СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 11962

Г.С.Погосян, В.М.Тер-Антонян

КОЭФФИЦИЕНТЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МЕЖДУ ДЕКАРТОВЫМИ, ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ И СФЕРИЧЕСКИМИ ВОЛНОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ ИЗОТРОПНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

1978

P2 - 11962

Г.С.Погосян,* В.М.Тер-Антонян*

КОЭФФИЦИЕНТЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МЕЖДУ ДЕКАРТОВЫМИ, ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ И СФЕРИЧЕСКИМИ ВОЛНОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ ИЗОТРОПНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

* Ереванский государственный университет.

Погосян Г.С., Тер-Антонян В.М. Р2 - 11962

Коэффициенты преобразования между декартовыми, цилиндрическими и сферическими волновыми функциями изотропного осциллятора

Исследуются волновые функции изотропного осциллятора в различных системах координат с целью нахождения коэффициентов унитарных преобразований между этими функциями. Используемый асимптотический метод позволяет найти такие линейные преобразования между декартовыми, сферическими и цилиндрическими волновыми функциями трехмерного изотропного осциллятора. Показано, что коэффициенты этих преобразований совпадают с d-функциями Вигнера и обобщенными коэффициентами Клебша-Гордана.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Pogosyan G.S., Ter-Antonyan V.M. P2 - 11962

Conversion Factors for Cartesian, Polar and Cylindrical Wave Functions of Isotropic Oscillator

A derivation of the linear transformation between Cartesian, polar and cylindrical wave functions of the three dimension isotropic oscillator is presented. The coefficients of these transformations were found to be identical with Wigners d-functions and Clebsh-Gorgan coefficients.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, существует несколько потенциалов, для которых переменные в уравнении Шредингера разделяются в разных системах координат. В частности, таким свойством обладают двух- и трёхмерный изотропный осциллятор, двухмерное кулоново поле, атом водорода и однородное магнитное поле. Причиной столь обильной разделяемости являются динамические симметрии, характерные для перечисленных случаев[I-4]. Часто для разных целей удобно решать уравнение Шредингера в разных системах координат. Понятно, что в таких случаях важно иметь формулы, позволяющие переходить от одного описания к другому[5,6].

Пусть имеются две конкретные системы координат $\underline{I}$ и $\underline{II}$, в которых переменные в уравнении Шредингера с данным потенциалом разделяются, и пусть $\Psi_\alpha(I)$ и $\Psi_\beta(\underline{II})$ - два набора волновых функций, каждый из которых соответствует одному и тому же уровню энергии дискретного спектра; под α и β будем понимать полные наборы физических величин, соответствующих этим состояниям. Волновые функции $\Psi_\alpha(I)$ и $\Psi_\beta(\underline{II})$ с равным успехом описывают систему и потому должны быть связаны унитарным преобразованием. Запишем это преобразование в виде

$$\Psi_\alpha(I) = \sum_\beta S_{\beta\alpha}\Psi_\beta(\underline{II}). \qquad (I)$$

Вид коэффициентов $S_{\beta\alpha}$ для атома водорода (речь идёт о переходе от сферических координат к параболическим) был получен в работах [7,8]. Позже было показано [9], что эту задачу гораздо проще решить, если в соотношении (I) перейти к пределу $\rho_i \to \infty$, где ρ_i - размерные координаты. В настоящей статье вычисляются коэффициенты преобразования (I) в случае трёхмерного изотропного осциллятора для всех возможных переходов между декартовыми, цилиндрическими и сферическими волновыми функциями.

§I. ПЕРЕХОД ОТ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ К СФЕРИЧЕСКИМ

Рассмотрим уравнение Шредингера для изотропного осциллятора $U = \frac{m\omega^2 r^2}{2}$ в цилиндрической и сферической системах координат. Если ввести параметр $\alpha = (m\omega/\hbar)^{1/2}$, имеющий размерность обратной длины, то после разделения в системах координат нормированные волновые функции можно представить в виде

$$\Psi_{nn_3M}(\rho, z, \varphi) = A_{nn_3M}\, \rho^{|M|} e^{-\frac{\alpha^2}{2}(\rho^2+z^2)} H_{n_3}(\alpha z) F\left(-\frac{n-|M|-n_3}{2}; |M|+1; \alpha^2\rho^2\right) e^{iM\varphi}, \qquad (2а)$$

$$\Psi_{nlM}(r, \theta, \varphi) = B_{nl}\, r^l e^{-\frac{\alpha^2 r^2}{2}} Y_{lM}(\theta, \varphi) F\left(-\frac{n-l}{2}; l+\frac{3}{2}; \alpha^2 r^2\right), \qquad (2б)$$

где $H_{n_3}(\alpha z)$ –полиномы Эрмита, F –вырожденная гипергеометрическая функция, l –орбитальный момент, M –проекция орбитального момента на ось z, n_3 –целое неотрицательное число, определяющее движение частицы вдоль оси z, $n \geq 0$ и задаёт спектр энергий

$$E_n = \hbar\omega(n + 3/2). \qquad (2с)$$

Нормировочные постоянные A_{nn_3M} и B_{nl} выражаются через параметр α и квантовые числа n, n_3, M и l следующим образом:

$$A_{nn_3M} = \left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{1/4} \frac{\alpha^{|M|+1}}{(|M|)!} \sqrt{\frac{\left(\frac{n+|M|-n_3}{2}\right)!}{2^{n_3}\pi(n_3!)\left(\frac{n+|M|-n_3}{2}\right)!}},$$

$$B_{nl} = \left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{1/4} \frac{2\alpha^{l+1}}{(2l+1)!!} \sqrt{\frac{2^l(n+l+1)!!}{(n-l)!!}}.$$

Волновые функции (2а) и (2б) соответствуют одному вырожденному уровню энергии (2с) и, следовательно, должны быть связаны унитарным преобразованием типа (I):

$$\Psi_{nn_3M}(\rho, z, \varphi) = \sum_{l=|M|, |M|+1}^{n} W_{nn_3}^{lM}\, \Psi_{nlM}(r, \theta, \varphi). \qquad (3)$$

Нижний предел в сумме по l выбирается равным $|M|$ или $|M|+1$ в зависимости от того, чётно или нечётно n_3, а чётности квантовых чисел n и l одинаковы. В выбранных нами системах размерными координатами являются ρ, z и r, причём $r = \sqrt{\rho^2+z^2}$. Перейдём в обоих частях преобразования (3) к пределу $\rho \to \infty$, $z \to \infty$. Полиномы H и F при этом могут быть заменены своими максимальными степенями:

$$H_N(x) \xrightarrow{x\to\infty} (2x)^N,$$

$$F(-N; a; x) \xrightarrow{x\to\infty} \frac{(-x)^N}{a(a+1)\ldots(a+N-1)},$$

а волновые функции (2а) и (2б) – выражениями

$$\Psi_{nn_3M}(\rho, z, \varphi) \xrightarrow{\rho, z\to\infty} (-1)^{\frac{n-|M|-n_3}{2}} \left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{2^{n_3}}{n_3!}} \frac{\alpha^{n+1}\rho^{n-n_3} z^{n_3} e^{-\frac{\alpha^2}{2}(\rho^2+z^2)}}{\sqrt{\pi\left(\frac{n-|M|-n_3}{2}\right)!\left(\frac{n+|M|-n_3}{2}\right)!}}\, e^{iM\varphi},$$

$$\Psi_{nlM}(r, \theta, \varphi) \xrightarrow{r\to\infty} (-1)^{\frac{n-l}{2}} \left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{1/4} 2\alpha^{n+1} \frac{2^{\frac{n}{2}} r^n e^{-\frac{\alpha^2 r^2}{2}}}{\sqrt{(n-l)!!(n+l+1)!!}}\, Y_{lM}(\theta, \varphi).$$

Выход на асимптотику $\rho \to \infty$, $z \to \infty$ оправдан тем обстоятельством, что при этом (3) переходит в соотношение, связывающее между собой функции всего одной переменной θ :

$$(-1)^{\frac{n-|\mu|-n_3}{2}} \frac{(\cos\theta)^{n_3}(\sin\theta)^{n-n_3} e^{i\mu\varphi}}{\sqrt{2\pi\, n_3!\,(n-|\mu|-n_3)!!\,(n+|\mu|-n_3)!!}} = \sum_{\ell} W^{\ell\mu}_{nn_3} \frac{(-1)^{\frac{n-\ell}{2}} \sqrt{2}\, Y_{\ell\mu}(\theta,\varphi)}{\sqrt{(n-\ell)!!\,(n+\ell+1)!!}} .$$

Умножим это равенство с обеих сторон на $Y^*_{\ell\mu}(\theta,\varphi)$ и проинтегрируем по телесному углу. В области интегрирования по θ имеются точки, в которых $\cos\theta$ обращается в нуль, так что нельзя пользоваться асимптотикой полиномов Эрмита. Эти точки, однако, можно выделить с некоторыми окрестностями, а в оставшихся областях волновую функцию (2а) заменить её асимптотикой. Так как полиномы $H_{n_3}(\alpha z)$ особенностей не имеют, то при дальнейшем сужении "опасных" областей их вклады в интеграл могут быть сделаны сколь угодно малыми, так что коэффициенты преобразования (3) запишутся в виде

$$W^{\ell\mu}_{nn_3} = (-1)^{\frac{\ell-|\mu|-n_3}{2}} \sqrt{\frac{(n-\ell)!!\,(n+\ell+1)!!}{2(n_3!)\,(n-|\mu|-n_3)!!\,(n+|\mu|-n_3)!!}} \cdot \tag{4}$$

$$\cdot \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\mu\varphi}}{\sqrt{2\pi}} (\sin\theta)^{n-n_3} (\cos\theta)^{n_3} Y^*_{\ell\mu}(\theta,\varphi) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi .$$

§2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ $W^{\ell\mu}_{nn_3}$ В ВИДЕ АНИЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ КЛЕБША – ГОРДАНА НА ЧЕТВЕРТЬЦЕЛЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

В последнем интеграле следует различать случаи чётных и нечётных n_3 . При чётных n_3 разность $\ell-\mu$ также чётна и можно воспользоваться следующим представлением сферической функции $Y_{\ell\mu}(\theta,\varphi)$ в виде гипергеометрического ряда от $\sin^2\theta$ [10]:

$$Y_{\ell\mu}(\theta,\varphi) = \xi_{\mu 0} \frac{e^{i\mu\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2\ell+1}{2} \frac{(\ell+|\mu|)!}{(\ell-|\mu|)!}} \frac{(\sin\theta)^{|\mu|}}{2^{|\mu|}(|\mu|)!} F\left(-\frac{\ell-|\mu|}{2}, \frac{\ell+|\mu|+1}{2}; |\mu|+1; \sin^2\theta\right) . \tag{5}$$

Здесь $\xi_{\mu 0}$ определено так, что

$$\xi_{\mu 0} = \begin{cases} (-1)^{\mu} & , \mu > 0 , \\ 1 & , \mu \le 0 . \end{cases}$$

Подставляя последнюю формулу в (4), убеждаемся, что коэффициенты $W^{\ell\mu}_{nn_3}$ можно записать следующим образом:

$$W^{\ell\mu}_{nn_3} = \frac{(-1)^{\frac{\ell-|\mu|-n_3}{2}} \xi_{\mu 0}}{2^{|\mu|}(|\mu|)!} \sqrt{\frac{(2\ell+1)\,(\ell+|\mu|)!\,(n-\ell)!!\,(n+\ell+1)!!}{4\,(\ell-|\mu|)!\,n_3!\,(n-|\mu|-n_3)!!\,(n+|\mu|-n_3)!!}}\ J^{\ell\mu}_{nn_3} , \tag{6}$$

где величина $J^{\ell\mu}_{nn_3}$ определяется интегралом

$$J^{\ell\mu}_{nn_3} = \int_0^{\pi} (\sin\theta)^{n+|\mu|-n_3} (\cos\theta)^{n_3} F\left(-\frac{\ell-|\mu|}{2}, \frac{\ell+|\mu|+1}{2}; |\mu|+1; \sin^2\theta\right) \sin\theta\, d\theta .$$

Разобьём область интегрирования на подобласти $(0, \pi/2)$, $(\pi/2, \pi)$ и перейдём во второй подобласти к переменной $\theta + \pi/2$. В результате $J^{\ell\mu}_{nn_3}$ представится в виде интеграла по области $(\theta, \pi/2)$, и после простых операций получим

$$J^{\ell\mu}_{nn_3} = (2)^{-\frac{n+|\mu|+1}{2}} \int_{-1}^{1} (1+x)^{\frac{n+|\mu|-n_3}{2}} (1-x)^{\frac{n_3-1}{2}} F\left(-\frac{\ell-|\mu|}{2}, \frac{\ell+|\mu|+1}{2}; |\mu|+1; \frac{1+x}{2}\right) dx .$$

Величина $\frac{\ell-|\mu|}{2}$ при чётных n_3 равна целому неотрицательному числу, и потому подынтегральная гипергеометрическая функция сводится к полиному, а именно:

$$F(-n, \beta; \gamma; z) = \frac{z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma+n-\beta}}{\gamma(\gamma+1)\ldots\ldots(\gamma+n-1)} \frac{d^n}{dz^n}\left[(1-z)^{\beta-\gamma} z^{\gamma+n-1}\right].$$

Подставляя это в выражение для $J^{\ell\mu}_{nn_3}$:

$$\mathcal{J}^{\ell M}_{nn_3} = \frac{2^{-\frac{n+|M|+1}{2}}(|M|)!}{\left(\frac{\ell+|M|}{2}\right)!}\int_{-1}^{1}(1+x)^{\frac{n-|M|-n_3}{2}}(1-x)^{\frac{n_3}{2}}\frac{d^{\frac{\ell-|M|}{2}}}{dx^{\frac{\ell-|M|}{2}}}\left[(1-x)^{\frac{\ell-|M|+1}{2}}(1+x)^{\frac{\ell+|M|}{2}}\right]dx\,,$$

имеем

$$W^{\ell M}_{nn_3} = \xi_{M0} R^{\ell M}_{nn_3}\,, \tag{7а}$$

где $R^{\ell M}_{nn_3}$ – это следующий интеграл:

$$R^{\ell M}_{nn_3} = (-1)^{\frac{\ell-|M|-n_3}{2}}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4}\frac{(\ell+|M|)!}{(\ell-|M|)!}\frac{(n-\ell)!!\,(n+\ell+1)!!}{n_3!\,(n-|M|-n_3)!!\,(n+|M|-n_3)!!}}\;\cdot$$

$$\cdot\frac{2^{-|M|-\frac{n+\ell-1}{2}}}{\left(\frac{\ell+|M|}{2}\right)!}\int_{-1}^{1}(1+x)^{\frac{n-|M|-n_3}{2}}(1-x)^{\frac{n_3}{2}}\frac{d^{\frac{\ell-|M|}{2}}}{dx^{\frac{\ell-|M|}{2}}}\left[(1-x)^{\frac{\ell-|M|-1}{2}}(1+x)^{\frac{\ell+|M|}{2}}\right]dx\,. \tag{7б}$$

Сравним полученный результат с известным интегральным представлением для коэффициентов Клебша – Гордана, приведённом, например, в монографии [10]:

$$C^{c\gamma}_{a\alpha,b\beta} = \frac{(-1)^{a-c+\beta}}{2^{\mathcal{J}+1}}\sqrt{\frac{(c+\gamma)!\,(\mathcal{J}-2c)!\,(\mathcal{J}+1)!\,(2c+1)}{(a-\alpha)!\,(a+\alpha)!\,(b-\beta)!\,(b+\beta)!\,(c-\gamma)!\,(\mathcal{J}-2a)!\,(\mathcal{J}-2b)!}}\;\cdot$$

$$\cdot\int_{-1}^{1}(1-x)^{a-\alpha}(1+x)^{b-\beta}\frac{d^{c-\gamma}}{dx^{c-\gamma}}\left[(1-x)^{\mathcal{J}-2a}(1+x)^{\mathcal{J}-2b}\right]dx\,. \tag{8}$$

Здесь $\mathcal{J}=a+b+c$. Легко убедиться, что интегралы в (7б) и (8) совпадают, если выполняются равенства

$$c=\frac{2\ell-1}{4}\,,\quad a=\frac{n+|M|}{4}\,,\quad b=\frac{n-|M|+1}{4}\,,$$

$$\gamma=\frac{2|M|-1}{4}\,,\quad \alpha=\frac{n+|M|-2n_3}{4}\,,\quad \beta=\frac{2n_3+|M|-n-1}{4}\,. \tag{9}$$

Подставляя полученные значения параметров c , a , b и т.д. в интегральное представление (8) и пользуясь соотношением

$$2^n\Gamma\left(n+\tfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,(2n-1)!!\,,$$

после некоторых вычислений приходим к выводу, что совпадают не только интегралы, но определяемые ими выражения (7б) и (8). В результате преобразование (3) при чётных n_3 принимает вид

$$\Psi_{nn_3M}(\rho,z,\varphi)=\xi_{M0}\sum_{\ell=|M|}^{n} C^{\frac{2\ell-1}{4},\,\frac{2|M|-1}{4}}_{\frac{n+|M|}{4},\,\frac{n+|M|-2n_3}{4};\,\frac{n-|M|+1}{4},\,\frac{2n_3+|M|-n-1}{4}}\Psi_{n\ell M}(r,\theta,\varphi)\,. \tag{10}$$

При выводе связи (3) для нечётных n_3 вместо (5) и (8) следует пользоваться соотношениями [10]:

$$Y_{\ell M}(\theta,\varphi)=\xi_{M0}\cdot\frac{e^{iM\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2\ell+1}{2}\frac{(\ell+|M|)!}{(\ell-|M|)!}}\;\frac{(\sin\theta)^{|M|}\cos\theta}{2^{|M|}(|M|)!}\;\cdot$$

$$\cdot F\left(-\frac{\ell-|M|-1}{2},\;\frac{\ell+|M|+2}{2};\,|M|+1;\,\sin^2\theta\right),$$

$$C^{c\gamma}_{a\alpha,b\beta}=\frac{(-1)^{a-c+\beta}}{2^{\mathcal{J}+1}}\sqrt{\frac{(2c+1)(\mathcal{J}-2b)!\,(\mathcal{J}-2c)!\,(\mathcal{J}+1)!}{(a-\alpha)!\,(a+\alpha)!\,(b-\beta)!\,(b+\beta)!\,(c-\gamma)!\,(c+\gamma)!\,(\mathcal{J}-2a)!}}\;\cdot$$

$$\cdot\int_{-1}^{1}(1-x)^{b+\beta}(1+x)^{b-\beta}\frac{d^{\mathcal{J}-2a}}{dx^{\mathcal{J}-2a}}\left[(1-x)^{c-\gamma}(1+x)^{c+\gamma}\right]dx\,.$$

Тогда вычисления, аналогичные приведённым выше, убеждают, что формула (10) остаётся в силе за единственным исключением: суммирование по ℓ начинается не с $|M|$, а с $|M|+1$. Таким образом, коэффициенты преобразования (3) с точностью до фазового множителя совпадают с результатом аналитического продолжения коэффициентов Клебша – Гордана на четвертьцелые значения момента.

§3. КОЭФФИЦИЕНТЫ $W_{nn_3}^{l\mu}$ И КОНКРЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ СВЯЗИ ДЛЯ НИЗШИХ КВАНТОВЫХ ЧИСЕЛ

Для вычисления коэффициентов $W_{nn_3}^{l\mu}$ удобно воспользоваться формулой [10], выражающей коэффициенты Клебша – Гордана через обобщённые гипергеометрические функции ${}_3F_2$ от аргумента 1:

$$C_{a\alpha,b\beta}^{c\gamma} = \delta_{\gamma,\alpha+\beta}\frac{\Delta(abc)}{(a+b-c)!(c-b+\alpha)!(c-a-\beta)!}\sqrt{\frac{(a+\alpha)!(b+\beta)!(c+\gamma)!(2c+1)}{(a-\alpha)!(b+\beta)!}}\,\cdot$$

$$\cdot\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}-a-b+c\,,\ -a+\alpha\,,\ -b-\beta\\ -a+c-\beta+1\,,\ -b+c+\alpha+1\end{matrix}\Big/ 1\right].$$

Входящий в эту формулу Δ – символ имеет вид

$$\Delta(abc) = \sqrt{\frac{(a+b-c)!(a-b+c)!(b-a+c)!}{(a+b+c+1)}}.$$

Подставляя сюда значения параметров (6), после некоторых вычислений получим

$$R_{nn_3}^{l\mu} = \sqrt{\frac{(l+|\mu|)!(l-|\mu|)!(n-|\mu|-n_3)!(n+|\mu|-n_3)!(2l+1)}{n_3!(n-l)!!(n+l+1)!!}}\,\cdot \tag{II}$$

$$\cdot\,\frac{2^{n_3-l}}{\Gamma\left(\frac{l+|\mu|-n_3}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{l-|\mu|-n_3}{2}+1\right)}\,{}_3F_2\left(-\frac{n-l}{2},-\frac{n_3}{2},-\frac{n_3-1}{2};\frac{l+|\mu|-n_3}{2}+1,\frac{l-|\mu|-n_3}{2}+1;1\right).$$

Этот результат нами использован для вычисления значений коэффициентов $W_{nn_3}^{l\mu}$, соответствующих низшим квантовым числам (см. таблицы

1–6, приведённые в конце работы). Подставляя табличные значения коэффициентов $W_{nn_3}^{l\mu}$ в соотношение (3), легко установить конкретные формулы связи. Ниже цилиндрические и сферические волновые функции обозначены символами $\|nn_3\mu\rangle$ и $|nl\mu\rangle$ соответственно.

$$\|000\rangle = |000\rangle$$

$$\|101\rangle = |111\rangle$$
$$\|110\rangle = |110\rangle$$

$$\|200\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|200\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|220\rangle$$
$$\|220\rangle = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|220\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|200\rangle$$
$$\|211\rangle = -|221\rangle$$
$$\|202\rangle = -|222\rangle$$

$$\|301\rangle = -\frac{2}{\sqrt{5}}|311\rangle - \frac{1}{\sqrt{5}}|331\rangle$$
$$\|303\rangle = -|333\rangle$$
$$\|310\rangle = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}|310\rangle + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}|330\rangle$$
$$\|312\rangle = |332\rangle$$
$$\|330\rangle = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}|310\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}|330\rangle$$
$$\|321\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}|311\rangle - \frac{2}{\sqrt{5}}|331\rangle$$

$$\|402\rangle = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}|422\rangle + \frac{1}{\sqrt{7}}|442\rangle$$
$$\|404\rangle = |441\rangle$$
$$\|400\rangle = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{15}}|400\rangle + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{21}}|420\rangle + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{35}}|440\rangle$$
$$\|413\rangle = -|443\rangle$$
$$\|411\rangle = -\frac{2}{\sqrt{7}}|421\rangle - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}|441\rangle$$

$$\|422\rangle = -\frac{1}{\sqrt{7}}|422\rangle + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}|442\rangle$$

$$\|420\rangle = -\frac{2}{\sqrt{15}}|400\rangle + \frac{1}{\sqrt{21}}|420\rangle + \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{35}}|400\rangle$$

$$\|431\rangle = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}|421\rangle - \frac{2}{\sqrt{7}}|441\rangle$$

$$\|440\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}|400\rangle - \frac{2}{\sqrt{7}}|420\rangle + \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{35}}|440\rangle$$

$$\|503\rangle = -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{9}}|533\rangle - \frac{1}{3}|553\rangle$$

$$\|510\rangle = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{35}}|510\rangle + \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{15}}|530\rangle + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{21}}|500\rangle$$

$$\|512\rangle = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|532\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|552\rangle$$

$$\|521\rangle = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{35}}|511\rangle - \frac{1}{\sqrt{5}}|531\rangle - \frac{2}{\sqrt{7}}|551\rangle$$

$$\|523\rangle = \frac{1}{3}|533\rangle - \frac{4}{\sqrt{18}}|553\rangle$$

$$\|532\rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}}|532\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|552\rangle$$

$$\|514\rangle = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{35}}|511\rangle + \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{15}}|531\rangle - \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{21}}|551\rangle$$

$$\|550\rangle = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}|510\rangle - \frac{2}{3}|530\rangle + \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{63}}|550\rangle$$

$$\|530\rangle = -\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{35}}|510\rangle - \frac{1}{\sqrt{45}}|530\rangle + \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{63}}|550\rangle$$

$$\|501\rangle = -\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{35}}|511\rangle - \frac{2}{\sqrt{15}}|531\rangle - \frac{1}{\sqrt{21}}|551\rangle$$

$$\|505\rangle = -|555\rangle$$

$$\|514\rangle = |554\rangle$$

§4. ПЕРЕХОДЫ ОТ ДЕКАРТОВЫХ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ К ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ И СФЕРИЧЕСКИМ

Рассмотрим теперь переход от декартовых волновых функций к цилиндрическим и сферическим. Очевидно, в декартовых координатах

$$\Psi_{n_1 n_2 n_3}(x,y,z) = \left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{3/4} \frac{e^{-\frac{\alpha^2}{2}(x^2+y^2+z^2)} H_{n_1}(\alpha x) H_{n_2}(\alpha y) H_{n_3}(\alpha z)}{\sqrt{2^{n_1+n_2+n_3}\, n_1!\, n_2!\, n_3!}},$$

где параметр α был определён выше. Преобразование (I) в данном случае можно записать в виде

$$\Psi_{n_1 n_2 n_3}(x,y,z) = \sum_{M} C^{nMn_3}_{n_1 n_2 n_3} \Psi_{n n_3 M}(\rho, z, \varphi). \tag{I2}$$

При больших x, y, z

$$\Psi_{n_1 n_2 n_3}(x,y,z) \longrightarrow \left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{1/4} \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2^{n+1}}{n_1!\, n_2!\, n_3!}}\; x^{n_1} y^{n_2} z^{n_3} e^{-\frac{\alpha^2}{2}(x^2+y^2+z^2)}$$

и, если учесть полученную ранее асимптотику функции $\Psi_{n n_3 M}$, то вместо (I2) можно записать

$$\sqrt{\frac{2^{n_1+n_2}}{n_1!\, n_2!}} (\cos\varphi)^{n_1} (\sin\varphi)^{n_2} = \sum_{M} C^{nMn_3}_{n_1 n_2 n_3} \frac{(-1)^{\frac{n-|M|-n_3}{2}} e^{iM\varphi}}{\sqrt{\left(\frac{n-|M|-n_3}{2}\right)!\left(\frac{n+|M|-n_3}{2}\right)!}}.$$

Отсюда

$$C^{nMn_3}_{n_1 n_2 n_3} = (-1)^{\frac{n_1+n_2-|M|}{2}} \sqrt{\frac{\left(\frac{n-|M|-n_3}{2}\right)!\left(\frac{n+|M|-n_3}{2}\right)!}{n_1!\, n_2!}} \cdot \mathcal{J}, \tag{I3}$$

где

$$\mathcal{J} = \int_0^{2\pi} (\cos\varphi)^{n_1} (\sin\varphi)^{n_2} \frac{e^{-iM\varphi}}{2\pi} d\varphi\,;$$

этот интеграл вычисляется элементарно и равен

$$J = \frac{(i)^{n_1-n_2}}{2^{n_1+n_2}} \sum_{\mu=0}^{M} (-1)^{\mu} \binom{n_1}{\mu} \binom{n_2}{\frac{n_3-n_1+M}{2}-\mu}.$$

Сравнивая полученный результат с известным представлением для d-функции Вигнера[10]

$$d^{J}_{MM'}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{(-1)^{M-M'}}{2^{J}} \sqrt{\frac{(J+M)!\,(J-M)!}{(J+M')!\,(J-M')!}} \sum_{k} (-1)^{k} \binom{J+M'}{k} \binom{J-M'}{k+M-M'},$$

приходим к выводу, что

$$C^{nMn_3}_{n_1n_2n_3} = (-1)^{\frac{n-M-n_2}{2}}\, i^{n_2}\, d^{\frac{n_1+n_2}{2}}_{\frac{M}{2},\,\frac{n_1-n_2}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right). \qquad (14)$$

Коэффициенты преобразования от декартовых координат к сферическим вычисляются аналогично. Как оказывается, этот переход эквивалентен последовательному переходу от декартовых координат к цилиндрическим и далее от цилиндрических координат к сферическим. Окончательный вид преобразования такой:

$$\Psi_{n_1n_2n_3}(x,y,z) = i^{n_2} \sum_{\ell,M} \xi_{M0} (-1)^{\frac{n_1+n_2-|M|}{2}} d^{\frac{n_1+n_2}{2}}_{\frac{M}{2},\,\frac{n_1-n_2}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot$$

$$\cdot\, C^{\frac{2\ell-1}{4},\,\frac{2|M|-1}{4}}_{\frac{n+|M|}{4},\,\frac{n+|M|-2n_3}{4};\,\frac{n-|M|+1}{4},\,\frac{2n_3+|M|-n-1}{4}}\; \Psi_{n\ell M}(r,\theta,\varphi).$$

Переход от декартовых координат к цилиндрическим затрагивает только переменные в плоскости xy, и поэтому здесь мы имеем дело с двумерной задачей. Соответственно коэффициенты (14) совпадают с коэффициентами преобразования декартовых волновых функций кругового осциллятора в полярные[11]. Отметим, что d - функции от аргумента $\pi/2$

возникают также в соответствующей задаче с двухмерным кулоновым полем[12]. В случае кругового осциллятора и двухмерного кулонова поля вид d служит указанием на соответствующие группы динамической симметрии и позволяет определить их генераторы[12,13].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Существует ряд квантовомеханических систем, гамильтониан которых инвариантен относительно группы преобразований более широкой, чем чисто геометрическая. О таких системах, следуя Вигнеру[14], принято говорить, что они обладают геометрической симметрией. Характерной особенностью систем с динамической симметрией является повышенная степень разделяемости переменных в уравнении Шредингера. В результате один и тот же вырожденный уровень энергии описывается различными наборами волновых функций, между которыми должно существовать унитарное соответствие. Коэффициенты таких унитарных преобразований (трансформационные коэффициенты) для двух - и трёхмерного кулонова поля и кругового осциллятора были вычислены в работах[7,8,11,12]. В настоящей работе получены трансформационные коэффициенты для преобразований цилиндрических волновых функций изотропного осциллятора в сферические и декартовые. Показано, что трансформационные коэффициенты, связывающие между собой цилиндрические и сферические волновые функции, представляют из себя результат аналитического продолжения коэффициентов Клебша - Гордана на четвертьцелые значения момента. Такие объекты встречаются также в некоторых задачах теории моментов[6,15].

Мы искренне признательны А.В.Матвиенко, Р.М.Мир-Касимову, Л.И.Пономареву, А.Н.Сисакяну, Я.А.Смородинскому и Г.Т.Торосяну за плодотворные обсуждения.

Таблицы 1-2

a	α	b	β	$C^{-1/4,\ \alpha+\beta}_{a\alpha,\ b\beta}$	n	$\|m\|$	n_3
0	0	-1/4	-1/4	1	0	0	0
1/2	-1/2	1/4	1/4	$-1/\sqrt{3}$	2	0	2
1/2	1/2	1/4	-3/4	$\sqrt{2}/\sqrt{3}$	2	0	0
1	1	3/4	-5/4	$2\sqrt{2}/\sqrt{15}$	4	0	0
1	0	3/4	-1/4	$-2/\sqrt{15}$	4	0	2
1	-1	3/4	3/4	$1/\sqrt{5}$	4	0	4

a	α	b	β	$C^{1/4,\ \alpha+\beta}_{a\alpha,\ b\beta}$	n	$\|m\|$	n_3
1/4	-1/4	0	0	1	1	0	1
1/2	1/2	-1/4	-1/4	1	1	1	0
3/4	-3/4	1/2	1/2	$-\sqrt{3}/\sqrt{5}$	3	0	3
3/4	1/4	1/2	-1/2	$\sqrt{2}/\sqrt{5}$	3	0	1
1	0	1/4	1/4	$-1/\sqrt{5}$	3	1	2
1	1	1/4	-3/4	$2/\sqrt{5}$	3	1	0
5/4	-5/4	1	1	$\sqrt{3}/\sqrt{7}$	5	0	5
5/4	-1/4	1	0	$-2\sqrt{3}/\sqrt{35}$	5	0	3
5/4	3/4	1	-1	$2\sqrt{2}/\sqrt{35}$	5	0	1
3/2	-1/2	3/4	3/4	$\sqrt{3}/\sqrt{35}$	5	1	4
3/2	1/2	3/4	-1/4	$-2\sqrt{2}/\sqrt{35}$	5	1	2
3/2	3/2	3/4	-5/4	$2\sqrt{6}/\sqrt{35}$	5	1	0

Таблица 3

a	α	b	β	$C^{3/4,\ \alpha+\beta}_{a\alpha,\ b\beta}$	n	$\|m\|$	n_3
1/2	-1/2	1/4	1/4	$\sqrt{2}/\sqrt{3}$	2	0	2
1/2	1/2	1/4	-3/4	$1/\sqrt{3}$	2	0	0
3/4	1/4	0	0	1	2	1	1
1	-1	3/4	3/4	$-2/\sqrt{7}$	4	0	4
1	0	3/4	-1/4	$1/\sqrt{21}$	4	0	2
1	1	-1/4	-1/4	1	2	2	0
1	1	3/4	-5/4	$2\sqrt{2}/\sqrt{21}$	4	0	0
5/4	-1/4	1/2	1/2	$-\sqrt{3}/\sqrt{7}$	4	1	2
5/4	3/4	1/2	-1/2	$2/\sqrt{7}$	4	1	1
3/2	1/2	1/4	1/4	$-1/\sqrt{7}$	4	2	2
3/2	3/2	1/4	-3/4	$\sqrt{6}/\sqrt{7}$	4	2	0

Таблица 4

a	α	b	β	$C^{5/4,\,\alpha+\beta}_{a\alpha,\,b\beta}$	n	$\lvert m\rvert$	n_3
3/4	-3/4	1/2	1/2	$\sqrt{2}/\sqrt{5}$	3	0	3
3/4	1/4	1/2	-1/2	$\sqrt{3}/\sqrt{5}$	3	0	1
1	0	1/4	1/4	$2/\sqrt{5}$	3	0	3
1	1	1/4	-3/4	$1/\sqrt{5}$	3	1	0
5/4	-5/4	1	1	$-2/3$	5	0	5
5/4	-1/4	1	0	$-1/3\sqrt{5}$	5	0	3
5/4	3/4	0	0	1	3	2	1
5/4	3/4	1	-1	$2\sqrt{2}/\sqrt{15}$	5	0	1
3/2	-1/2	3/4	3/4	$-2\sqrt{2}/\sqrt{15}$	5	1	4
3/2	1/2	3/4	-1/4	$1/\sqrt{5}$	5	1	2
3/2	3/2	-1/4	-1/4	1	3	3	0
3/2	3/2	3/4	-5/4	$2/\sqrt{15}$	5	1	0
7/4	1/4	1/2	1/2	$-1/\sqrt{3}$	5	2	3
7/4	5/4	1/2	-1/2	$\sqrt{2}/\sqrt{3}$	5	2	1
2	1	1/4	1/4	$-1/3$	5	3	2
2	2	1/4	-3/4	$2\sqrt{2}/3$	5	3	0

Таблицы 5-6

a	α	b	β	$C^{7/4,\,\alpha+\beta}_{a\alpha,\,b\beta}$	n	$\lvert m\rvert$	n_3
1	-1	3/4	3/4	$2\sqrt{2}/\sqrt{35}$	4	0	4
1	0	3/4	-1/4	$2\sqrt{6}/\sqrt{35}$	4	0	2
1	1	3/4	-5/4	$\sqrt{3}/\sqrt{35}$	4	0	0
5/4	-1/4	1/2	1/2	$2/\sqrt{7}$	4	1	2
5/4	3/4	1/2	-1/2	$\sqrt{3}/\sqrt{7}$	4	1	1
3/2	1/2	1/4	1/4	$\sqrt{6}/\sqrt{7}$	4	2	2
3/2	3/2	1/4	-3/4	$1/\sqrt{7}$	4	2	0
7/4	5/4	0	0	1	4	3	1
2	2	-1/4	-1/4	1	4	4	0

a	α	b	β	$C^{9/4,\,\alpha+\beta}_{a\alpha,\,b\beta}$	n	$\lvert m\rvert$	n_3
5/4	-5/4	1	1	$2\sqrt{2}/3\sqrt{7}$	5	0	5
5/4	-1/4	1	0	$2\sqrt{10}/3\sqrt{7}$	5	0	3
5/4	3/4	1	-1	$\sqrt{5}/\sqrt{21}$	5	0	1
3/2	-1/2	3/4	3/4	$2\sqrt{2}/\sqrt{21}$	5	1	4
3/2	1/2	3/4	-1/4	$2/\sqrt{7}$	5	1	2
3/2	3/2	3/4	-5/4	$1/\sqrt{21}$	5	1	0
7/4	1/4	1/2	1/2	$\sqrt{2}/\sqrt{3}$	5	2	3
7/4	5/4	1/2	-1/2	$1/\sqrt{3}$	5	2	1
2	1	1/4	1/4	$2\sqrt{2}/3$	5	3	2
2	2	1/4	-3/4	$1/3$	5	3	0
9/4	7/4	0	0	1	5	4	1
5/2	5/2	-1/4	-1/4	1	5	5	0

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. В.С.Попов. В сб. "Физика высоких энергий и теория элементарных частиц", стр.702, "Наукова думка", Киев, 1967.

2. И.Т.Тодоров. В сб. "Физика высоких энергий и теория элементарных частиц", стр.237, "Наукова думка", Киев, 1967.

3. С.П.Аллилуев, А.В.Матвиенко. В сб. "Физика высоких энергий и теория элементарных частиц", стр.695, "Наукова думка", Киев, 1967.

4. Э.Б.Аронсон, И.А.Малкин, В.И.Манько. ЭЧАЯ, т.5, вып.I, Атомиздат, Москва, 1974.

5. И.В.Комаров, Л.И.Понамарёв, С.Ю.Славянов. Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции, "Наука", Москва, 1976.

6. Ю.Ф.Смирнов, К.В.Щитикова. ЭЧАЯ, т.8, вып.4, Атомиздат, Москва, 1977.

7. D.Park. Zs. f. Phys., 159, 155, 1960.

8. C.B.Tarter. J. Math. Phys., 11, 3192, 1970.

9. М.Г.Арутюнян, Г.С.Погосян, В.М.Тер-Антонян. Изв. А Н Арм. ССР, 13, 2, 1978.

IO. Д.А.Варшалович, А.Н.Москалёв, В.К.Херсонский. Квантовая теория углового момента, "Наука", Ленинград, 1975.

II. Г.С.Погосян, В.М.Тер-Антонян, Г.Т.Торосян. Препринт, ПЛРФ-77-04, Ереван, 1977.

I2. Г.М.Арутюнян, М.Г.Арутюнян, Г.С.Погосян, В.М.Тер-Антонян. Препринт, ПЛРФ-77-IO, Ереван, 1977.

I3. Г.С.Погосян, В.М.Тер-Антонян. Изв.Ан.Арм.ССР, 13, 3, 1978.

I4. Е.Вигнер. УФН, т.83, 729, 1964.

I5. Я.А.Смородинский, Л.А.Шелепин. УФН, т.I06, вып.I, 1972.

Рукопись поступила в издательский отдел 16 октября 1978 года.