очевидно, что $i\hbar(\vec{H}\times\vec{\psi}) = (\vec{H}\vec{s})\vec{\psi}$. Таким образом, в первом приближении дейтрон ведет себя как частица, имеющая не только заряд, но и магнитный момент $\mu_d = e\hbar/2mc$. Так как масса дейтрона $m \simeq 2m_p$, то μ_d составляет приблизительно половину ядерного магнетона.

Из уравнений /2/ и им комплексно-сопряженных следует уравнение непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi + \phi^*\phi + \vec{\psi}^*\vec{\psi} + \vec{\phi}^*\vec{\phi}] +$$

$$ic\,\mathrm{div}(\psi^*\vec{\phi} - \psi\vec{\phi}^* + \phi^*\vec{\psi} - \phi\vec{\psi}^* + \vec{\psi}^*\times\vec{\psi} + \vec{\phi}^*\times\vec{\phi}) = 0.$$

В нерелятивистском случае уравнение непрерывности имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi^*\phi + \vec{\psi}^*\vec{\psi}) + \mathrm{div}\{\frac{i\hbar}{2m}(\vec{u} + \phi\nabla\phi^* - \phi^*\nabla\phi) -$$

$$-\frac{e}{mc}\vec{A}(\phi^*\phi + \vec{\psi}^*\vec{\psi})\} = 0,$$

где $\vec{u}$ - вектор, компоненты которого равны,

$$u_k = \vec{\psi}\partial\vec{\psi}^*/\partial x_k - \vec{\psi}^*\partial\vec{\psi}/\partial x_k.$$

Применим уравнения /2/ - /4/ для описания движения дейтрона в однородном магнитном поле. В результате получаем, что существуют состояния с определенным значением энергии и собственными значениями проекции спина на направление $\vec{H}$, равными $\pm\hbar$. Уровни энергии дейтрона для этих состояний определяются выражением

$$E_n^2 = m^2c^4 + 2e\hbar Hc(n - \lambda) + p^2c^2, \qquad /5/$$

где $n = 1,2,3, \ldots$, p - импульс дейтрона вдоль направления магнитного поля, $\lambda = \pm 1$. Квантовых уровней для состояния с собственным значением проекций спина, равным нулю, не существует. Состояние с определенным значением энергии представляет собой в этом случае смесь синглетного состояния и состояния с нулевым собственным значением проекции спина. Уровни энергии определяются той же формулой /5/. В нерелятивистском случае уровни энергии дейтрона даются формулой

$$E_n = \frac{e\hbar H}{mc}(n - \lambda) + \frac{p^2}{2m} .$$

Обратим внимание на важную особенность уравнений движения дейтрона. Волновое уравнение не обладает инвариантностью относительно пространственной инверсии. Это дает, по-видимому, наиболее простой способ экспериментальной проверки предложенных уравнений /например, путем измерения поляризации дейтронных пучков в ускорителях или посредством измерения поляризации синхротронного излучения/.

Автор глубоко благодарен Н.А.Черникову, В.М.Сидорову, Г.Н.Афанасьеву, А.В.Матвеенко за обсуждение работы и ценные замечания.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 ноября 1978 года.