СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



P2 - 11925

В.Н.Стрельцов

# НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

(Релятивистская гидродинамика и релятивистская термодинамика)

1978

P2 - 11925

В.Н.Стрельцов

# НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

(Релятивистская гидродинамика
и релятивистская термодинамика)

Стрельцов В.Н. P2 - 11925

Некоторые вопросы специальной теории относительности (релятивистская гидродинамика и релятивистская термодинамика)

Рассматривается тензор энергии-импульса идеальной жидкости. Показано, что импульс и энергия движущейся жидкости описываются обычными релятивистскими формулами (для импульса и энергии движущейся частицы). Высказываются соображения в пользу неинвариантности нормального давления. С учетом последнего факта обсуждается вид релятивистского уравнения движения идеальной жидкости. В соответствии с результатами Отта и Арзелье рассматриваются релятивистские преобразования термодинамических величин, среди них формула преобразования нормального давления и формула увеличения движущегося объема, а также ковариантная формулировка первого и второго законов термодинамики. Получено релятивистское уравнение состояния идеального газа. Приводятся ковариантные выражения для величин, описывающих черное тело.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Strel'tsov V.N. P2 - 11925

Some Problems of Special Relativity (Relativistic Thermodynamics and Hydrodynamics)

The energy-momentum tensor of an ideal liquid is considered. It is shown that the momentum and energy of a moving liquid are described by usual relativistic formulae (for momentum and energy of a moving particle). Some considerations in favor of normal pressure noninvariance are presented. The relativistic equation of motion for an ideal liquid is discussed taking into account the latter consideration. In correspondence with the results of Ott and Arzeliès the relativistic transformation equations of thermodynamic quantities are considered, among them the transformation formula for normal pressure and formula of increasing a moving volume, as well as covariant formulation of the first and second laws of thermodynamics. The relativistic equation of a state of an ideal gas is obtained. Covariant expressions for values which describe the black body are given.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978



**Рассмотрением названных в заглавии вопросов мы завершим обсуждение отдельных аспектов специальной теории относительности, которые стали предметом дискуссии в последнее время.**

## *1. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ГИДРОДИНАМИКА*

### *1.1. Тензор энергии-импульса жидкости*

**Рассмотрим тензор энергии-импульса $T_{ik}$ идеальной жидкости /газа/, как известно, характеризующийся, в частности, равными нулю смешанными компонентами 3-тензора напряжений. В собственной системе отсчета $(K^\circ)$, где данная жидкость /вместе с замкнутым сосудом, который может ее заключать/ покоится, тензор $T_{ik}$ будет иметь отличными от нуля только диагональные элементы*:**

$$T^\circ_{ik} = \begin{pmatrix} p^\circ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p^\circ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -h^\circ \end{pmatrix}, \qquad /1/$$

*** Такой вид $T^\circ_{ik}$ является фактически следствием его определения с помощью выражения: $T^\circ_{ik} = (\underset{\rightarrow}{t}^\circ_{ik} + \underset{\leftarrow}{t}^\circ_{ik})/2$,**

**где, например, в случае $T^\circ_{14}$ $\underset{\rightarrow}{t}^\circ_{14}$ и $\underset{\leftarrow}{t}^\circ_{14}$ описывают плотности x-компоненты импульса частиц, движущихся в положительном и отрицательном направлениях оси $O^\circ X^\circ$, а $T_{ik}$, в частности, - "усредненный" кинетический тензор.**

Отметим при этом, что нормальное давление $p^\circ$ и плотность энергии $h^\circ$ являются положительными величинами и удовлетворяют соотношению

$$p^\circ \leq h^\circ/3, \qquad /2/$$

где, скажем, приближенное равенство реализуется в случае ультрарелятивистского газа.

Рассматриваемый тензор $T_{ik}$ можно представить в виде

$$T_{ik} = \Theta_{ik} + S_{ik}, \qquad /3/$$

где

$$\Theta_{ik} = h^\circ u_i u_k / c^2 = \mu^\circ u_i u_k \qquad /4/$$

есть тензор кинетической энергии, $\mu^\circ = h^\circ/c^2$ - плотность массы в $K^\circ$, включающая массу, соответствующую упругой энергии. Соотношение /4/ показывает, что полный тензор энергии импульса $T_{ik}$ состоит из двух частей: кинетического тензора $\Theta_{ik}$ и “потенциальной части“ $S_{ik}$ - 4-тензора напряжений, который в случае идеальной жидкости имеет вид

$$S_{ik} = p^\circ(\delta_{ik} + u_i u_k / c^2). \qquad /5/$$

Рассмотрим далее специальные формулы преобразования для компонент тензора $T_{ik}$, которые с учетом равенств $T_{11} = p_\parallel$, $T_{14} = icg_x = T_{41} = iS_{x/c}$, $T_{44} = -h$ и $T_{22}, T_{33} = p_\perp$ будут иметь вид:

$$p_\parallel = (p^\circ + \beta^2 h^\circ)\gamma^2, \quad p_\perp = p^\circ, \qquad /6а,б/$$

$$cg_x = S_{x/c} = \beta(p^\circ + h^\circ)\gamma^2, \quad h = (h^\circ + \beta^2 p^\circ)\gamma^2, \qquad /6в,г/$$

где

$$\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}.$$



Здесь необходимо подчеркнуть следующее. Если, следуя Планку[1,2] и Эйнштейну[3], считать, что нормальное давление $p$ является скалярной величиной и не преобразуется при переходе к другой системе отсчета $(p = p^\circ)$, то мы вынуждены допустить тогда на основании уравнения /6а/, что $p^\circ = -h^\circ$. При этом, опираясь на /6г/, будем иметь также $h = h^\circ$.

Полученные таким образом выводы вряд ли можно считать приемлемыми, поскольку, например, первый из них находится в прямом противоречии с условием положительности $p$. Кроме того, на основании уравнения /6в/ придем к другому физически неудовлетворительному результату, - что в $K$-системе, где объем с жидкостью движется, поток переносимой ею энергии $S_x$ должен быть равен нулю.

Учитывая сказанное, мы вынуждены поставить под сомнение справедливость /общепринятого/ исходного утверждения об инвариантности нормального давления *. Составляющие указанной величины должны преобразовываться согласно правилам преобразования для компонент тензора 2-го ранга, определяемым формулами /6а/ и /6б/[4].

Коснемся теперь вопроса об импульсе и энергии рассматриваемого объема жидкости. Введем для этого, как обычно, 4-вектор импульса

$$G_i = \int T_{ik}\, dV_k, \qquad /7/$$

где $dV_k$ - 4-вектор бесконечно малого элемента объема, который, в частности, может иметь вид

$$dV_k\,(i\,dx_4 dx_2 dx_3,\ i\,dx_1 dx_4 dx_3,\ i\,dx_1 dx_2 dx_4,\ -i\,dx_1 dx_2 dx_3).$$

В $K^\circ$-системе в соответствии с нашим определением элемента объема[4а] имеем

$$dV^\circ_k\,(0, 0, 0, -i\,dV^\circ).$$

* Ниже /в п. 2.1/ мы еще вернемся к этой проблеме.

Поэтому, с учетом /1/,

$$\vec{G}^{\circ} = 0, \quad H^{\circ} = \frac{1}{i}\int T^{\circ}_{44}\, dV^{\circ}_{4} = \int h^{\circ} dV^{\circ}. \qquad /8/$$

В К-системе для $\vec{G}$ и $H$ будем иметь

$$G_1 = \int p\, dV_1 + \int g_1 dV, \quad G_2 = G_3 = 0, \qquad /9a/$$

$$H = \int S_1 dV_1 + \int h dV. \qquad /9б/$$

Воспользовавшись далее формулами /6/ и преобразованиями для $dV_1$ и $dV_4$

$$dV_1 = -i\beta dV^{\circ}_{4}\gamma, \quad dV_4 = dV^{\circ}_{4}\gamma, \qquad /10/$$

легко найдем, что

$$G_1 = \frac{1}{c}\beta h^{\circ}\gamma, \qquad H = H^{\circ}\gamma. \qquad /11/$$

Очевидно, что выражения /11/ полностью аналогичны полученным ранее формулам для импульса и энергии электромагнитного поля классического электрона[4б], но отличаются от соответствующих общеизвестных формул /см., например,[5a] /. Здесь следует отметить, что вывод последних формул опирается на традиционное определение длины движущегося масштаба, приводящего к лоренцеву сокращению. В рамках этого определения $dV_1 = 0$, но $dV^{\circ}_{1} \neq 0$, поэтому

$$G^{\circ}_{1} = \int T^{\circ}_{11} dV^{\circ}_{1} \neq 0,$$

т.е. данный покоящийся объем с жидкостью должен обладать импульсом. Как мы уже отмечали ранее[4б], путь избавления от указанной трудности лежит в отказе от традиционного определения длины движущегося масштаба.



### *1.2. Релятивистское уравнение движения идеальной жидкости*

Рассмотрим движение идеальной жидкости. При этом для наглядности будем прибегать к специальной системе отсчета K, где жидкость перемещается вдоль оси OX со скоростью $v_x = \beta c$.

Уравнение сохранения импульса и энергии $\partial T_{ik}/\partial x_k = 0$ с учетом /3/ и /4/ запишем в форме

$$\frac{\partial \Theta_{ik}}{\partial x_k} + \frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k} = 0 \qquad /12/$$

или

$$\mu^{\circ}\frac{du_i}{d\tau} = -\frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k}. \qquad /12'/$$

Выпишем далее общие формулы преобразования для компонент 4-тензора напряжений $S_{ik}$, которые на основании /5/ будут иметь вид

$$S_{\alpha\alpha} = \left(1 + \frac{u_\alpha^2}{c^2}\right)p^{\circ}, \qquad S_{\alpha\beta} = \frac{u_\alpha u_\beta}{c^2}p^{\circ}, \qquad /13а,б/$$

$$S_{\alpha 4} = \frac{u_\alpha u_4}{c^2}p^{\circ}, \qquad S_{44} = \left(1 + \frac{u_4^2}{c^2}\right)p^{\circ}, \qquad /13в,г/$$

где $\alpha, \beta = 1, 2, 3$.

Из формулы /13а/ нетрудно видеть, что только в нерелятивистском пределе* $S_{\alpha\alpha} = p^{\circ}$, т.е. нормальное давление - инвариант. Принимая также во внимание, что в данном случае $S_{\alpha 4} = i v_\alpha p^{\circ}/c$, $S_{\alpha\beta} = S_{44} = 0$,

---

* Когда членами порядка $\beta^2$ можно пренебречь по сравнению с 1.

представим уравнение /12'/ в виде следующих двух известных /нерелятивистских/ уравнений:

$$\mu^\circ \frac{d\vec{v}}{dt} = -\operatorname{div} p^\circ \qquad \text{/уравнение Эйлера/}, \qquad /14а/$$

$$\mu^\circ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\vec{v}^2\right) = -\operatorname{div}(p^\circ \vec{v}), \qquad /14б/$$

где в правой части /14а/ мы отбросили член $c^{-2}\,\partial(\vec{v}p^\circ)/\partial t$, который мал по сравнению с оставшимся.

В отмеченном специальном случае релятивистское уравнение идеальной жидкости /для $x$-компоненты/ будет иметь вид

$$\mu^\circ \frac{du_1}{d\tau} = -\frac{\partial p_1}{\partial x_1} - \frac{\partial S_{14}}{\partial x_4} \qquad (p_1 = S_{11}). \qquad /15/$$

С учетом того, что

$$S_{14} = -\frac{u_1}{u_4} p_1, \qquad /16/$$

оно может быть также переписано в форме

$$\mu^\circ \frac{du_1}{d\tau} = -\frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_4}\left(\frac{u_1}{u_4} p_1\right) \qquad /15'/$$

или, после несложных преобразований, - в виде

$$(p_1 - \mu^\circ u_4^2)\frac{du_1}{d\tau} = -c^2 \frac{\partial p_1}{\partial x_1} - u_1 \frac{dp_1}{d\tau}. \qquad /17/$$



Полученное таким образом специальное уравнение /17/ весьма похоже на общеизвестное уравнение /см., например,[5а]/, вывод которого опирается на условие инвариантности давления. Формальное отличие состоит в появлении множителя $u_4^2$ у $\mu^\circ$. Однако здесь важно подчеркнуть, что в уравнение /17/ входит величина $p_1$ $(= p^\circ \gamma^2)$, измеряемая именно в $K$-системе.

В самом общем случае /из-за различия $S_{11}, S_{22}$ и $S_{33}$/ нормальное давление в идеальной жидкости, движущейся релятивистски, будет характеризоваться тремя величинами. Больше того, формула /13б/ указывает также на появление касательных давлений в быстро текущей идеальной жидкости, что фактически означает нарушение условия идеальности. Все это, конечно, чисто релятивистские эффекты.

При написании релятивистского уравнения движения идеальной жидкости следует учитывать, что компоненты $S_{ik}$ не являются независимыми величинами. Например, мы можем выразить $S_{1\alpha}$ и $S_{14}$ через соответствующее нормальное давление $S_{11}$. Тогда $X$-компонента релятивистского уравнения Эйлера будет иметь вид

$$\left[\mu^\circ\left(1+\frac{u_1^2}{c^2}\right) + \frac{p_1}{c^2}\frac{1-u_1^2/c^2}{1+u_1^2/c^2}\right]\frac{du_1}{d\tau} = -\frac{\partial p_1}{\partial x_1} - \frac{u_1}{c^2}\left(\frac{dp_1}{d\tau} - \frac{2p_1}{1+u_1^2/c^2}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right). \qquad /18/$$

В случае существования источников собственной плотности массы в правой части /18/ следует добавить /в скобках/ слагаемое $-\,p_1\, d(\ln\mu^\circ)/d\tau$.

Аналогичный вид будет иметь уравнение для $y$- и $z$-компонент и соответствующих нормальных давлений, а также уравнение сохранения энергии для плотности энергии $S_{44}$.

Следует, впрочем, подчеркнуть, что четыре отмеченные переменные не являются независимыми, поскольку в указанные уравнения входят также компоненты 4-скорости $u_\alpha$. По-видимому, целесообразнее описывать поведение релятивистской идеальной жидкости следующими четырьмя независимыми переменными $S_{44}$ и $u_\alpha$. В этом случае, например, вместо уравнения /18/ будем иметь

$$[\mu^\circ(1+\frac{u_4^2}{c^2})+\frac{\epsilon}{c^2}]\frac{du_1}{d\tau} = -\frac{\partial\epsilon}{\partial x_1}-\frac{u_1}{c^2}(\frac{d\epsilon}{d\tau}-\frac{2\epsilon}{c^2}\cdot\frac{u_4}{1+u_4^2/c^2}\cdot\frac{du_4}{d\tau}), \qquad /19/$$

где $\epsilon = S_{44}$.

## 2. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕРМОДИНАМИКА

### 2.1. Релятивистские преобразования термодинамических величин

Вскоре после появления теории относительности Планк/1,2/, Хазенерль/6/, Эйнштейн/3/ и другие сформулировали законы термодинамики в соответствии со специальным принципом относительности. Эта первоначальная трактовка релятивистской термодинамики вошла без изменений в многочисленные учебники. При этом для формул преобразования термодинамических величин: количества тепла Q, температуры T, давления p и энтропии S были получены следующие выражения

$$Q = Q^\circ\gamma^{-1}, \qquad /1/$$

$$T = T^\circ\gamma^{-1}, \qquad /2/$$

$$V = V^\circ\gamma^{-1}, \qquad /3/$$

$$p = p^\circ, \qquad /4/$$

$$S = S^\circ, \qquad /5/$$

где мы также выписали формулу лоренцева сокращения объема.

Однако позднее Отт/7/ и, независимо от него, Арзелье /8/ показали, что старая формулировка не совсем удовлетворительна. При этом для формул преобразования



Q и T вместо /1/ и /2/ ими были получены следующие выражения

$$Q = Q^\circ\gamma, \qquad /6/$$

$$T = T^\circ\gamma. \qquad /7/$$

Вместе с тем, как уже отмечалось в п.1.1, ранее было показано, что в результате определения понятия релятивистской длины с помощью непосредственного использования часов и световых сигналов вместо /3/ будем иметь следующую формулу преобразования пространственного объема/4а/

$$V = V^\circ\gamma. \qquad /8/$$

Ниже мы также затронем некоторые вопросы, касающиеся релятивистской формулировки термодинамики, соответствующей ,в общем,результатам Отта и Арзелье. Здесь же мы коснемся отмеченной выше проблемы преобразования нормального давления.

Следует подчеркнуть, что формулу /4/ можно считать непосредственным результатом определения давления как 3-силы $\vec{f}$, действующей на нормальный к ней элемент поверхности $\vec{s}$. В этом случае, исходя из выражения для электромагнитной силы $\vec{f}^\circ = e\vec{E}^\circ$ и используя специальные преобразования Лоренца, в частности, будем иметь

$$f_x = f_x^\circ, \quad s_x = s_x^\circ,$$

на основании чего обычно и заключают/см., например/3//, что давление - инвариант. Однако, если в соответствии с требованием ковариантности мы воспользуемся вместо $\vec{f}$ релятивистской силой Минковского $F_i$,* то придем к нарушению указанного условия инвариантности давле-

* Необходимость такой замены детально обсуждалась ранее/9/.

ния. Больше того, полученная в результате величина уже не будет компонентой 4-тензора второго ранга*, каковым является тензор энергии-импульса. Поэтому, чтобы удовлетворить последнему условию, в релятивистском случае давление следует трактовать единственно как изменение импульса, действующего на нормальную площадку, в единицу времени. Тогда, в частности, для изменения во времени $x$-компоненты импульса непосредственным вычислением получим

$$\frac{\partial p_x}{\partial t} = \left[\frac{\partial p_x^\circ}{\partial t^\circ} - \frac{\beta}{c}\left(\frac{\partial E^\circ}{\partial t^\circ} - c^2\frac{\partial p_x^\circ}{\partial x^\circ}\right) + \beta^2\frac{\partial E^\circ}{\partial x^\circ}\right]\gamma^2$$

или, с учетом равенства $\partial E^\circ/\partial t^\circ = c^2\partial p_x^\circ/\partial x^\circ$ и $\partial p_x/\partial t = p_N$, $\partial E^\circ/\partial x^\circ = h^\circ$, для формулы преобразования нормального давления в соответствии с /1.6а/ найдем

$$p_N = (p^\circ + \beta^2 h^\circ)\gamma^2 \quad . \qquad /9/$$

### 2.2. Первый и второй законы релятивистской термодинамики

В соответствии с первым началом классической термодинамики, которое должно оставаться справедливым в системе покоя материального тела ($K^\circ$), изменение энергии $\Delta E^\circ$, связанное с переходом тела из одного состояния термодинамического равновесия в другое, равно

$$\Delta E^\circ = \Delta Q^\circ + \Delta A^\circ , \qquad /10/$$

где $\Delta Q^\circ$ - количество тепла, полученное телом во время процесса, $\Delta A^\circ$ - механическая работа, произведенная при этом внешней средой над телом. Такое разделение

* Это будет компонента 4-тензора третьего ранга.



$\Delta E^\circ$ на две части является однозначным, если мы условимся, в соответствии с духом классической термодинамики, что $\Delta A^\circ$ включает в себя лишь работу истинных механических сил. Тогда $\Delta Q^\circ$ будет определять собою ту часть $\Delta E^\circ$, которая не связана с действием этих сил. В соответствии с принципом относительности мы будем считать такое разделение справедливым для любой системы отсчета, в отличие от старой формулировки, когда в $\Delta A$ включалась работа некоторых обобщенных сил.

Релятивистское обобщение первого закона должно включать аналогичное разделение изменения импульса на две части, обусловленных действием механических сил и подвода тепла соответственно. Следовательно, в произвольной системе К первый закон релятивистской термодинамики запишется в виде /см., например, /5б/ /

$$\Delta G_i = \Delta I_i + \Delta Q_i . \qquad /11/$$

Здесь $\Delta G_i$ ($\Delta G_\alpha$, $i\Delta H/c$) - полное изменение 4-импульса, $\Delta I_i$ ($\Delta I_\alpha$, $i\Delta A/c$) - 4-импульс внешних механических сил, $\Delta Q_i$ ($\Delta P_\alpha$, $i\Delta Q/c$)- 4-импульс подведенного тепла.

Отметим при этом, что, как было показано выше /п. 1.1/, величина $\Delta G_i$ преобразуется, вопреки встречающемуся мнению, по обычным релятивистским формулам преобразования для импульса и энергии. Очевидно также, что, по крайней мере, в частном случае $\Delta Q_i = 0$, таким же образом должна преобразовываться и величина $\Delta I_i$.

Выразим далее работу сил, вызывающих изменение энергии некоторого тела /системы/ через тензор энергии-импульса. В собственной системе отсчета рассматриваемого тела /системы/ тогда, в частности, будем иметь*

* Для наглядности можно представить себе указанную /равновесную/ систему в виде цилиндра с жидкостью; причем крышки цилиндров суть поршни, которые одновременно перемещаются в противоположных направлениях на одно и то же расстояние $\Delta x^\circ/2$ ($\Delta V^\circ = \Delta x^\circ s^\circ$), где $s^\circ$ - площадь поршня/. Таким образом, в результате указанного процесса расширения или сжатия система остается в покое.

$$\Delta A_4^\circ = \frac{1}{3} T_{44}^\circ \Delta V_4^\circ = -\frac{1}{3}(T_{aa}^\circ - \mu^* c^2)\Delta V_4^\circ . \qquad /12/$$

Здесь, как и выше, $\Delta V_4^\circ\ (0, 0, 0, -i\Delta V^\circ)$, а

$$\mu^* = \text{inv.} = T_{ii} / c^2 \qquad /13/$$

- "собственная" плотность массы.

Можно также определить работу, связанную с изменением кинетической энергии системы

$$\Delta A^{k\circ} = \frac{1}{3}(h^\circ - \mu^* c^2)\Delta V^\circ = \frac{1}{3i}(T_{44}^\circ + \mu^* c^2)\Delta V_4^\circ = \frac{i}{3} T_{aa} \Delta V_4^\circ . \qquad /14/$$

Для идеальной жидкости последнее выражение сводится к известной формуле

$$\Delta A^{k\circ} = p^\circ \Delta V^\circ . \qquad /14a/$$

В общем случае вместо /12/ будем иметь

$$\Delta A_4 = T_{4k}\, \Delta V_k \qquad \text{и} \qquad \Delta I_i = T_{ik}\, \Delta V_k . \qquad /15/$$

Очевидно, что введенная таким образом величина $\Delta I_i$ будет представлять собою временипод обный 4-вектор.

Перейдем теперь к вопросу о преобразовании тепловой энергии $\Delta Q$. При этом для простоты будем считать, как обычно, что в собственной системе отсчета $K^\circ$ тело /система/ остается в покое и после подвода тепла $\Delta Q^\circ$.

В этом случае, очевидно, истинная механическая сила $F_i^\circ = 0$, но

$$F_i^{*\circ} = F_i^\circ + \Pi_i^\circ \neq 0 \qquad \text{для} \qquad i = 4 .$$

Поэтому

$$\Delta Q_i^\circ \equiv \Pi_i^\circ \Delta\tau = (0, 0, 0, \Pi_4^\circ d\tau) , \qquad /16/$$



откуда на основании формулы преобразования для временной компоненты 4-вектора вытекает, что с точки зрения $K$ -системы подведенное к данному телу тепло должно определяться величиной

$$\Delta Q = \Delta Q^\circ \gamma \qquad \text{/формула Отта/.} \qquad /17/$$

Здесь мы хотим обратить внимание на следующее. Зачастую говорят, что имеются две возможности определения переданного тепла. Одно определение связано с результатом Отта, другое, введенное Планком и Эйнштейном, связано с вычетом работы силы

$$\Delta Q_p = \Delta Q - \beta c \Delta P . \qquad /18/$$

Но поскольку в данном случае истинная механическая сила в $K^\circ$ -системе $F_i^\circ = 0$, то и в произвольной $K$-системе $F_i = 0$. Поэтому в /18/ фактически вводится работа некоторой фиктивной силы, которая не изменяет состояния движения рассматриваемого тела. На самом деле величина $\Delta P$ имеет чисто кинематическую природу и связана просто с переходом от одной системы отсчета к другой.

Обратимся теперь ко второму закону термодинамики, который в собственной системе отсчета определяется выражением

$$\Delta S^\circ \geq \frac{\Delta Q^\circ}{T^\circ} , \qquad /19/$$

где $\Delta S^\circ$- изменение энтропии между двумя близкими равновесными состояниями, а равенство выполняется лишь для обратимых процессов.

Принимая во внимание то, что энтропия, будучи функцией числа состояний, должна быть инвариантной величиной, и привлекая /17/, придем ко второй формуле преобразования Отта для температуры /7/.

С помощью введения 4-вектора температуры[8]:

$$T_i = \frac{u_i}{c} T^\circ \quad (T_4 = i\,T) \qquad /20/$$

второй закон релятивистской термодинамики в произвольной системе отсчета может быть записан в следующей форме:

$$T_i \Delta S \geq \Delta Q_i \ . \qquad /21/$$

В заключении этого параграфа мы хотим подчеркнуть, что, вопреки встречающемуся мнению /см.,напр.,/5б/, классические законы термодинамики в системе покоя $K^\circ$ и принцип относительности должны однозначно определять эти законы в любой другой инерциальной системе отсчета K. При этом также однозначно должны определяться и релятивистские преобразования термодинамических величин.

### *2.3. Уравнение состояния идеального газа. Черное тело.*

*2.3.1.* Поскольку полученные в п. 1.1. результаты могут быть в общем отнесены и к случаю идеального газа, то мы воспользуемся ими ниже при рассмотрении проблемы инвариантности уравнения состояния идеального газа

$$p^\circ V^\circ = NkT^\circ, \qquad /22/$$

где N - число частиц, а k - постоянная Больцмана.

Для этого с учетом того, что $p^\circ = T^\circ_{aa}/3$ и $V^\circ = iV^\circ_4$, перепишем /22/ в форме

$$i\, T^\circ_{aa} V^\circ_4 = N\kappa\, T^\circ, \qquad /23/$$

где $\kappa = 3k$. Привлекая далее /12/, преобразуем /23/ к виду

$$T^\circ_{44} V^\circ_4 + \mu^* c^2 V^\circ_4 = N\kappa(iT^\circ). \qquad /24/$$

Отметим здесь, что первый член в левой части /24/ представляет собою, очевидно, полную энергию газа в $K^\circ$-системе.



Перейдем теперь к другой системе отсчета K. На основании формул преобразований /1.6г/, /1.10/ и с учетом равенств

$$V_1 = -i\beta V_4 , \quad (1+\beta^2)T_{41} = i\beta(T_{11} - T_{44}) , \qquad /25/$$

вытекающих из условий $V^\circ_1 = 0$ и $T^\circ_{14} = 0$ соответственно, получим

$$T_{44}V_4 + T_{41}V_1 + \mu^* c^2 V_4 = N\kappa(iT^\circ\gamma) . \qquad /24'/$$

Поскольку в K рассматриваемая равновесная система движется, то полная энергия газа будет определяться теперь суммой двух первых членов в левой части /24'/.

Таким образом можно утверждать, что требование лоренц-инвариантности уравнения состояния идеального газа будет выполнено, если температура газа в K-системе будет определяться величиной

$$T = T^\circ\gamma .$$

Очевидно, что последнее выражение есть не что иное как формула Отта для температуры /7/, которая была получена в п. 2.2 в рамках термодинамического определения температуры, т.е. на основе формулы преобразования для тепла и требования инвариантности второго закона термодинамики.

В общем случае релятивистское уравнение состояния идеального газа будет иметь вид

$$T_{ik}V_k + \mu^* c^2 V_i = N\kappa T_i , \qquad /26/$$

где $T_i$ - введенный выше 4-вектор температуры.

*2.3.2.* Рассмотрим термически равновесное электромагнитное излучение, заключенное внутри замкнутой полости со стенками определенной температуры*. В системе покоя полости поток электромагнитного излучения равен нулю в каждой точке, и в соответствии с законом Стефана-Больцмана, плотность энергии $h^\circ$ определяется формулой

$$h^\circ = aT^{\circ 4}, \qquad /27/$$

где $a$ - постоянная Стефана-Больцмана. Излучение обусловливает нормальное давление, которое в соответствии с равенством /1.2/ составляет

$$p^\circ = \frac{1}{3} aT^{\circ 4}. \qquad /28/$$

При этом полная энергия и энтропия равны соответственно

$$H^\circ = ah^\circ V^\circ = aT^{\circ 4} V^\circ \qquad /29/$$

и

$$S^\circ = \frac{4}{3} aT^{\circ 3} V^\circ. \qquad /30/$$

Здесь важно подчеркнуть следующее. Для того, чтобы удовлетворить требованию инвариантности энтропии и соответствующим формулам преобразования для плотности энергии и давления, нам необходимо, наряду с времениподобным 4-вектором температуры $T_i$, ввести три ортогональных пространственноподобных 4-вектора $t_i^{(\sigma)}$ со следующими компонентами в $K^\circ$-системе:

$$t_i^{(1)}(T^\circ, 0, 0, 0),\ t_i^{(2)}(0, T^\circ, 0, 0),\ t_i^{(3)}(0, 0, T^\circ, 0). \qquad /31/$$

Введенные векторы в общем могут описывать распределение температуры неравномерно нагретого тела. Тогда

* Эта система может служить некой моделью /ультрарелятивистской/ идеальной жидкости.



формула для энтропии может быть представлена в следующей форме

$$S^\circ = \frac{4}{3} a \left(\frac{1}{i} \epsilon_{iklm} t_k^{(\sigma)\circ} t_l^{(\rho)\circ} t_m^{(\delta)\circ}\right) V_i^\circ = \frac{4}{3} a \Sigma_i^\circ V_i^\circ, \qquad /32/$$

где $\Sigma_i^\circ = (1/i)\epsilon_{iklm} t_k^{(\sigma)\circ} t_l^{(\rho)\circ} t_m^{(\delta)\circ}$, а $\epsilon_{iklm}$ - символ Леви-Чевита. Нетрудно видеть, что записанная таким образом величина $S^\circ$ действительно является скаляром.

В соответствии с этим для величин $h^\circ$ и $H^\circ$ будем иметь

$$h^\circ = -aT_4^\circ \Sigma_4^\circ, \qquad H^\circ = \frac{1}{i} a T_4^\circ \Sigma_k^\circ V_k^\circ \qquad /33а,б/$$

или

$$\Theta_{ik}^\circ = aT_i^\circ \Sigma_k^\circ = \Theta_{ki}^\circ = aT_k^\circ \Sigma_i^\circ,\ G_i^\circ = aT_i^\circ \Sigma_k^\circ V_k^\circ. \qquad /34а,б/$$

В то же время для компонент $S_{\alpha\alpha}^\circ$, определяющих нормальное давление, найдем

$$S_{\alpha\alpha}^\circ = \frac{a}{3} t_\alpha^{(\sigma)\circ} \left(\frac{1}{i} \epsilon_{\alpha klm} t_k^{(\rho)\circ} t_l^{(\delta)\circ} T_m^\circ\right) = \frac{a}{3} t_\alpha^{(\sigma)\circ} \sigma_\alpha^{(\sigma)\circ} \qquad /35/$$

и

$$S_{ik}^\circ = \frac{a}{3} t_i^{(\sigma)\circ} \sigma_k^{(\sigma)\circ}. \qquad /35а/$$

Складывая /34а/ и /35а/, для полного тензора $T_{ik}$ в общем случае произвольной системы отсчета $K$ получим

$$T_{ik} = a\left(T_i \Sigma_k + \frac{1}{3} t_i^{(\sigma)} \sigma_k^{(\sigma)}\right). \qquad /36/$$

В заключение следует отметить, что в рамках нашего подхода импульс и энергия движущейся полости будут определяться /так же как и в случае идеальной жидкости/ формулами /1.11/:

$$G_1 = \frac{\beta}{c} H^\circ \gamma = \frac{\beta}{c} T^{\circ 4} V^\circ \gamma = \frac{\beta}{c} a T^4 V \gamma^{-4},$$

$$H = H^\circ \gamma = a T^{\circ 4} V^\circ \gamma = a T^4 V \gamma^{-4}, \qquad /37/$$

отличающимися от соответствующих общеизвестных формул /см., например,/5в/ /.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Планк М. Избранные труды. "Наука", М., 1975, с.467.
2. *Plank M. Ann.Physik. 1908, 26, p. 1.*
3. Эйнштейн А. Собр. научных трудов. "Наука", М., 1965, т. 1, с. 65.
4. *Strel'tsov V.N. Found.Phys. 1977, 7, p. 325.*

4а. Стрельцов В.Н. ОИЯИ, Р2-10912, Дубна, 1977.

4б. Стрельцов В.Н. ОИЯИ, Р2-11115, Дубна, 1977.

5. Меллер К. Теория относительности. Атомиздат, М., 1975, а/ § 6.6, б/ с. 167, в/ с. 176.
6. *Hasenöhrl F. Sber.Akad.Wiss.Wien, 1907, Bd. 116, p. 1391.*
7. *Ott H. Z.Phys. 1963, 175, p. 70.*
8. *Arzeliès H. Nuovo Cim. 1965, 35, p. 792.*
9. Стрельцов В.Н. ОИЯИ, Р2-11684, Дубна, 1978.



Рукопись поступила в издательский отдел
3 октября 1978 года.