М - 36

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 11913

В.Г.Маханьков, Г.Куммер, А.Б.Швачка

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОДНО- И ДВУМЕРНЫХ КЛАССИЧЕСКИХ Q -СОЛИТОНОВ

1978

P2 - 11913

В.Г.Маханьков, Г.Куммер, А.Б.Швачка

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОДНО- И ДВУМЕРНЫХ КЛАССИЧЕСКИХ Q -СОЛИТОНОВ

Направлено в "Physica Scripta"

Маханьков В.Г. и др. P2 - 11913

Исследование взаимодействия одно- и двумерных классических Q-солитонов

С помощью ЭВМ исследовано взаимодействие одномерных (x, t) и двумерных "заряженных" (x, y, t) Q-солитонов в рамках релятивистски-инвариантного уравнения Клейна-Гордона с насыщением нелинейности.

В результате исследования лобовых столкновений солитонов найдена область существования устойчивых решений.

Обнаружено существование долгоживущих связанных состояний двух солитонов и найдена область значений параметров, в которой солитоны взаимодействуют упруго. Показано, что в результате столкновения в области неустойчивости солитоны могут распадаться.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Makhankov V.G., Kummer G., Shvachka A.B. P2 - 11913

Investigation of Interactions of One- and Two-Space-Dimensional Classical Q Solitons

Interactions of one- and two-space-dimensional classical "charged" solitons (U(1) symmetry) have been investigated via computer in the framework of the Lorentz-invariant Klein-Gordon equation with the saturable nonlinearity. As a result of the computer experiments four qualitatively different types of soliton interaction have been found: 1) elastic and quasi-elastic interaction; 2) decay of solitons after the interaction; 3) decay of solitons through the resonance; 4) bound state of two Q solitons.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

I. Введение

В последние годы внимание специалистов, работающих в области теории поля и элементарных частиц, приковано к моделям, допускающим солитонные решения. Достаточно упомянуть лишь о некоторых международных научных форумах /1/ и обзорах /2/, посвященных этой проблеме.

Это неудивительно, поскольку солитоны - существенно нелинейные протяженные объекты - обладают интересными и весьма специфическими свойствами, как то: сохраняющимися зарядами, не связанными с симметрией лагранжиана (топологическими), возможностью построения относительно легких объектов из очень тяжелых составляющих (большой дефект массы - "невылетание кварков") и многими другими.

Мы не будем здесь более подробно останавливаться на свойствах солитонов, достаточно полно изложенных в упомянутых выше обзорах /2/, упомянем лишь, что в настоящее время наиболее полно в применении к теории элементарных частиц исследованы статические свойства солитонов. Мы имеем в виду солитоны в четырехмерном мире Минковского. Отметим, что устойчивые нетопологические солитонные решения существуют только в теориях с внутренней симметрией.

Естественно, что исследования проводились, начиная с наиболее простых моделей, например, Q - солитоны в ϕ^4- теории ($U(1)$ - симметрия); далее включались все более высокие симметрии (часть из которых могла быть спонтанно нарушена), т.е. модели $SU(2)\otimes SU(2)$, $SU(3)\otimes SU(3)$, а также $SU(3)\otimes SU(3)\otimes SU(3)$.

Интересно, что в достаточно сложной модели при надлежащем выборе параметров авторам /3/ удалось описать с удовлетворительной точностью по отношению к экспериментальным данным такие свойства нуклонов, как отношение магнитных моментов протона и нейтрона, отношение констант β - распада (аксиальной к векторной) и среднеквадратичный радиус нуклона.

Если статические свойства солитонов еще поддаются (и с успехом) аналитическому исследованию даже в рамках сложных моделей, то взаимодействие неодномерных солитонов удается пока исследовать лишь с помощью компьютера. Здесь также естественным является путь исследования от простых моделей к более сложным.

Целью настоящей работы является изучение динамики взаимодействия неодномерных <u>устойчивых</u> солитонов в рамках простой из числа возможных моделей с внутренней $U(1)$ симметрией: имеется в виду модель теории скалярного поля с насыщающейся нелинейностью, лагранжиан которой имеет вид

$$\mathcal{L} = \phi_t \phi_t^* - \phi_x \phi_x^* - \phi_y \phi_y^* - \ln(1+\phi\phi^*). \qquad (I)$$

Мы отдаем себе отчет в том, что данная модель является грубой, более того, она неренормируема, а это обстоятельство вызовет сложности при квантовании рассматриваемых ниже объектов, однако, поскольку мы работаем в рамках классической теории, это обстоятельство не является препятствием. Качественные характеристики изучаемого взаимодействия безусловно представляют интерес с точки зрения дальнейшего понимания более реалистичных и сложных моделей. План статьи следующий: в п.2 мы исследуем свойства плоских Q-солитонов в рамках модели (I) и их взаимодействие; в п.3 описаны особенности взаимодействия солитонов в трехмерном пространстве Минковского. Методика расчетов обсуждается в п.4.

2. <u>Одномерный случай</u>

Итак, мы ищем солитоноподобное решение задачи

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)\phi + \phi - \phi \cdot \frac{|\phi|^2}{1+|\phi|^2} = 0, \qquad (2)$$
$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \phi(\infty, t) = 0$$

с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \phi_t \phi_t^* - \phi_x \phi_x^* - \ln(1+\phi\phi^*) \qquad (3)$$

и гамильтонианом $\mathcal{H} = \phi_t \phi_t^* + \phi_x \phi_x^* + \ln(1+\phi\phi^*)$. (4)

Функция $\phi(x,t) = \psi(x)\, e^{i\mu t}$ (5)

с $\mu = const$ минимизирует функционал энергии (4) в системе покоя солитона. Поэтому вместо задачи (2) получаем граничную задачу

$$\psi_{xx} + \mu^2\psi - \frac{\psi}{1+\psi^2} = 0; \quad \psi_x(0) = 0, \quad \psi(\infty) = 0 \qquad (6)$$

с функцией Лагранжа

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\left[\psi_x^2 - \mu^2\psi^2 + \ln(1+\psi^2)\right] \qquad (7)$$

и Гамильтона

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left[\psi_x^2 + \mu^2\psi^2 - \ln(1+\psi^2)\right]. \qquad (8)$$

На рис. I изображен потенциал, в котором движется точечная фиктивная частица единичной массы (ψ - смещение, x - время)

$$U(\psi) = \frac{1}{2}\left[\mu^2\psi^2 - \ln(1+\psi^2)\right] \qquad (9)$$

при $\mu = 0.95$ и $\mu = 0.71$.

Стационарные точки потенциала (9) определяются из условия

$$\frac{dU}{d\psi} = \psi\left[\mu^2 - \frac{1}{1+\psi^2}\right] = 0. \qquad (10)$$

Отсюда следует, что

$$\psi_1 = 0, \quad \psi_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\mu^2}}$$

являются стационарными точками, причем

$$U(\psi_1) = 0, \quad U(\psi_2) = U(\psi_3) = \frac{1}{2}\left[1 - \mu^2 - \ln\left(\frac{1}{\mu^2}\right)\right].$$

Так как уравнение (6) описывает "консервативную" систему, то энергия фиктивной частицы, движущейся в потенциале $U(\psi)$

$$E = \frac{\psi_x^2}{2} + U(\psi), \quad \frac{dE}{dx} = 0 \qquad (11)$$

сохраняется. Из (II) найдем

$$\psi_x = \sqrt{2E + \ln(1+\psi^2) - \mu^2\psi^2}. \qquad (12)$$

На рис. 2 изображены траектории "консервативной" системы в фазовой плоскости (ψ, ψ_x) для энергии E = 0 и E = 3 при $\mu = 0.2$. Решения задачи (6) проходят через точку ($\psi = 0$, $\psi_x = 0$), поэтому, как следует из (II), E = 0.

Из соотношения (II) при E = 0 и в приближении

$$\ln(1+\psi^2) \sim \psi^2 - \frac{\psi^4}{2}, \qquad (13)$$

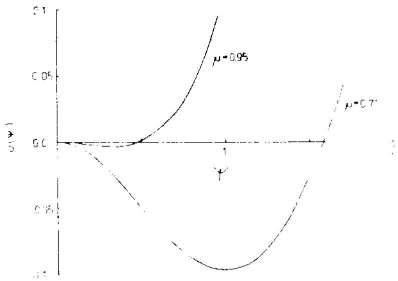


Рис. I. Потенциал $U(\psi)$ (см.(9)) при $\mu = 0.95$ и $\mu = 0.7I$.

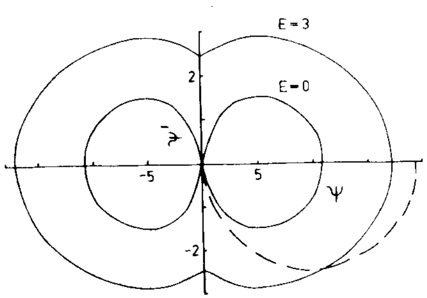


Рис. 2. Траектории "консервативной" системы (6) в фазовой плоскости (ψ, ψ') при $\mu = 0.2$. Штриховой линией показана траектория "диссипативной" системы (I8).

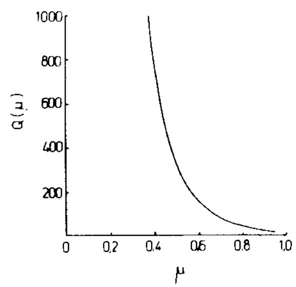


Рис.3. График функции $Q(\mu)$

справедливом при $|\psi| \ll$ I, мы получаем хорошо известное решение ϕ_2^4 - теории:

$$\psi(x) \simeq \frac{\sqrt{2(1-\mu^2)}}{\cosh(\sqrt{1-\mu^2}\cdot x)}. \tag{I4}$$

Численные расчеты по исследованию взаимодействия двух одномерных солитонов вида (I4) показали, что имеет место практически упругое взаимодействие солитонов в лобовых столкновениях при $1 > \mu > 0.9$ и скоростях солитонов $0.1 \le v < 0.9$. Расчет показал, что при $0.9 > \mu > 0.7$ наблюдается расплывание солитонов до столкновения, что связано с их неустойчивостью. Это указывает на значительное сокращение области устойчивости в модели (2) в сравнении с ϕ_2^4, где $1 > \mu \geq \frac{1}{2}$ /2/.

3. Двумерный случай

Рассмотрим далее следующую задачу Коши

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2)\phi + \phi - \phi \cdot \frac{|\phi|^2}{1+|\phi|^2} = 0,$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0, \quad \phi(\infty, \infty, t) = 0 \tag{I5}$$

с лагранжианом (I) и гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \phi_t \phi_t^* + \phi_x \phi_x^* + \phi_y \phi_y^* + \ln(1 + \phi\phi^*). \tag{I6}$$

Пусть

$$\phi(x,y,t) = \psi(r) e^{i\mu t}, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}. \tag{I7}$$

Тогда из (I5) получим граничную задачу

$$\psi_{rr} + \frac{1}{r}\psi_r + \mu^2\psi - \frac{\psi}{1+\psi^2} = 0$$
$$\psi_r(0) = 0, \quad \psi(\infty) = 0. \tag{I8}$$

Задача (I8) без учета члена $\frac{1}{r}\psi_r$ совпадает с задачей (6), поэтому рассуждения предыдущего параграфа относительно траекторий в фазовой плоскости (ψ, ψ_r) действительны и для задачи (I8) без члена $\frac{1}{r}\psi_r$ (см.рис.2).

В рамках модели (I8) энергия фиктивной частицы (II) в силу наличия "диссипативного" члена $\frac{1}{r}\psi_r$ не сохраняется с ростом r. Из (II) и (I8) следует, что

$$\frac{dE}{dr} = \psi_r\left[\psi_{rr} + \mu^2\psi - \frac{\psi}{1+\psi^2}\right] = -\frac{1}{r}\psi_r^2 < 0. \tag{I9}$$

Отсюда видно, что любая траектория в фазовой плоскости (ψ, ψ_r), начинаясь на оси $\psi\ (\psi_r = 0)$, пересечет кривые постоянной энергии и при $r \to \infty$ закончится в одной из трех точек $(\psi_1 = 0,\ \psi_r = 0)$, $(\psi_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\mu^2}},\ \psi_r = 0)$. Для нас представляют интерес только траектории, заканчивающиеся в точке ($\psi = 0$, $\psi_r = 0$) (см. рис. 2, штриховая линия), которые соответствуют безусловным решениям (I8), убывающим при $r \to \infty$.

Как известно /4/, устойчивое решение задачи (I5) существует в области

$$\frac{\mu}{Q}\frac{dQ}{d\mu} < 0 \quad , \qquad (20)$$

где"заряд" Q вычисляется по формуле

$$Q = \mu \int \psi^2 \, dx\, dy \quad . \qquad (21)$$

Для определения области устойчивости солитоноподобных решений нами была исследована зависимость $Q(\mu)$. График этой функции представлен на рис. 3, из которого видно, что $Q(\mu)$ монотонно убывает с ростом μ , выходя на плато при $\mu \to 1$.

Действительно, как отмечалось в /2e/, уравнение (I8) при $\mu \to 1$ переходит в уравнение Клейна-Гордона с кубической нелинейностью (КГЗ):

$$\Delta\psi - (1-\mu^2)\psi + \psi^3 = 0 \, . \qquad (22)$$

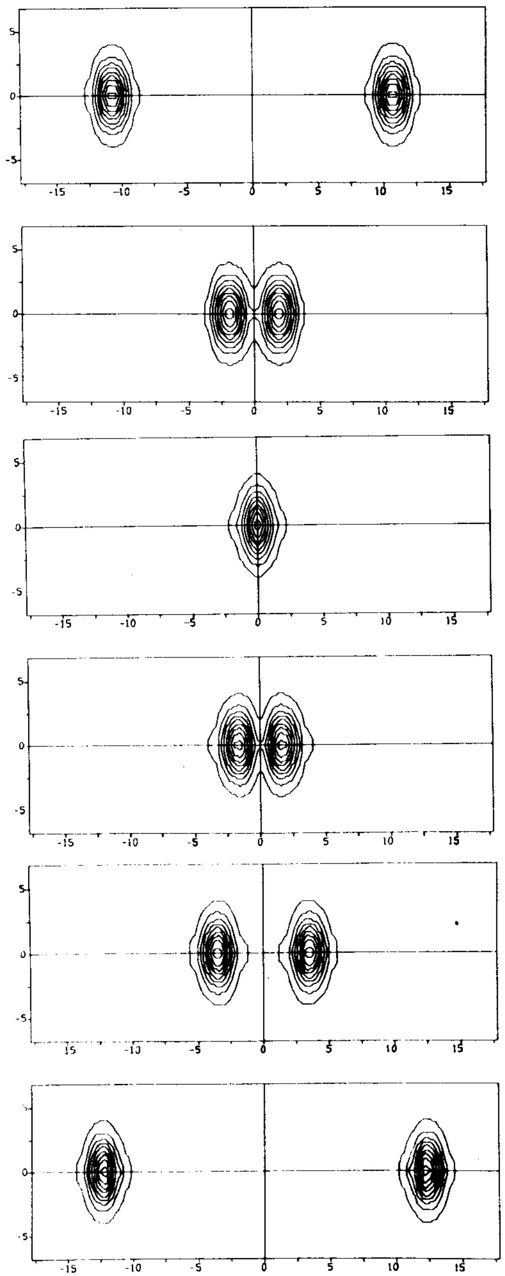
Поэтому, проделав масштабное преобразование $\bar{r} = \varkappa \cdot r,\ \bar{\psi} = \varkappa^{-1}\cdot\psi,\ \varkappa^2 = 1-\mu^2$, легко получим $Q(\mu) \propto \varkappa^{2-D}$ (D - размерность пространства), откуда при $D=2$ имеем $Q \to const$ в пределе $\mu \to 1$. Это означает, что в области $\mu \to 1$ можно ожидать проявление неустойчивости /2e/, что и было зафиксировано в численном эксперименте: полученные решения в области $\mu \geq 0.98$ оказались неустойчивыми.

В области $\mu < 0.2$ величина $Q(\mu)$ быстро растет при $\mu \to 0$. Динамика солитонов здесь не исследовалась.

Нами был разработан алгоритм и создан пакет программ на ФОРТРАНе для исследования с помощью ЭВМ взаимодействия двух двумерных солитонов в лобовых столкновениях. При этом скорости встречного движения солитонов были равны $v_1 = -v_2 = v$, а величина v изменялась в пределах от 0.I до 0.9 с шагом 0.05. Параметр μ варьировался в пределах от 0.2 до 0.99.

Результаты этих расчетов приведены на рис.4-I5. Как и следовало ожидать, в ультрарелятивистской области энергий $v \to 1$

Рис. 4. Упругое взаимодействие Q - солитонов при $v = 0.9$, $\mu = 0.7$. Картины линий уровня соответствуют плоским сечениям, приведенным на рис. 5. $H = \mathcal{H}/\mathcal{H}_{max}$, где $\mathcal{H}_{max} = 69{,}4 = \mathcal{H}(t=12)$.



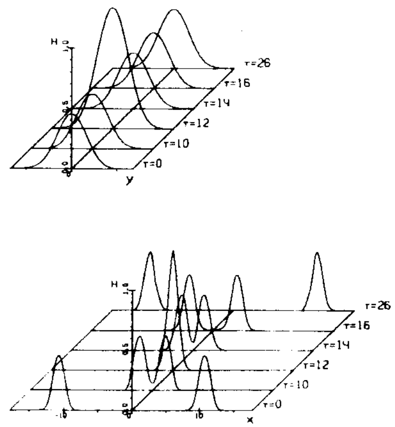


Рис. 5. Упругое взаимодействие Q - солитонов при $v = 0.9$, $\mu = 0.7$.

исследованные нами объекты ведут себя как "истинные" солитоны, взаимодействуя упруго *) и приобретая сдвиг в относительном положении. Однако при средних и, тем более, низких энергиях положение в корне меняется. В зависимости от величины заряда солитонов (или, что то же, от μ) и их скорости мы имеем широкий спектр нетривиальных последствий их взаимодействия: образование различных связанных состояний солитонов (типа бионов в одномерном пространстве /6/); распад солитонов после взаимодействия на конститьюенты ($\mu \simeq 0.95$); распад солитонов, происходящий через относительно короткоживущее связанное состояние солитонов - резонанс ($\mu \simeq 0.9$). Последние два вида взаимодействий были неизвестны ранее в двумерном мире.

Итак, мы имеем четыре качественно различных типа взаимодействий солитонов даже в рамках исследованной нами простейшей модели $\mathcal{U}$(I):

I) упругое и слабонеупругое взаимодействие (рис.4-7);
П) распад провзаимодействовавших солитонов (рис.8,9);
Ш) распад через резонанс (рис.I0,II);
IУ) образование связанного состояния (рис.I2-I4).

Наиболее интересными, с нашей точки зрения, являются взаимодействия П-IУ типов, поскольку взаимодействие I типа хорошо прослеживалось даже в соударениях неустойчивых пульсонов, изученных авторами ранее /7/. Коллапс солитонов в рамках задачи (I8), в отличие от уравнения КГЗ /7/, обнаружить не удалось, хотя и наблюдается тенденция к стягиванию солитонов, формирующихся в процессе взаимодействия при $\mu \sim 0.2$. Это объясняется тем, что при малых μ $|\psi(x,y,o)| \gg 1$ (см.рис.3), поэтому уравнение (I8) переходит в линейное волновое уравнение, решения которого в силу дисперсии имеют тенденцию к расплыванию.

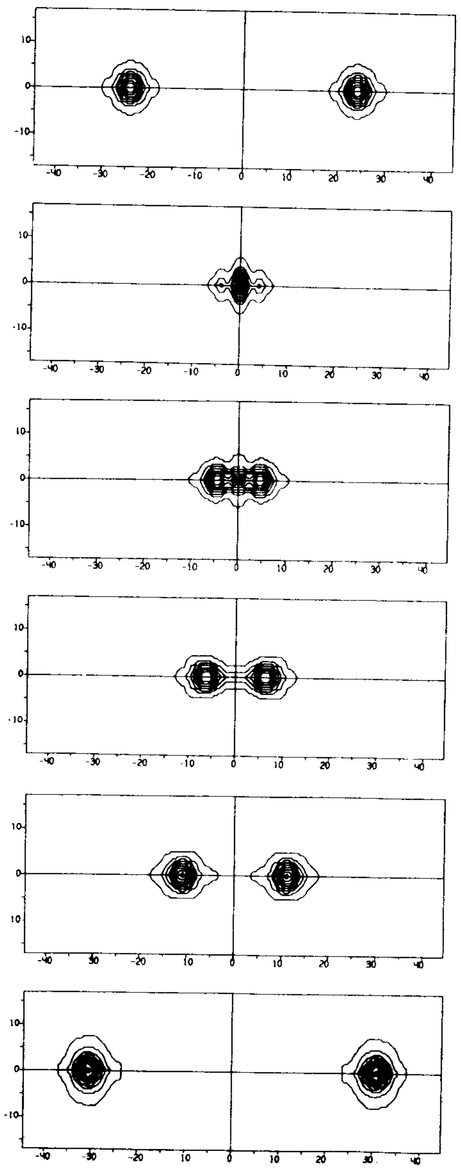
Отметим, что взаимодействия П и Ш типов проявляются лишь вблизи границы потери устойчивости $\mu \geq 0.9$, где каждый солитон ещё устойчив по отношению к малым возмущениям.

Области существования всех указанных выше типов взаимодействий, обнаруженные нами в численных экспериментах, представлены на рис.I5 на плоскости переменных (v , μ).

---

*) Этот результат был обнаружен ранее при численном исследовании взаимодействия одномерных ленгмюровских солитонов /5а/. При стремлении скорости к единице приближенная система уравнений оказалась интегрируемой /5б/.

Рис.6. Упругое взаимодействие Q - солитонов при $v = 0.5$, $\mu = 0.95$. Картины линий уровня соответствуют плоским сечениям, приведенным на рис.7. $H = \mathcal{H}/\mathcal{H}_{max}$, где $\mathcal{H}_{max} = 2,97 = \mathcal{H}(t = 50)$.



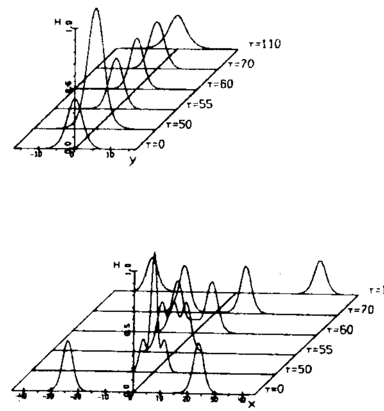
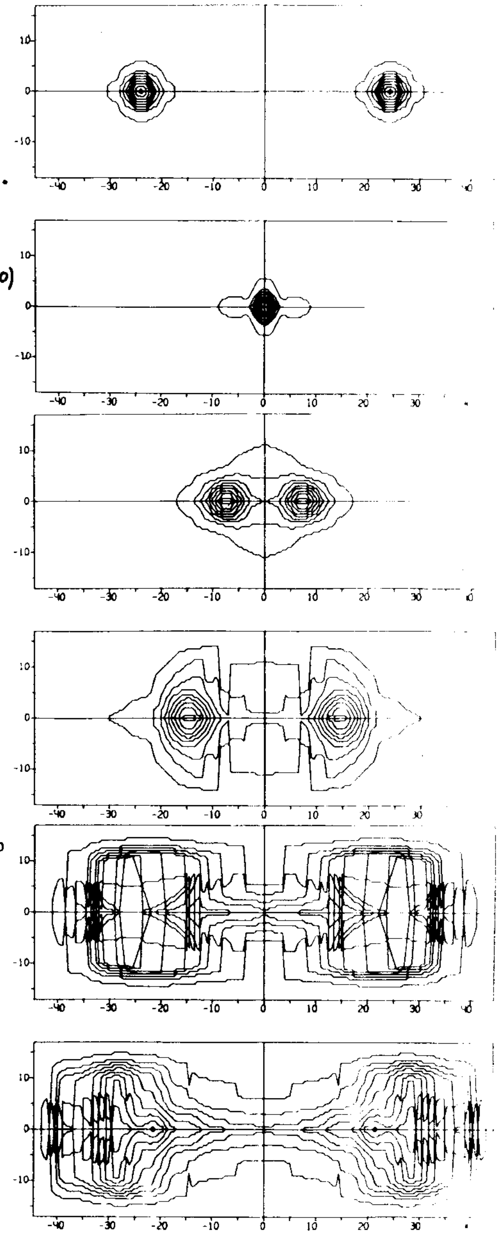


Рис.7. Упругое взаимодействие Q - солитонов при $v = 0.5$, $\mu = 0.95$.

Рис.8, Распад Q -солитонов после взаимодействия при $\nu = 0.3$, $\mu = 0.95$. Картины линий уровня соответствуют плоским сечениям, приведенным на рис. 9. $H = \mathcal{H}/\mathcal{H}_{max}$, где $\mathcal{H}_{max} = 2{,}75 = \mathcal{H}\,(t=80)$



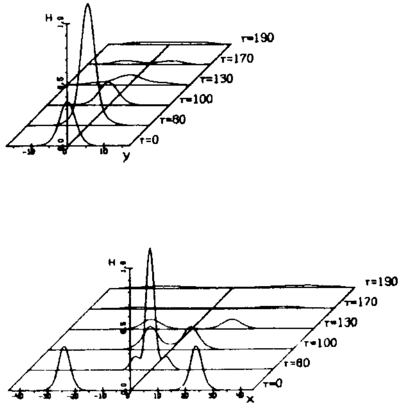
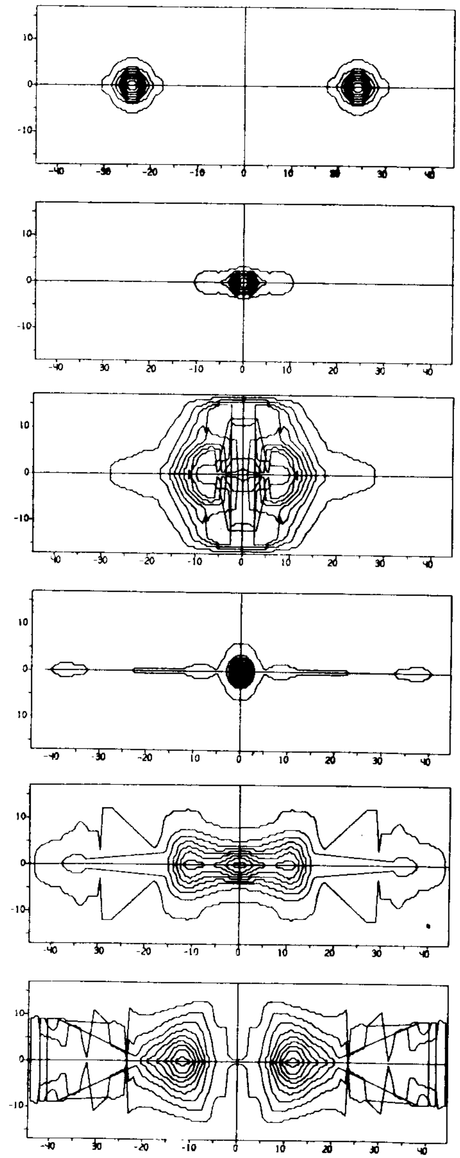


Рис.9. Распад Q - солитонов после взаимодействия при $\nu = 0.3$, $\mu = 0.95$.

Рис.I0. Распад Q - солитонов через резонанс после взаимодействия при $\nu = 0.2$, $\mu = 0.95$. Картины линий уровня соответствуют плоским сечениям, приведенным на рис.II. $H = \mathcal{H}/\mathcal{H}_{max}$, где $\mathcal{H}_{max} = 2{,}28 = \mathcal{H}\,(t = 120)$.



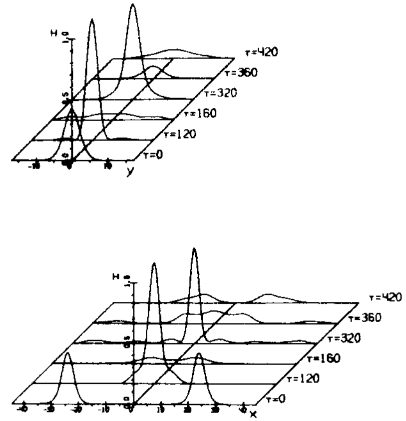
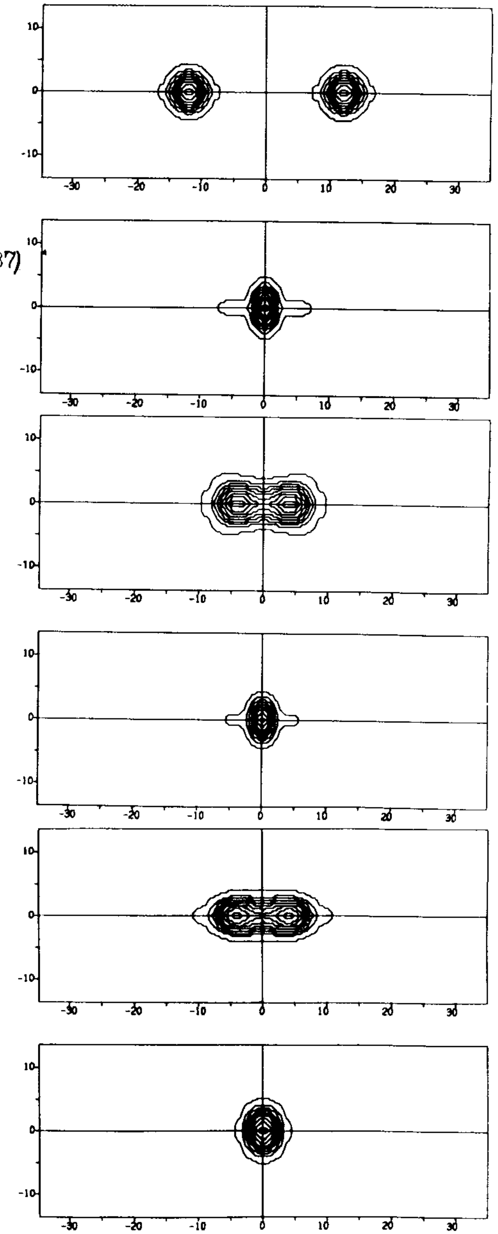


Рис.II. Распад Q - солитонов через резонанс после взаимодействия при $\nu = 0.2$, $\mu = 0.95$.

Рис.I2. Связанное состояние двух Q -солитонов при ν =0.I, μ =0.7. Картины линий уровня соответствуют плоским сечениям, приведенным на рис.I3. $H=\mathcal{H}/\mathcal{H}_{max}$, где $\mathcal{H}_{max}$ = I2,06 = $\mathcal{H}(t=87)$



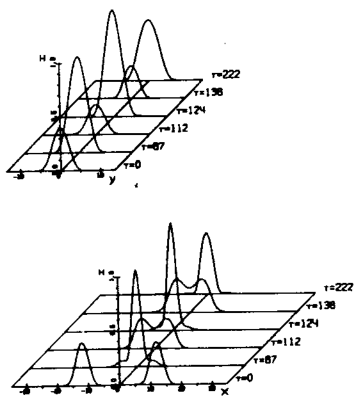


Рис.I3. Связанное состояние двух Q - солитонов при ν =0.I, μ =0.7

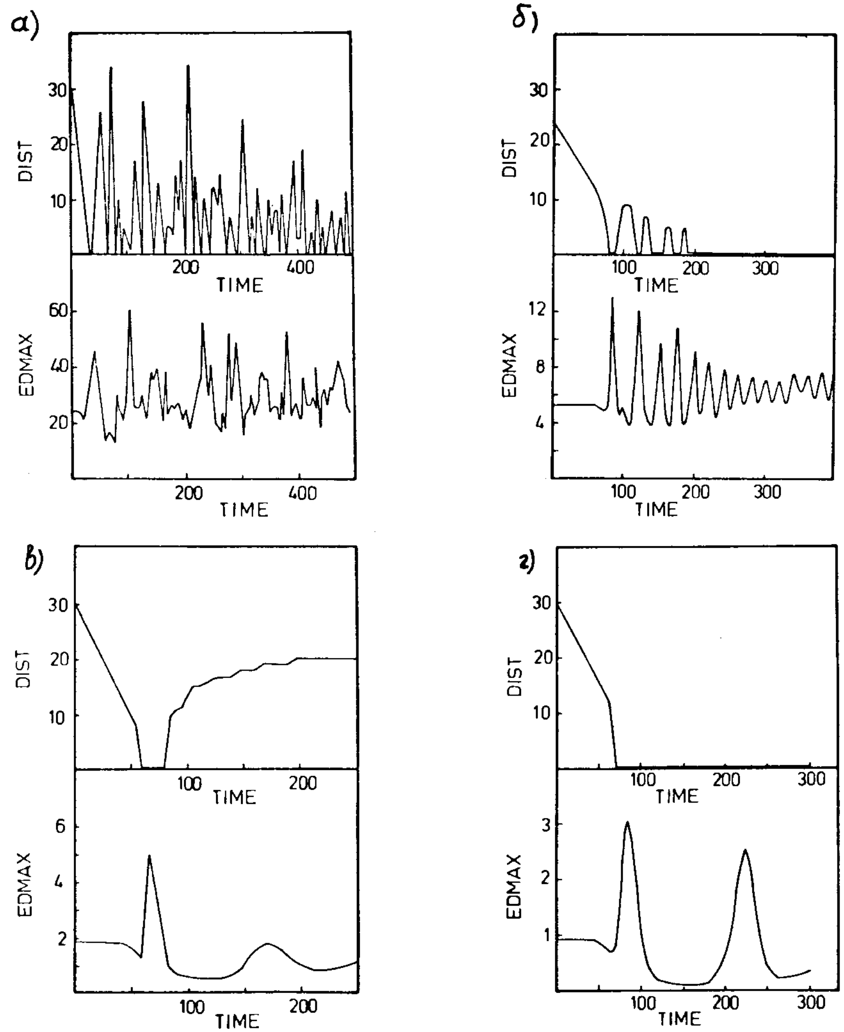


Рис.I4. Связанные состояния двух Q - солитонов. Зависимость величины максимума плотности энергии системы двух солитонов ($EDMAX = \mathcal{H}_{max}$) и положения максимума плотности энергии на оси X ($DIST$) от времени. По оси $DIST$ отложен номер точки разностной сетки.
а) μ = 0.2, ν = 0.3; б) μ = 0.7, ν = 0.I;
в) μ = 0.9, ν = 0.2; г) μ = 0.95, ν = 0.I5.

4. Методика расчетов

Для решения задачи (I5) в предположении (I7) необходимо решить граничную задачу (I8). Решение задачи (I8) является функцией параметра μ. Чтобы решить задачу (I8), требуется найти такое значение $\psi(0)$, которое соответствует безузловому решению (I8), убывающему при $r \to \infty$ (см.рис.2, штриховая линия). Подобрать приближенное значение $\tilde{\psi}(0)$ для $\psi(0)$ достаточно сложно, т.к., наряду со стационарной точкой $\psi_1 = 0$, потенциал (I0) имеет ещё две стационарные точки $\psi_{2,3} = \pm\sqrt{(1-\mu^2)\cdot\mu^{-2}}$ (причем, точка $\psi_1 = 0$ является седловой, а ψ_2, ψ_3 -долинными точками). Используя метод стрельбы, за достаточно большое время счета удается получить решения с заданной степенью точности.

Найденные нами значения $\psi(0)$ совпадают с приведенными, например, в работе /8/.

Безузловое численное решение задачи (I8), убывающее при $r \longrightarrow \infty$, аппроксимируем далее выражением вида

$$\tilde{\psi}(r) \simeq \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \exp\{\beta_i (r-\delta_i)^2\} . \qquad (23)$$

Путем выбора коэффициентов α_i, β_i и δ_i удается приближать $\tilde{\psi}(r)$ так, что для всех μ выполняется условие

$$\max \left| \psi(r) - \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \exp\{\beta_i (r-\delta_i)^2\} \right| \leqslant 0.005 \cdot \tilde{\psi}(0) . \qquad (24)$$

Используя аппроксимацию (23) и проделав преобразование Лоренца, переходим в движущуюся со скоростью v вдоль оси x систему координат:

$$\phi(x,y,t) \simeq \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \exp\{\beta_i (\sqrt{(\gamma(x-v\cdot t))^2 + y^2} - \delta_i)^2\} * \\ * \exp\{i\mu\gamma(t - v\cdot x)\} , \qquad (25)$$

где γ - релятивистский фактор.

Наличие приближенного выражения (25), аппроксимирующего неизвестное точное решение задачи (I5), позволяет исследовать динамику солитонов во встречных столкновениях.

Расчеты по исследованию взаимодействия двумерных солитонов проводились с помощью симметричной разностной схемы второго порядка точности по x, y и t, соответствующей уравнению (I5). Шаг по времени выбирался равным $\Delta t = 0.1$ и шаг по пространственным переменным $\Delta x = \Delta y$ выбирался из интервала $[0.1, 0.4]$ в зависимости от параметра μ. Действительная и мнимая части функции $\phi(x,y,t)$ вычислялись отдельно. В точках $t = 0, 1, 2, \ldots$

по формулам (4) и (I6) определялась плотность энергии поля. Для контроля точности расчетов мы использовали величину

$$\varepsilon_T = \frac{H_0 - H_T}{H_0} , \qquad (26)$$

характеризующую сохранение полной энергии системы; здесь H_0 - энергия при $t = 0$, H_T - энергия в момент времени $t = T$. Во всех расчетах максимальная величина $|\varepsilon_T| \leqslant 0.01$.

Для исследования устойчивости уединенных солитонов использовались разностные аналоги уравнения (2) для одномерных (x,t) -солитонов и уравнения (I5) для двумерных (x,y,t) - солитонов. Как показали расчеты, одномерные солитоны вида (I4) устойчивы в широкой области значений v лишь при $\mu \geqslant 0.9$. При $\mu < 0.9$ в процессе трансляции солитона максимальная величина плотности энергии $\mathcal{H}_{max}$ (см.(8)) убывает, что связано с расплыванием солитона вне области устойчивости. В двумерном случае устойчивость уединенного солитона исследовалась путем его трансляции вдоль оси x на расстояние, составляющее 5-6 "ширин" солитона. Расчеты при различных μ и $0.2 < v < 0.9$ подтвердили устойчивость двумерных солитонов в области $\mu < 0.98$.

С целью устранения влияния границ области $[x,y]$ на движение солитонов в разностные аналоги уравнений (2) и (I5) вводилась искусственная вязкость на границе области $[x,y]$ путем добавления члена ϕ_t. Отметим, что член ϕ_t включался в рассмотрение лишь в области, прилегающей к границе, и имеющей ширину 5% от размера области $[x,y]$. Наличие вязкости на границе области приводит к практически полному поглощению солитона на границе (так, в одномерном случае при $\mu = 0.95$ и $v = 0.8$ плотность энергии $\mathcal{H}_{max}$ уменьшалась на границе в 50 раз по сравнению со значением $\mathcal{H}_{max}$ вблизи границы).

Результаты расчетов с учетом вязкости на границе качественно повторяют результаты, полученные без члена ϕ_t в уравнениях (2), (I5). Так, например, если при $\mu = 0.95$ и $v = 0.2$ первый максимум плотности энергии в отсутствие члена ϕ_t возникает при $t = 120$ и равен $\mathcal{H}_{max} = 2.28$ (см.рис.10,11), то с учетом ϕ_t он равен $\mathcal{H}_{max} = 2.31$. Второй максимум плотности энергии возникает в отсутствие ϕ_t при $t = 320$ ($\mathcal{H}_{max} = 1,79$), а с учетом ϕ_t он возникает при $t = 290$ ($\mathcal{H}_{max} = 1.30$).

Расчеты по исследованию динамики Q-солитонов проводились на ЭВМ БЭСМ-6.

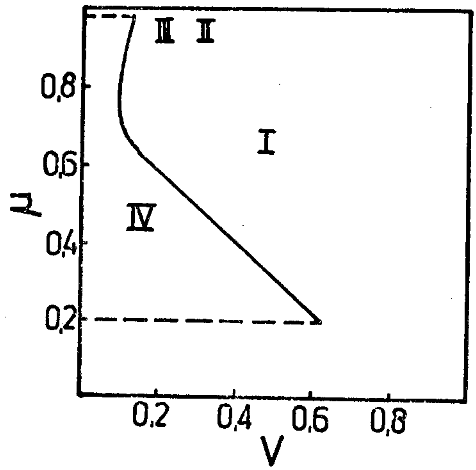


Рис. 15. Четыре типа взаимодействий Q – солитонов в плоскости переменных (V, μ):
I – упругое и слабонеупругое взаимодействия ;
II – распад провзаимодействовавших солитонов;
III – распад через резонанс;
IV – образование связанного состояния.

5. Заключение

Проведенное исследование свойств Q – солитонов позволяет утверждать, что даже в рамках простой $U(1)$ модели существует богатая картина взаимодействий, включающая распады квазичастиц, образование резонансов и связанных состояний.

В моделях с более высокими симметриями, часть из которых может быть спонтанно нарушена (см., например, /3/), область устойчивости солитонов напоминает исследованную нами. Так, например, сохраняющаяся величина, соответствующая данной симметрии (Q для $U(1)$, $\vec{T}$ для $SU(2)$ и т.д.), как функция μ имеет минимум при $D = 3$ и плато при $D = 2$ и $\mu \to 1$. Полученные нами результаты позволяют надеяться, что и в этих моделях будут проявляться, по крайней мере, описанные выше четыре типа взаимодействий.

Мы благодарим И.Л.Боголюбского за стимулирующие дискуссии и М.Куммер за помощь в оформлении рукописи.