ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 11943

Ч.Д.Палев

ОБ ОДНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ А-СУПЕРСТАТИСТИКИ

1978

P2 - 11943

Ч.Д.Палев

ОБ ОДНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ А-СУПЕРСТАТИСТИКИ

Направлено в ТМФ

Палев Ч.Д. Р2 - 11943

Об одной реализации А-суперстатистики

Изучается статистика обобщенных операторов рождения и уничтожения, замыкающих специальную линейную супералгебру Ли. Пространство Фока порождается из вакуума операторами рождения, являющимися образующими грассмановой алгебры. Сформулирован принцип Паули: если порядок А-суперстатистики равен p (p=1,2,..), то в любом состоянии не может находиться более чем одна частица. Максимальное число частиц в ансамбле не превышает p.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Palev T.D. P2 - 11943

On a Certain Realization of A-Statistics

A statistics of generalized creation and annihilation operators is studied. The operators close a special linear Lie superalgebra. The Fock space is generated out of the vacuum by means of creation operators that are Grassman variables. The Pauli principle has been formulated. If the order of the A-superstatistics is p (p = 1, 2,...), in every state there can be at most one particle. The maximal number of particles in an ensemble can not exceed p.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

Суперстатистикой мы называем такую статистику вторично квантованных полей, для которой операторы рождения и уничтожения являются генераторами супер-алгебры Ли, порождающими всю алгебру. В этой терминологии обычная бозе-статистика, а также ее обобщение - парабозе-статистика являются суперстатистиками, ибо операторы рождения и уничтожения задают базис в нечетной части ортосимплектической супералгебры Ли и генерируют всю алгебру [1]. Бозе-операторы $a_1^{\pm},..., a_n^{\pm}$ задают одно определенное бесконечномерное неприводимое представление простой классической супералгебры $B(0,n)$*. Это обстоятельство навело нас на мысль попытаться удовлетворить аксиомам вторичного квантования с помощью операторов рождения и уничтожения, порождающих другую простую классическую супералгебру Ли. Само же понятие оператора рождения или уничтожения более первично. Оно определено еще до установления конкретного вида перестановочных соотношений. Исходным пунктом является уравнение Гейзенберга для операторной функции поля Ψ (x),

$$-i\frac{\partial\Psi}{\partial t}=[H,\Psi]. \qquad /1/$$

Переходя к импульсному представлению и предполагая, что поле заключено в конечном объеме, получаем [3]

$$[H,a_i^{\pm}]=\pm\epsilon_i a_i^{\pm}, \qquad /2/$$

* Мы следуем обозначениям Каца [2].

где H - гамильтониан, ϵ_i - энергия i-го одночастичного состояния; индекс i объединяет все характеристики одночастичного состояния /импульс, масса, спин и т.д./ и пробегает счетное множество 1,2,3, ... Пока еще ничего не сказано о гамильтониане, а также о коммутационных соотношениях операторов $a_i^{\pm}$. Тем не менее уже ясно, что оператор a_i^+ / a_i^- / можно интерпретировать как оператор рождения /уничтожения/ частицы с энергией ϵ_i, ибо если $\Phi(E)$ - состояние ансамбля с энергией E, то, как следует из/2/, состояние $a_i^{\pm}\Phi(E)$ имеет энергию $E \pm \epsilon_i$.

Определение. Совокупность операторов a_i^{ξ}, $i = 1,2, \ldots$, являющихся решениями уравнения /2/, будем называть операторами рождения $(\xi = +)$ и уничтожения $(\xi = -)$.

В настоящей заметке мы изучаем алгебраические свойства одной из возможных реализаций введенной в /4/ A-суперстатистики. По определению в этом случае каждая конечная совокупность $a_{i_1}^{\pm}, \ldots, a_{i_n}^{\pm}$ операторов рождения и уничтожения порождает классическую простую супералгебру Ли $A(0,n-1)$. Операторы a_i^{ξ}, $\xi = \pm$, $i=1,2, \ldots$ являются корневыми векторами, задающими базис в нечетной части алгебры. Мы называем их a -операторами.

Как указывалось в /4/, a-операторы не определены однозначно, в частности, они зависят от гамильтониана H. На примере заряженного скалярного поля в /4/ было показано, что если выбрать гамильтониан обычным образом,*

$$H = \sum_{\eta,i} \epsilon_i \{ a_{\eta i}^{+}, a_{\eta i}^{-} \}, \qquad /3/$$

где $a_{\eta i}^{\xi}$ есть оператор рождения $(\xi = +)$ или уничтожения $(\xi = -)$ частицы с зарядом η, то уравнению

*Всюду в работе $\xi, \eta, \epsilon = \pm$ или ± 1; $[x,y] = xy - yx$; $\{x,y\} = xy + yx$.

/2/ можно удовлетворить операторами, подчиняющимися структурным соотношениям

$$\begin{aligned}
&[\{a_{\xi i}^{\xi}, a_{-\xi j}^{\xi}\}, a_{\eta k}^{\eta}] = -\xi\delta_{-\xi j,\eta k}\, a_{\xi i}^{\xi},\\
&[\{a_{\xi i}^{\xi}, a_{-\xi j}^{\xi}\}, a_{-\eta k}^{\eta}] = \eta\delta_{\xi i,-\eta k}\, a_{-\xi j}^{\xi},\\
&[\{a_{\xi i}^{\xi}, a_{\xi j}^{-\xi}\}, a_{\eta k}^{\eta}] = \xi\delta_{\xi j,\eta k}\, a_{\xi i}^{\xi} - \xi\delta_{ij}\, a_{\eta k}^{\eta},\\
&[\{a_{\xi i}^{\xi}, a_{\xi j}^{-\xi}\}, a_{-\eta k}^{\eta}] = \eta\delta_{\xi i,-\eta k}\, a_{\xi j}^{-\xi} + \xi\delta_{ij}\, a_{-\eta k}^{\eta},\\
&\{a_{\xi i}^{\xi}, a_{\eta i}^{\eta}\} = \{a_{-\xi i}^{\xi}, a_{-\eta i}^{\eta}\} = 0.
\end{aligned} \qquad /4/$$

В этом случае операторы $a_{\eta 1}^{\xi}, \ldots, a_{\eta n}^{\xi}$ порождают супералгебру Ли $A(0,2n-1)$. Для низшего фоковского представления операторов /4/ принцип Паули гласит: заряд произвольного ансамбля частиц есть либо 0, либо 1.

Здесь мы рассмотрим произвольные фоковские представления подалгебры, порожденной только операторами одного знака заряда $\eta = 1$, т.е. операторами a_i^{ξ}. Они удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}
&[\{a_i^+, a_j^-\}, a_k^+] = \delta_{jk} a_i^+ - \delta_{ij} a_k^+,\\
&[\{a_i^+, a_j^-\}, a_k^-] = -\delta_{ik} a_j^- + \delta_{ij} a_k^-, \qquad /5/\\
&\{a_i^+, a_j^+\} = \{a_i^-, a_j^-\} = 0.
\end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что любые n пар этих операторов порождают супералгебру Ли $A(0,n-1)$. Операторы рождения и уничтожения задают базис в нечетной части, в то время как генераторы $\{a_i^+, a_j^-\}$, $i,j=1,2,\ldots$ образуют базис в четной части алгебры.

Операторы a_i^{ξ}, $i=1,2,\ldots$ являются решениями уравнения /2/ с гамильтонианом

$$H = \sum_i \epsilon_i [\{a_i^+, a_i^-\} - e_{00}]. \qquad /6/$$

Оператор e_{00} принадлежит, например в случае n пар операторов, полной линейной супералгебре

$$g\ell(1,n) = A(0,n) + I, \qquad /7/$$

где I - единичный оператор, и потому e_{00} определено в том же пространстве, в котором заданы операторы рождения и уничтожения. Этот оператор удовлетворяет коммутационным соотношениям

$$[a_i^{\pm}, e_{00}] = \pm a_i^{\pm} \qquad /8/$$

и определяется так, что

$$h_i = \{a_i^{+}, a_i^{-}\} - e_{00} \qquad /9/$$

есть оператор числа частиц в i-ом состоянии. Выражение /6/ можно вывести из гамильтониана, записанного в низшем представлении в виде

$$H = \sum_i \epsilon_i a_i^{+} a_i^{-}, \qquad /10/$$

в точности так же, как это было сделано в[5] для A -статистики.

Заметим, что одни только операторы рождения /или уничтожения/ являются образующими грассмановой алгебры. Поэтому уже теперь ясно, что пространства Фока будут порождаться из вакуума полиномами грассмановых переменных.

В оставшейся части будем изучать пространства Фока a-операторов /5/. Представление операторов a^{ξ} есть отображение $\theta: a_i^{\xi} \to \tilde{a}_i^{\xi}$ на множество линейных операторов $\tilde{a}_i^{\xi}$, сохраняющих соотношения /5/. Так как n пар a-операторов порождают супералгебру Ли $A(0,n-1)$, каждому /неприводимому/ представлению a-операторов соответствует /неприводимое/ представление $A(0,n-1)$ и наоборот.

Пусть W - неприводимое пространство представления. Мы будем рассматривать только пространства W, содержащие вектор $|0\rangle$, называемый вакуумом, такой что

$$a_i^{-}|0\rangle = 0, \quad i = 1,2,\ldots \qquad /11/$$

Чтобы W порождалось из вакуума операторами рождения, мы постулируем, что

$$a_i^{-} a_j^{+} |0\rangle = p\delta_{ij} |0\rangle, \quad i,j = 1,2,\ldots \qquad /12/$$

Используя теорему Пуанкаре-Биркгофа-Витта[2], так же как и в[4], можно показать, что W есть линейная оболочка векторов вида

$$a_{i_1}^{+} a_{i_2}^{+} \ldots a_{i_n}^{+} |0\rangle, \quad i = 1,2,\ldots \qquad /13/$$

В силу того, что операторы рождения являются грассмановыми переменными, в /13/ $i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_n$. Следовательно, так же как и для ферми-статистики, в каждом состоянии i может находиться не более чем одна частица. Скалярное произведение в W определим обычным для пространства Фока образом:

$$\langle 0|0\rangle = 1; \quad \langle 0|a_i^{-} = 0;$$

$$(|a_{i_1}^{+} a_{i_2}^{+} \ldots a_{i_m}^{+}|0\rangle, \ |a_{j_1}^{+} \ldots a_{j_n}^{+}|0\rangle) = \qquad /14/$$

$$= \langle 0|a_{i_m}^{-} \ldots a_{i_2}^{-} a_{i_1}^{-} a_{j_1}^{+} \ldots a_{j_n}^{+}|0\rangle.$$

Таким образом определенное скалярное произведение накладывает сильные ограничения на возможные значения чисел p. Метрика будет положительно определенной только для $p = 1,2,\ldots$ Мы называем p порядком статистики. В индефинитной метрике, которая нами не рассматривается, имеются многие другие, причем бесконечномерные даже для конечного числа операторов, представления.

Пусть $W(p)$ - пространство Фока для порядка статистики p.

Лемма 1. Произведение

$$a_{i_1}^{+} a_{i_2}^{+} \ldots a_{i_{p+1}}^{+} \qquad /15/$$

любых $p+1$ операторов рождения равно нулю в $W(p)$.

Доказательство. Получим сначала некоторые предварительные формулы. Рассмотрим коммутатор

$$I = [\{a_i^-, a_j^+\}, a_{j_1}^+ \ldots a_{j_k}^+ \ldots a_{j_n}^+]. \qquad /16/$$

Используя коммутационные соотношения /5/, находим

$$I = \sum_{k=1}^{n} a_{j_1}^+ \ldots a_{j_{k-1}}^+ (\delta_{ij_k} a_j^+ - \delta_{ij} a_{j_k}^+) a_{j_{k+1}}^+ \ldots a_{j_n}^+ = \qquad /17/$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \delta_{ij_k} a_{j_1}^+ \ldots a_{j_{k-1}}^+ a_j^+ a_{j_{k+1}}^+ \ldots a_{j_n}^+ - n\delta_{ij} a_{j_1}^+ \ldots a_{j_n}^+ .$$

Докажем теперь, что для $n \le p+1$

$$a_i^- a_{j_1}^+ \ldots a_{j_k}^+ \ldots a_{j_n}^+ |0> = \qquad /18/$$

$$= (p-n+1) \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \delta_{ij_k} a_{j_1}^+ \ldots a_{j_{k-1}}^+ a_{j_{k+1}}^+ \ldots a_{j_n}^+ |0> .$$

Поскольку при $n=1$ справедливость равенства /18/ вытекает из определения пространства $W(p)$

$$a_i^- a_{j_1}^+ |0> = \delta_{ij_1} p |0> , \qquad /19/$$

мы воспользуемся для доказательства /18/ методом индукции. Пусть равенство /18/ справедливо. Рассмотрим

$$J \equiv a_i^- a_{j_0}^+ a_{j_1}^+ \ldots a_{j_k}^+ \ldots a_{j_n}^+ |0> = [\{a_i^-, a_{j_0}^+\}, a_{j_1}^+ \ldots a_{j_n}^+]|0> +$$

$$+ a_{j_1}^+ \ldots a_{j_n}^+ \{a_i^-, a_{j_0}^+\}|0> - a_{j_0}^+ a_i^- a_{j_1}^+ \ldots a_{j_n}^+ |0>.$$

Используя /17/ и /18/, находим

$$J = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ij_k} a_{j_1}^+ \ldots a_{j_{k-1}}^+ a_{j_0}^+ a_{j_{k+1}}^+ \ldots a_{j_n}^+ |0> +$$

$$+ (p-n)\delta_{ij_0} a_{j_1}^+ \ldots a_{j_n}^+ |0> -$$

$$-(p-n+1) \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \delta_{ij_k} a_{j_0}^+ a_{j_1}^+ \ldots a_{j_{k-1}}^+ a_{j_{k+1}}^+ \ldots a_{j_n}^+ |0> =$$

$$= -(p-n) \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \delta_{ij_k} a_{j_0}^+ a_{j_1}^+ \ldots a_{j_{k-1}}^+ a_{j_{k+1}}^+ \ldots a_{j_n}^+ |0> +$$

$$+ (p-n)\delta_{ij_0} a_{j_1}^+ \ldots a_{j_n}^+ |0> =$$

$$= (p-n) \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+2} \delta_{ij_k} a_{j_0}^+ \ldots a_{j_{k-1}}^+ a_{j_{k+1}}^+ \ldots a_{j_n}^+ |0> .$$

Тем самым равенство /18/ справедливо и для $n+1$. Если $n=p+1$, получаем

$$a_i^- a_{j_1}^+ \ldots a_{j_{p+1}}^+ |0> = 0. \qquad /20/$$

Следовательно, для всякого вектора $a_{i_1}^+ \ldots a_{i_n}^+ |0>$

$$(a_{i_1}^+ \ldots a_{i_n}^+ |0>, a_{j_1}^+ \ldots a_{j_{p+1}}^+ |0>) = 0. \qquad /21/$$

Так как произвольный вектор $x \in W(p)$ есть линейная комбинация векторов вида $a_{i_1}^+ \ldots a_{i_n}^+ |0>$, $n = 0, 1, 2, \ldots$,

$$(x, a_{j_1}^+ \ldots a_{j_{p+1}}^+ |0>) = 0 \quad \forall \ x \in W, \qquad /22/$$

что возможно только в том случае, если /15/ верно. Лемма доказана.

В общепринятой интерпретации вектор

$$a_{j_1}^+ \ldots a_{j_n}^+ |0> \qquad /23/$$

соответствует ансамблю из n частиц, n - частичному состоянию. Из леммы 1, учитывая, что операторы рождения являются грассмановыми переменными, получаем Принцип Паули. Если порядок A-суперстатистики равен p, то в любом состоянии не может находиться более чем одна частица. Произвольный ансамбль может состоять максимум из p частиц.

Лемма 2. Совокупность всевозможных векторов

$$|i_1, i_2, \ldots, i_n> = \sqrt{\frac{(p-n)!}{p!}}\, a^+_{i_1} a^+_{i_2} \ldots a^+_{i_n} |0>, \qquad /24/$$

где $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$, $n = 0, 1, \ldots, p$, задает ортонормированный базис в пространстве Фока $W(p)$.

Доказательство. Рассмотрим скалярное произведение

$$S = (a^+_{i_1} \ldots a^+_{i_m} |0>, a^+_{j_1} \ldots a^+_{j_n} |0>) \qquad /25/$$

и допустим, что индекс i_k не встречается в наборе $j_1, \ldots, j_n$. Тогда

$$S = (-1)^{k-1} <0| a^-_{i_m} \ldots a^-_{i_{k+1}} a^-_{i_{k-1}} \ldots a^-_{i_1} a^-_{i_k} a^+_{j_1} \ldots a^+_{j_n} |0> = 0,$$

так как согласно равенству /18/

$$a^-_{j_k} a^+_{j_1} \ldots a^+_{j_n} |0> = 0$$

Следовательно, $S \neq 0$ только если $m = n$ и наборы индексов $i_1, \ldots, i_n$ и $j_1, \ldots, j_n$ совпадают. Поскольку операторы рождения антикоммутируют, всегда можно считать, что $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$. Найдем скалярный квадрат вектора $a^+_{i_1} \ldots a^+_{i_n} |0>$.

$$(a^+_{i_1} \ldots a^+_{i_n} |0>, a^+_{i_1} \ldots a^+_{i_n} |0>) =$$

$$= <0| a^-_{i_n} \ldots a^-_{i_1} a^+_{i_1} \ldots a^+_{i_n} |0> =$$

$$= (p+1-n) <0| a^-_{i_n} \ldots a^-_{i_2} a^+_{i_2} \ldots a^+_{i_n} |0> = \ldots =$$

$$= (p-n+1)(p-n+2) \ldots (p-1) p <0|0> = \frac{p!}{(p-n)!}. \qquad /26/$$

Лемма доказана.

Чтобы найти матричные элементы операторов рождения и уничтожения, выразим базисные вектора через числа заполнения, введя обозначение

$$|\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, \ldots) = |i_1, i_2, \ldots, i_n>, \qquad /27/$$

где $\theta_{i_1} = \theta_{i_2} = \ldots = \theta_{i_n} = 1$, а остальные $\theta_i = 0$.

Используя /18/, находим

$$a^-_k |\theta_1, \ldots, \theta_k, \ldots) = \theta_k (-1)^{\theta_1 + \ldots + \theta_{k-1}} \sqrt{p - \sum_i \theta_i + 1}\, |\theta_1, \ldots, \theta_k - 1, \ldots),$$

$$a^+_k |\theta_1, \ldots, \theta_k, \ldots) = (1-\theta_k)(-1)^{\theta_1 + \ldots + \theta_{k-1}} \sqrt{p - \sum_i \theta_i}\, |\theta_1, \ldots, \theta_k + 1, \ldots). \qquad /28/$$

В /28/

$$\sum_i \theta_i \equiv \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i \leq p \qquad /29/$$

в силу принципа Паули.

Заметим, что формулы /28/ вместе с выражениями для $\{a^+_i, a^-_i\}$ попутно задают класс неприводимых конечномерных представлений алгебры Ли $A(0, n-1)$, если рассматривается конечное число операторов $a^{\pm}_1, \ldots, a^{\pm}_n$.

Сравнивая результаты, полученные в настоящей заметке и в /4/, заключаем, что физические свойства пространства Фока существенно зависят от того, с какими элементами супералгебры отождествляются операторы рождения и уничтожения. Реализация, рассмотренная в /4/ накладывает ограничения только на заряд ансамбля, в то время как число частиц в одном и том же состоянии может быть как угодно большим. Соответствующее представление супералгебры Ли $A(0, n-1)$ бесконечномерно. Реализация, рассмотренная здесь, более близка к ферми-статистике. Имеются, однако, дополнительные ограничения на общее число частиц в ансамбле. Представление алгебры $A(0, n-1)$ в этом случае конечномерно. Если перейти к квантовой теории поля, обобщая естественным образом структурные соотношения /4/ и /5/ на случай континуума операторов, то окажется, что ток $J^n(x)$, соответствующий A-суперстатистике /5/, не является локальным оператором, в то время как ток для А-статистики /4/ локален.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ганчев А.Х., Палев Ч.Д. ОИЯИ, Р2-11941, Дубна, 1978.*
2. Kac V.G. Adv. Math., 1977, 26, p.8.
3. *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантовых полей. М., 1957.*
4. *Палев Ч.Д. ОИЯИ, Е2-11942, Дубна, 1978.*
5. *Палев Ч.Д. ОИЯИ, Е17-10550, Дубна, 1978.*

Рукопись поступила в издательский отдел 10 октября 1978 года.