ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

P2 - 11887

А.Б.Пестов

О ФИЗИЧЕСКОМ СМЫСЛЕ ГЕОМЕТРИИ ВЕЙЛЯ

1978

P2 - 11887

А.Б.Пестов

О ФИЗИЧЕСКОМ СМЫСЛЕ ГЕОМЕТРИИ ВЕЙЛЯ

Направлено на Межведомственный семинар "Гравитационные эффекты ОТО". /Минск, 1978/

Пестов А.Б. Р2 - 11887

О физическом смысле геометрии Вейля

Записаны уравнения Дирака в пространстве Вейля. Оказалось, что лагранжев формализм для этих уравнений требует удвоения размерности спинорного пространства, а лагранжиан инвариантен относительно группы фазовых преобразований, которая есть группа комплексных чисел по умножению.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Pestov A.B. P2 - 11887

On a Physical Meaning of the Weyl Geometry

The Dirac equations are written in the Weyl space. It turns out that the Lagrange formalism for these equations requires the 8-dimensional spinor space, and the Lagrangian is invariant under the group of phase transitions, which is a group of complex numbers.

The investigation has been performed at the Laboratory og Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

Гравитационное поле хорошо объясняется теорией Эйнштейна, которая выражает его в терминах римановой геометрии. Обобщение римановой геометрии, произведенное в 1918 году Вейлем, явилось продолжением линии Эйнштейна и имело цель геометризовать наряду с гравитационным другое дальнодействующее поле - электромагнитное. Открытая Вейлем геометрия определяется основным тензором $g_{\alpha\beta}$ и дополнительным вектором b_α, которые связаны условием [1]

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 2\, b_\alpha g_{\mu\nu} . \qquad /1/$$

По мысли Вейля, дополнительный вектор b_α, определяющий изменение длины при параллельном перенесении, должен совпадать с векторным потенциалом электромагнитного поля. Эта точка зрения столкнулась с серьезными трудностями [2].

С целью выявить новые возможности физической интерпретации векторного поля b_α запишем уравнения Дирака в пространстве Вейля. Задача записать уравнения Дирака в римановом пространстве была решена Фоком и Иваненко. Для нашей цели особенно полезными оказались работы [3,4]. Как известно [5], основная трудность при работе со спинорными полями заключается в том, что спинор имеет метрическую природу.

Покажем, что, как и в изученном в [3,4] случае, в пространстве Вейля возможно ввести спинорное поле, если от базиса dx^α, по отношению к которому обычно задаются все объекты, имеющие аффинную природу, перейти к базису

$$f^{\alpha} = f^{\alpha}_{\beta}\, dx^{\beta} ,$$

который диагонализует квадратичную форму $g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}$:

$$g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} = \eta_{\alpha\beta} f^{\alpha} f^{\beta} = (f^{0})^{2} - (f^{1})^{2} - (f^{2})^{2} - (f^{3})^{2}.$$

В базисе f^{α} дифференцирование по переменной x^{α} заменяется на оператор

$$e_{\alpha} = \tilde{f}^{\beta}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} ,$$

где $\tilde{f}^{\beta}_{\alpha}$ такие, что $f^{\alpha}_{\mu} \tilde{f}^{\mu}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}$. Операторы e_{α} образуют так называемый дуальный базис. Обозначая через $\Omega^{\alpha}_{\beta\mu}$ коэффициенты связности пространства Вейля в базисе f^{α}, получаем для ковариантных производных в этом базисе выражения

$$D_{\beta} A^{\alpha} = e_{\beta} A^{\alpha} + \Omega^{\alpha}_{\beta\mu} A^{\mu} , \qquad /2/$$

$$D_{\beta} A_{\alpha} = e_{\beta} A_{\alpha} - \Omega^{\mu}_{\beta\alpha} A_{\mu} . \qquad /3/$$

Коэффициенты связности $\Omega^{\alpha}_{\beta\mu}$ определяются из условия отсутствия кручения и условия

$$D_{\alpha} \eta_{\beta\mu} = 2 B_{\alpha} \eta_{\beta\mu} \qquad /4/$$

/условие /1/ в базисе f^{α} /. В результате получаем

$$\Omega^{\mu}_{\alpha\beta} = \omega^{\mu}_{\alpha\beta} + B_{\alpha} \delta^{\mu}_{\beta} + B_{\beta} \delta^{\mu}_{\alpha} - \eta^{\mu\nu} B_{\nu} \eta_{\alpha\beta} , \qquad /5/$$

где $\omega^{\mu}_{\alpha\beta}$ - коэффициенты римановой связности, подробный вывод которых дан в [3,4], $\eta^{\mu\nu}$ - тензор, взаимный с тензором $\eta_{\mu\nu}$,

$$\eta^{\mu\alpha} \eta_{\nu\alpha} = \delta^{\mu}_{\nu} .$$

Матрицы Дирака: γ_{α} , причем

$$\gamma_{\alpha} \gamma_{\beta} + \gamma_{\beta} \gamma_{\alpha} = 2 \eta_{\alpha\beta} .$$

При параллельном переносе матрицы γ_{α} меняются, подобно $\eta_{\alpha\beta}$, т.е.

$$D_{\alpha} \gamma_{\beta} = B_{\alpha} \gamma_{\beta} . \qquad /6/$$

Вычислим ковариантную производную матрицы $A = A^{\alpha} \gamma_{\alpha}$. Применяя /2/, /6/, получаем

$$D_{\alpha} A = e_{\alpha} A + \Omega^{\mu}_{\alpha\beta} \gamma_{\mu} A^{\beta} + B_{\alpha} A .$$

Это выражение можно представить в виде

$$D_{\alpha} A = e_{\alpha} A + \Omega_{\alpha} A - A \Omega_{\alpha} , \qquad /7/$$

где

$$\Omega_{\alpha} = \frac{1}{4} \Omega^{\mu}_{\alpha\nu} \Sigma^{\nu}_{\mu} ,$$

$$\Sigma^{\nu}_{\mu} = \frac{1}{2} (\gamma_{\mu} \gamma^{\nu} - \gamma^{\nu} \gamma_{\mu}), \quad \gamma^{\nu} = \eta^{\nu\mu} \gamma_{\mu} .$$

Действительно, так как

$$\Sigma^{\nu}_{\mu} \gamma_{\beta} - \gamma_{\beta} \Sigma^{\nu}_{\mu} = 2 (\delta^{\nu}_{\beta} \gamma_{\mu} - \eta_{\mu\beta} \gamma^{\nu}),$$

то

$$\Omega_\alpha \gamma_\beta - \gamma_\beta \Omega_\alpha = \frac{1}{2}(\Omega^\mu_{\alpha\beta}\gamma_\mu - \Omega^\mu_{\alpha\nu}\eta_{\mu\beta}\gamma^\nu).$$

Далее, записывая условие /4/ в развернутом виде

$$-\Omega^\mu_{\alpha\nu}\eta_{\mu\beta} - \Omega^\mu_{\alpha\beta}\eta_{\nu\mu} = 2B_\alpha\eta_{\nu\beta},$$

получаем

$$\Omega^\mu_{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu} + 2B_\alpha\eta_{\nu\beta} = -\Omega^\mu_{\alpha\nu}\eta_{\mu\beta}.$$

Следовательно,

$$\Omega_\alpha\gamma_\beta - \gamma_\beta\Omega_\alpha = \Omega^\mu_{\alpha\beta}\gamma_\mu + B_\alpha\gamma_\beta,$$

что и требовалось доказать. Таким образом, для ковариантной производной спинорного поля в пространстве Вейля получаем выражение

$$D_\alpha\Psi = e_\alpha\Psi + \Omega_\alpha\Psi. \qquad /8/$$

Это определение корректно, так как, согласно /7/, /8/, для спинора $\Phi = A\Psi$ получаем такой же вид ковариантной производной, что и для спинора Ψ.

Уравнение Дирака в пространстве Вейля получаем, заменяя обычную производную на ковариантную

$$i\gamma^\mu D_\mu\Psi = \frac{mc}{\hbar}\Psi.$$

Рассмотрим теперь пространство Вейля, основной тензор которого есть тензор Минковского. Тогда в декартовых координатах $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$, $f^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta$, $e_\alpha = \partial/\partial x^\alpha$,

$$\omega^\mu_{\alpha\beta} = 0, \quad \gamma^\mu\Omega_\mu = \frac{3}{2}\gamma^\mu B_\mu.$$

Следовательно, спинорное поле подчиняется в этом случае уравнению

$$i\gamma^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{3}{2}B_\mu\right)\Psi = \frac{mc}{\hbar}\Psi. \qquad /9/$$

Вид этого уравнения свидетельствует о том, что векторное поле B_μ не может быть отождествлено с векторным потенциалом электромагнитного поля.

Посмотрим, как уравнения /9/ могут быть получены с помощью вариационного принципа. Здесь мы пришли к весьма интересному результату. Лагранжев формализм требует удвоения размерности спинорного пространства. Необходимо независимо ввести еще одно спинорное поле Φ. Только тогда уравнения /9/ могут быть получены из следующего лагранжиана

$$\mathfrak{L} = i(\bar\Psi\gamma^\mu\partial_\mu\Phi - \partial_\mu\bar\Phi\gamma^\mu\Psi) - \frac{mc}{\hbar}(\bar\Psi\Phi + \bar\Phi\Psi) +$$

$$+\frac{3i}{2}B_\mu(\bar\Psi\gamma^\mu\Phi - \bar\Phi\gamma^\mu\Psi).$$

Этот лагранжиан инвариантен относительно группы фазовых преобразований

$$\Psi \Rightarrow \Psi' = Z\Psi; \quad \Phi \Rightarrow \Phi' = \frac{Z}{|Z|^2}\Phi, \qquad /10/$$

где Z - комплексное число.

Подведем некоторые итоги. Отправляясь от геометрии Вейля, мы пришли к имеющему геометрический смысл удвоению размерности спинорного пространства и весьма любопытной группе фазовых преобразований /10/. По-видимому, имеет смысл попытаться использовать эти результаты в теории элементарных частиц для интерпретации изодублетов p, n или в случае дублета лептонов e, μ. Однако изучение этого круга вопросов выходит за рамки настоящего сообщения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Норден А.П. Пространства аффинной связности. "Наука", М., 1976.
2. Паули В. Теория относительности. Гостехиздат, М.-Л., 1947.
3. Черников Н.А., Шавохина Н.С. ОИЯИ, Р2-6109, Дубна, 1971.
4. Шавохина Н.С. ТМФ, 1972, 10, с. 412.
5. Картан Э. Теория спиноров. М., ИЛ., 1947.

Рукопись поступила в издательский отдел 12 сентября 1978 года.