ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 11941

А.Х.Ганчев, Ч.Д.Палев

АНАЛИЗ ПАРАБОЗЕ-СТАТИСТИКИ МЕТОДОМ СУПЕРАЛГЕБР ЛИ

1978

P2 - 11941

А.Х.Ганчев, Ч.Д.Палев

АНАЛИЗ ПАРАБОЗЕ-СТАТИСТИКИ МЕТОДОМ СУПЕРАЛГЕБР ЛИ

Направлено в "Nuclear Physics"

Ганчев А.Х., Палев Ч.Д. P2 - 11941

Анализ парабозе-статистики методом суперапгебр Ли

Показано, что n двоек парабозе-операторов $a_1^{\xi},\dots,a_n^{\xi}$ порождают классическую простую ортосимплектическую супералгебру Ли: $B(0,n) \equiv \equiv osp(1,2n)$. Операторы рождения ($\xi = +$) и уничтожения ($\xi = -$) являются отрицательными и положительными корневыми векторами соответственно. Они задают базис в нечетной части $B(0,n)$. Существует взаимно-однозначное соответствие между представлениями парабозе-операторов и ортосимплектической алгебры.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Gantchev A.Ch., Palev T.D. P2 - 11941

A Lie-Superalgebraical Analysis of the ParaBose Statistics

It is shown that n pairs of paraBose operators $a_1^{\xi},\dots,a_n^{\xi}$ generate the classical simple orthosymplectic Lie superalgebra $B(0,n) \equiv osp(1,2n)$. The creation ($\xi = +$) and annihilation ($\xi = -$) operators are negative and positive root vectors, respectively. They span a basis in the even part of $B(0,n)$. There exists one to one correspondence between the representations of the paraBose operators and the orthosymplectic algebra.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubno 1978

Как было показано Грином [1], обычную квантовую статистику можно значительно обобщить, если при квантовании не накладывается требование, чтобы коммутатор или антикоммутатор двух полей был C-числом. В этом случае антикоммутационные соотношения ферми-операторов заменяются двойными коммутационными соотношениями для параферми-операторов $b_i^{\pm}$,*

$$[[b_i^{\xi}, b_j^{\eta}], b_k^{\epsilon}] = \frac{1}{2}(\eta-\epsilon)^2 \delta_{jk} b_i^{\xi} - \frac{1}{2}(\xi-\epsilon)^2 \delta_{ik} b_j^{\eta} . \qquad /1/$$

Обобщение бозе-операторов, парабозе-операторы, удовлетворяет соотношениям

$$[\{a_i^{\xi}, a_j^{\eta}\}, a_k^{\epsilon}] = (\epsilon-\xi)\delta_{ik} a_j^{\eta} + (\epsilon-\eta)\delta_{kj} a_i^{\xi} . \qquad /2/$$

В 1963 г. Райен и Сударшан [2] показали, что параферми-статистика имеет хорошо определенный алгебраический смысл**. Оказывается, что заданное число n пар операторов рождения ($\xi = +$) и уничтожения ($\xi = -$)

$$b_1^{\xi}, b_2^{\xi}, \dots, b_n^{\xi} \qquad /3/$$

порождает простую алгебру B_n ортогональной группы $SO(2n+1)$. Это свойство значительно облегчает все ис-

* Всюду в препринте $\xi, \eta, \epsilon = \pm$ или ± 1; $[x,y] = xy - yx$ и $\{x,y\} = xy + yx$.

** Здесь и в дальнейшем под алгеброй /супералгеброй/ будем подразумевать алгебру /супералгебру/ Ли.

следования свойств параферми-статистики. Оно существенно использовалось для изучения новых физических идей [3-6], основанных на параферми-статистике.

Обстоятельство, что параферми-операторы порождают простую алгебру, существенно не только потому, что дает возможность перевести большинство проблем параферми-статистики на язык простых алгебр. Оно является отправным пунктом для новых обобщений. На самом деле, ферми- и параферми-квантование являются по существу квантованием по определенным представлениям нечетно-ортогональной алгебры. Поэтому было бы естественно спросить, нельзя ли квантовать по некоторым представлениям других классических алгебр. Этот вопрос исследовался в [7]. Там было показано, что каждой классической серии простых алгебр соответствует квантование, которое логически совместимо с аксиомами вторичного квантования.

Алгебраические свойства параферми-операторов тесно связаны с тем обстоятельством, что их определяющие соотношения /1/ выражаются в виде коммутаторов. В случае парабозе-статистики /2/ это не так. Поэтому, имея дело с парабозе-статистикой, нельзя применять алгебраических методов. Известно, что линейная оболочка всех антикоммутаторов, т.е.

$$L_0 = \mathrm{lin.env.}\{\{a_i^{\xi}, a_j^{\eta}\} \mid i,j=1,\ldots,n;\ \xi,\eta = \pm\}, \qquad /4/$$

изоморфна классической простой алгебре C_n симплектической группы $Sp(2n)$ [8]. Сами операторы a_i^{ξ}, однако, не являются элементами этой алгебры; они не могут принадлежать никакой алгебре так, чтобы они одни порождали всю алгебру.

Соотношения /2/ наводят на мысль, что парабозе-операторы являются элементами супер態алгебры, порождающими всю алгебру. Чтобы показать, что это действительно так, обозначим через L_1 пространство, натянутое на парабозе-операторы рождения ($\xi = +$) и уничтожения ($\xi = -$),

$$L_1 = \mathrm{lin.env.}\{a_i^{\xi} \mid i = 1,\ldots,n;\ \xi = \pm\}. \qquad /5/$$

Пусть pB_n - прямая сумма пространств L_0 и L_1,

$$pB_n = L_0 + L_1. \qquad /6/$$

В последующих выкладках индекс $\alpha = 0,1$ указывает, что соответствующий элемент принадлежит L_α, т.е. $a_\alpha \in L_\alpha$.

Определим произведение

$$\llbracket a, b \rrbracket \in pB_n, \quad a, b \in pB_n \qquad /7/$$

в линейном пространстве pB_n соотношениями

$$\begin{aligned} &\llbracket a_1, b_1 \rrbracket = \{a_1, b_1\}, \quad a_1, b_1 \in L_1, \\ &\llbracket a_0, b_\alpha \rrbracket = [a_0, b_\alpha], \quad a_0 \in L_0,\ b_\alpha \in L_\alpha. \end{aligned} \qquad /8/$$

Произведение двух произвольных элементов получается продлением по линейности соотношений /8/.

Пусть Z_2 есть кольцо с двумя элементами (0,1) и произведением /в аддитивых обозначениях/:

$$0 + 0 = 0, \quad 0 + 1 = 1, \quad 1 + 1 = 0. \qquad /9/$$

Из соотношений /2/ следует, что

$$\llbracket a_\alpha, b_\beta \rrbracket \in L_{\alpha+\beta}, \quad \alpha, \beta \in Z_2. \qquad /10/$$

Поэтому pB_n есть Z_2-градуированная алгебра. Более того, из /8/ получаем

$$\llbracket a_\alpha, b_\beta \rrbracket = -(-1)^{\alpha\beta} \llbracket b_\beta, a_\alpha \rrbracket, \quad \alpha, \beta, \gamma \in Z_2, \qquad /11/$$

$$\llbracket a_\alpha, \llbracket b_\beta, c_\gamma \rrbracket \rrbracket = \llbracket \llbracket a_\alpha, b_\beta \rrbracket, c_\gamma \rrbracket + (-1)^{\alpha\beta} \llbracket b_\beta, \llbracket a_\alpha, c_\gamma \rrbracket \rrbracket. \qquad /12/$$

По определению Z_2-градуированная алгебра, чьи элементы удовлетворяют соотношениям /11-12/, есть супералгебра*. Подпространства L_0 и L_1 называются четной и нечетной частью алгебры. Сформулируем полученные результаты.

Лемма 1. Относительно произведения /8/ pB_n является обычной супералгеброй. Парабозе-операторы $a_1^{\pm},\dots,a_n^{\pm}$ задают базис в нечетной части $L_1 \subset pB_n$, а их всевозможные полиномы порождают всю алгебру pB_n.

Будем называть супералгебру pB_n парабозе-алгеброй. Если $A, B \subset pB_n$, то вводим обозначение

$$\|A,B\| = \{\|a,b\| \mid a \in A,\ b \in B\}. \qquad /13/$$

В частности,

$$\{A,B\} = \{\{a,b\} \mid a \in A,\ b \in B;\ A,B \subset L_1\}; \qquad /14/$$

$$[A,B] = \{[a,b] \mid a \in A \subset L_0;\ b \in B \subset pB_n\}. \qquad /15/$$

Лемма 2. Парабозе-алгебра pB_n является простой супералгеброй.

Доказательство. Мы должны показать, что pB_n не имеет нетривиальных идеалов. Пусть $0 \neq I$ - идеал в pB_n. Рассмотрим следующие три возможности.

а/ Допустим, $I \cap L_0 \neq 0$, и пусть

$$0 \neq x \in I \cap L_0. \qquad /16/$$

Так как подалгебра L_0 изоморфна простой алгебре C_n, то

$$[x, L_0] = L_0. \qquad /17/$$

Кроме того,

$$[L_0, L_1] = L_1. \qquad /18/$$

* Для аксиоматического определения супералгебры см., например, [9].

Поэтому L_0 и L_1 содержатся в I и, следовательно, $I = pB_n$.

б/ Допустим, $0 \neq x \in I \cap L_1$. Парабозе-операторы задают базис L_1,

$$x = \sum_{j,\eta} \alpha^j_\eta a^\eta_j. \qquad /19/$$

Пусть $\alpha^i_\xi \neq 0$. Используя соотношение

$$[\{a_i^{-\xi}, a_i^{-\xi}\}, a_j^{\xi}] = 2(\xi-\eta)\delta_{ij} a_i^{-\xi}, \qquad /20/$$

получаем

$$[\{a_i^{-\xi}, a_i^{-\xi}\}, x] = 4\xi\alpha^i_\xi a_i^{-\xi} \in I.$$

Поэтому $a_i^{-\xi} \in I$. Из равенства

$$[\{a_k^{-\xi}, a_i^{\xi}\}, a_i^{-\xi}] = -2\xi a_k^{-\xi}$$

заключаем, что

$$a_k^{-\xi} \in I, \quad k = 1,2,\dots,n. \qquad /21/$$

Следовательно,

$$[\{a_k^{\xi}, a_k^{\xi}\}, a_k^{-\xi}] = -4\xi a_k^{\xi} \in I. \qquad /22/$$

Включение /21/ и /22/ показывает, что $L_1 \subset I$. Используя еще раз /18/, заключаем, что $I = pB_n$.

в/ Осталось рассмотреть общий случай

$$0 \neq x = x_0 + x_1 \in I,$$

где $L_\alpha \ni x_\alpha$ - ненулевые элементы.

Допустим, $[x_0, x_1] \neq 0$. Тогда

$$\|x_0 + x_1, x_0\| = [x_1, x_0] \in L_1 \cap I. \qquad /23/$$

Заметим, что из

$$0 \neq x_1 \in L_1 \quad \text{следует} \quad \{x_1, x_1\} \neq 0. \qquad /24/$$

Поэтому, если $[x_1, x_0] = 0$, то

$$0 \neq [\![x_0 + x_1 , x_1]\!] = \{x_1, x_1\} \in L_0 \cap I. \qquad /25/$$

Тем самым этот случай сводится к предыдущим двум. Поэтому супералгебра pB_n не содержит идеалов, отличных от нуля и всей алгебры, и потому является простой.

Недавно все простые супералгебры были полностью классифицированы /9/. Как и обычные алгебры, простая супералгебра полностью определена системой своих корней. Корни являются векторами из подалгебры Картана $\mathcal{H}$, которая по определению есть подалгебра Картана четной части. Если A - линейный оператор в $L = L_0 + L_1$, обозначим через

$$\mathrm{tr}\, A\,|_{L_\alpha} \qquad /26/$$

след оператора A в подпространстве L_α, $\alpha = 0,1$. Тогда форма Киллинга в L по определению равна

$$(a,b) = \mathrm{tr}\,\mathrm{ad}\,a\,\mathrm{ad}\,b\,|_{L_0} - \mathrm{tr}\,\mathrm{ad}\,a\,\mathrm{ad}\,b\,|_{L_1}, \quad a,b \in L. \qquad /27/$$

Здесь через $\mathrm{ad}\,a$ обозначен оператор из присоединенного представления,

$$(\mathrm{ad}\,a) z = [\![a, z]\!] \in L, \quad z \in L. \qquad /28/$$

Форма Киллинга простой супералгебры не вырождена. Базис

$$h_1, \ldots, h_n, \; e_{\omega_1}, \ldots, e_{\omega_p} \qquad /29/$$

в L всегда может быть выбран так, что для всякого $h \in \mathcal{H}$

$$[h, e_{\omega_i}] = (h, \omega_i)\, e_{\omega_i}, \quad i = 1,\ldots,p. \qquad /30/$$

Здесь

$$h_1, \ldots, h_n \qquad /31/$$

есть произвольный базис в подалгебре Картана $\mathcal{H}$.

Возвращаясь к парабозе-алгебре, выберем следующий базис в pB_n:

$$a_i^\xi, \; i = 1,2,\ldots,n; \; \xi = \pm \; - \text{базис в } L_1; \qquad /32а/$$

$$\left.\begin{array}{ll} h_i = -\frac{1}{2}\{a_i^+, a_i^-\}, \; i = 1,\ldots,n & /32б/ \\ \{a_i^+, a_j^-\}, \quad j \neq i = 1,\ldots,n & /32в/ \\ \{a_p^\xi, a_q^\xi\}, \; p \leq q = 1,\ldots,n; \; \xi = \pm & /32г/ \end{array}\right\} - \text{базис в } L_0.$$

Вектора $h_1 \ldots h_n$ задают базис в подалгебре Картана; линейная оболочка векторов /32б-в/ дает подалгебру $gl(n+1) = L_0 = C_n$

Используя определение /27/ и структурные соотношения /2/, нетрудно показать, что

$$(h_i, h_j) = \delta_{ij}(4n+2) \qquad /33/$$

Поэтому базис в $\mathcal{H}$ /32б/ ортогонален. Пусть

$$h^1, h^2, \ldots, h^n \qquad /34/$$

является дуальным к /32б/ базисом, т.е.

$$(h_i, h^j) = \delta_i^j \qquad /35/$$

Простое вычисление дает ($h \in \mathcal{H}$):

$$[h, a_i^\xi] = (h, -\xi h^i)\, a_i^\xi,$$

$$[h, \{a_p^\xi, a_q^\eta\}] = (h, -\xi h^p - \eta h^q)\{a_p^\xi, a_q^\eta\}. \qquad /36/$$

Поэтому корневая система Σ есть

$$\Sigma = \{\xi h^i, \; \xi h^i + \eta h^j \mid i,j = 1,2,\ldots,n; \; \xi, \eta = \pm\}. \qquad /37/$$

Следовательно, векторы /32а,в,г/ являются корневыми векторами. Соответствие с их корнями следующее:

$$a_i^{\xi} \leftrightarrow -\xi h^i , \qquad /38/$$

$$\{a_i^{\xi}, a_j^{\eta}\} \leftrightarrow -\xi h^i - \eta h^j . \qquad /39/$$

Поэтому парабозе-операторы рождения ($\xi = +$) и уничтожения ($\xi = -$) являются относительно базиса /34/ отрицательными и положительными корневыми векторами соответственно.

Единственная простая супералгебра с корневой системой /37/- это алгебра $osp(1, 2n)$, или, в обозначениях Каца /9/, алгебра $B(0, n)$. Мы резюмируем полученные результаты.

Теорема. Парабозе-алгебра pB_n, соответствующая n парам операторов рождения и уничтожения, изоморфна простой классической супералгебре $B(0,n)$. Парабозе-операторы задают базис в нечетной части алгебры и порождают всю алгебру. Базис в подалгебре Картана pB_n можно выбрать и упорядочить таким образом, что операторы рождения и уничтожения будут отрицательными и положительными корневыми векторами соответственно.

Следствие 1. Бозе-операторы рождения и уничтожения, рассматриваемые как элементы нечетной части супералгебры, порождают одно определенное неприводимое представление алгебры $B(0,n)$.

Иными словами, в пространстве Фока n пар бозе-операторов реализуется бесконечномерное неприводимое представление супералгебры $B(0,n)$. Так как $B(0,n)$ порождается парабозе-операторами, из теоремы еще следует

Следствие 2. Существует взаимно-однозначное соответствие между /неприводимыми/ представлениями данного числа пар n парабозе-операторов и /неприводимыми/ представлениями супералгебры $B(0,n)$.

Тем самым задача о нахождении всех представлений парабозе-операторов эквивалентна задаче о построении всех представлений ортосимплектической супералгебры. Переворачивая задачу, можно сказать, что один класс

представлений ортосимплектической алгебры, который нумеруется одним целым положительным числом p, так называемым порядком парастатистики, был найден Грином /1/ задолго до введения понятия супералгебры.

Так как переход к бесконечному множеству операторов рождения и уничтожения не меняет алгебраической структуры, ортодоксальное вторичное квантование, скажем, скалярного поля, можно рассматривать как квантование по определенному неприводимому представлению ортосимплектической супералгебры бесконечной размерности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Green H.S. Phys.Rev., 1953, 90, p.270.
2. Ryan C., Sudarshan E.C.G. Nucl.Phys., 1969, 47, p.207.
3. Говорков А.Б. ЖЭТФ, 1968, 54, с.1785.
4. Govorkov A.B. Int. Journ. Theor. Phys., 1973, 7, p.49.
5. Говорков А.Б. ОИЯИ, Е2-7485, Дубна, 1973.
6. Bracken A.J., Green H.S. J.Math.Phys., 1973, 14, p.1784.
7. Палев Ч. Диссертация. Институт ядерных исследований и ядерной энергетики, София, 1976. Часть результатов опубликована в Compt. rend. Acad. bulg. Sci. 1977, 30, p.993; ОИЯИ, Е2-10258, Дубна, 1976; ОИЯИ, Е2-10550, Дубна, 1977; в кн.: Материалы XV Международной конференции по космическим лучам. Пловдив, 1977, 11, с.546; см. также ОИЯИ, Е2-11905, Е2-11906, Дубна, 1978.
8. Kamefuchi S., Takahashi Y. Nucl.Phys., 1960, 36, p.177.
9. Kac V.G. Adv. Math., 1977, 26, p.8.

Рукопись поступила в издательский отдел 10 октября 1978 года.