ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2-11879

О.В.Тарасов

ОБЛАСТЬ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ КОНСТАНТЫ СВЯЗИ И АСИМПТОТИКА КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

1978

Р2 - 11879

О.В.Тарасов

ОБЛАСТЬ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ КОНСТАНТЫ СВЯЗИ И АСИМПТОТИКА КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Направлено в "Lett. in Mathem. Physics"

Тарасов О.В. P2-11879

Область больших значений константы связи и асимптотика коэффициентов теории возмущений

Для некоторых функций в квантовой теории поля и квантовой механике, представляемых асимптотическими рядами, предложен метод приближенной оценки асимптотики при $g\to\infty$. При такой оценке используется несколько первых членов ряда теории возмущений, а также предположение о его суммируемости по Борелю и асимптотика коэффициентов теории возмущений высших порядков. Для функции Гелл-Манна-Лоу $\beta(g)$ в модели $\frac{4\pi^2}{3}g\phi^4_{(4)}$ получена асимптотика $\beta(g) \underset{g\to\infty}{\to} 1{,}8g^2$.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Tarasov O.V. P2 - 11879

The Infinite Coupling Limit and the Asymptotic of Coefficients of the Perturbation Expansion

For some functions in quantum field theory and quantum mechanics, presented by the asymptotic expansion in coupling constant g, the method for finding the approximate asymptotics when $g\to\infty$ is proposed.

Such an estimation requires the first exact terms of the perturbation theory, their high order asymptotic and supposition on the Borel summability. This method for the Gell-Mann-Low function $\beta(g)$ in the $\frac{4\pi^2}{3}g\phi^4_{(4)}$ model gives approximately $\beta(g) \underset{g\to\infty}{\to} 1{,}8 g^2$.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

Несмотря на имеющийся прогресс в исследовании асимптотики коэффициентов рядов теории возмущений (Т.В.) некоторых моделей квантовой теории поля и квантовой механики [1], эффективно использовать полученную при этом информацию, без учета других свойств исследуемых функций, не удается.

В работах [2] и [3] было показано, что в тех случаях, когда известна асимптотика функции для больших констант связи g, комбинированием точных коэффициентов Т.В. - a_k, асимптотики a_k при $k\to\infty$ и некоторых других свойств функции, удается построить для нее сходящуюся последовательность аппроксимантов, хорошо описывающих функцию во всем интервале значений g.

К сожалению, асимптотику при $g\to\infty$ мы знаем лишь для сравнительно простых моделей. Цель настоящей работы - показать, что такую асимптотику можно получить приближенно, зная несколько первых точных коэффициентов Т.В., что было проверено для тех случаев, когда поведение при больших g известно. Мы будем рассматривать модели, в которых для исследуемой функции, представляемой асимптотическим рядом:

$$f(g) \sim \sum a_k g^k, \tag{I}$$

асимптотика коэффициентов Т.В. имеет вид (см.[1,4]):

$$a_k \sim const\cdot\ k!\,k^\beta a^k (-1)^k \left(1+\frac{b_1}{k}+\frac{b_2}{k^2}+\ldots\right) \tag{2}$$

Ряд (I) просуммируем методом Бореля:

$$f(g) = \frac{1}{ag}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{x}{ag}}\, x^{\alpha'} F(x)\, dx, \tag{3}$$

где

$$F(x) = \sum \frac{a_k x^k}{\Gamma(k+\alpha')\cdot a^k} = \sum \tilde{a}_k x^k. \tag{4}$$

После конформного преобразования, отображающего интервал $0-\infty$ по переменной x, в интервал 0-I по новой переменной ω ($x = x(\omega)$, $x(0)=0$, $x(1)=\infty$), ряд Тейлора для функции F

$$F(x(\omega)) = \sum C_k \omega^k \tag{5}$$

сходится в круге $|\omega|<1$, при условии, что мы не отобразили каких-либо сингулярностей функции F на единичный круг[5].

Асимптотика $f(g)$ при $g \to \infty$ определяется поведением $F(x(\omega))$ при $\omega \to 1$. Характер поведения $F(\omega)$ при $\omega \to 1$ связан с асимптотикой C_K при $K \to \infty$, так как по известной теореме (см. [6]), если для двух функций:

$$f(\omega) = \sum f_K \omega^K \quad , \qquad \tilde{f}(\omega) = \sum \tilde{f}_K \omega^K \qquad f_K, \tilde{f}_K \geqslant 0$$

ряды сходятся при $0 < \omega < 1$, расходятся при $\omega = 1$ и при $K \to \infty$ $f_K \sim c \cdot \tilde{f}_K$, то $f(\omega) \sim c \tilde{f}(\omega)$ при $\omega \to 1$.

Следовательно, если мы знаем асимптотику C_K, то можем сравнивать $F(\omega)$ с более простой функцией, имеющей аналогичную асимптотику коэффициентов, и поведение которой при $\omega \to 1$ нам известно. Для $F(\omega)$, согласно формуле Коши-Адамара (см. [6]):

$$\lim |C_K|^{1/K} = 1.$$

Из этого условия мы можем заключить, что при $K \to \infty$ асимптотика C_K имеет вид (см. [9]):

$$C_K \sim K^{\mu} (\ln K)^{\nu} \tag{6}$$

$$C_K \sim \chi(K)\, e^{\beta K^{\rho}}, \tag{7}$$

где $0 < \rho < 1$, β - произвольная константа, а $\chi(K)$ - более медленная (при $K \to \infty$) по сравнению с экспонентой функция, например, функция типа (6). Для простейшего конформного преобразования

$$x = \frac{\omega}{1 - \omega} \tag{8}$$

коэффициенты C_K имеют вид:

$$C_K = \sum_{\ell=1}^{K} \frac{(K-1)!\, \tilde{a}_\ell}{(K-\ell)!\,(\ell-1)!} \tag{9}$$

Если в (9) для больших ℓ заменить a_ℓ асимптотическими коэффициентами $\tilde{\tilde{a}}_\ell$, с некоторым числом поправочных членов $1/\ell$:

$$\tilde{\tilde{a}}_\ell = const \cdot (-1)^{\ell} \left(1 + b_1/\ell + b_2/\ell^2 + \dots + b_p/\ell^p\right)$$

($\tilde{\tilde{a}}_\ell$ имеют такой вид, когда α' в (4) равно $\beta + 1$), то можно показать, что для C_K имеет место только лишь асимптотика (6). Рассмотрение (6) дает следующее поведение для $F(\omega)$:

$$C_K \sim K^{\mu} (\ln K)^{\nu}, \quad \mu \neq -m \ (m = 1, 2, 3, \dots), \quad F(\omega) \underset{\omega \to 1}{\sim} \frac{\left(\ln \frac{1}{1-\omega}\right)^{\nu}}{(1-\omega)^{1+\mu}}$$

$$C_K \sim \frac{(\ln K)^{\nu}}{K^{\mu}}, \quad \nu \neq -1, \quad F(\omega) \underset{\omega \to 1}{\sim} \frac{(-1)^{\mu-1} \cdot (1-\omega)^{\mu-1}}{\Gamma(\mu) \cdot (\nu+1)} \cdot \left(\ln \frac{1}{1-\omega}\right)^{\nu+1}$$

$$C_K \sim \frac{1}{K^{\mu} \ln K}, \quad \nu = -1, \quad F(\omega) \underset{\omega \to 1}{\sim} \frac{(-1)^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} (1-\omega)^{\mu-1} \ln \ln \frac{1}{1-\omega}.$$

Асимптотику C_K можно попытаться определить численными методами, используя первые члены теории возмущений. Введем функции:

$$\tilde{\mu}(K) = \ln \frac{C_K}{C_{K-1}} \Big/ \ln\left(1 + \frac{1}{K-1}\right) \tag{10}$$

$$\tilde{\nu}(K) = \ln \frac{C_K}{C_{K-1}\left(1 + \frac{1}{K-1}\right)^{\tilde{\mu}(K)}} \Big/ \ln \frac{\ln K}{\ln (K-1)} . \tag{11}$$

Из (6) видно, что $\lim\limits_{K \to \infty} \tilde{\mu}(K) = \mu$, $\lim\limits_{K \to \infty} \tilde{\nu}(K) = \nu$. Функции $\tilde{\mu}(K)$ и $\tilde{\nu}(K)$ известны нам в нескольких точках. Если мы знаем мало членов Т.В., то логарифмическую зависимость выделить трудно, поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только степенную зависимость C_K от K. Как показало численное исследование, при выборе α' в борелевском преобразовании (4), бо́льшем некоторого α'_c, функция $\tilde{\mu}(K)$ становится монотонной. В то же время из (3) следует, что предел $\tilde{\mu}(K)$ при $K \to \infty$ от α' не зависит, поэтому при $\alpha' > \alpha'_c$ для экстраполяции этой функции в область больших K используем диагональные Паде-аппроксиманты:

$$\tilde{\mu}^{[N,N]}(K) = \frac{A_N K^N + A_{N-1} K^{N-1} + \dots + A_0}{K^N + B_{N-1} K^{N-1} + \dots + B_0} \tag{12}$$

$$\lim_{K \to \infty} \tilde{\mu}^{[N,N]}(K) = A_N . \tag{13}$$

Описанным выше методом были исследованы некоторые модели.

I) "Нульмерный аналог" модели $g\varphi^4$:

$$J(g) = \frac{g}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2} - g\frac{x^4}{4!}}\, dx = \sum_{K=1}^{\infty} J_K g^K ; \quad J_K \sim \left(-\frac{2}{3}\right)^K \frac{K!}{K}$$

$$J(g) \xrightarrow[g \to \infty]{} 1.6 \cdot g^{3/4} .$$

Для конформного преобразования (8), при выборе параметра борелевского преобразования (4) α' меньшим некоторого α'_c, коэффициенты C_K, как этой модели, так и описанных ниже, имеют разные знаки, функция $\tilde{\mu}(\kappa)$ имеет осцилляции и Паде-аппроксимация не дает удовлетворительного результата. При $\alpha' > \alpha'_c$ коэффициенты C_K имеют одинаковый знак, осцилляции $\tilde{\mu}(\kappa)$ исчезают, а Паде-аппроксиманты дают хорошее приближение для μ, причем более близкое к точному приближение имеет место, когда α' немного больше α'_c. Результаты исследования для некоторых α' приведены в таблице I. (см. Приложение).

2) Основное состояние энергии ангармонического осциллятора (см./7/):

$$E_0(g) = \frac{1}{2} + \sum_{K=1}^{\infty} E_K g^K \quad , \qquad E_K \sim (-3)^K \frac{K!}{\sqrt{K}} \quad ,$$

$$E_0(g) \underset{g \to \infty}{\longrightarrow} 0.668\, g^{1/3} .$$

Характер поведения функции $\tilde{\mu}(\kappa)$ здесь такой же, как и в модели I). Результаты вычислений также приведены в таблице I Приложения.

3) Аналог функции Гелл-Манна-Лоу (Г.М.Л.) для релятивистского уравнения Томаса-Ферми (см./4/):

$$\psi(g) = \sum_{K=2}^{\infty} \psi_K g^K \quad ; \quad \psi_K \sim (-8)^K K! \cdot K^{3/2}$$

$$\psi(g) \to \sqrt{8} \cdot g^{3/2} .$$

Результаты приведены в таблице I. (см. Приложение).

4) Функция $W(g)$ в модели $g\varphi^4_{(3)}$ (см./8/):

$$W(g) = \sum_{K=1}^{\infty} W_K g^K \quad ; \quad W_K \sim (-0.14777422)^K K! \, K^{7/2}$$

Более устойчивые результаты дает рассмотрение не $W(g)$, а $W(g)+g$. Приближенная асимптотика для $W(g)$ с точностью до логарифмической зависимости имеет вид:

$$W(g) \underset{g \to \infty}{\longrightarrow} const \cdot g^{\mu} \quad , \quad const \approx 1.32 \div 1.0 \qquad (14)$$
$$\mu \approx 1.4 \div 1.6 .$$

Значения функции $\tilde{\mu}(\kappa)$ и A_N для этой модели приведены в таблице 2 Приложения.

5) Функция Г.М.Л. в модели $\frac{4\pi^2}{3} g \varphi^4_{(4)}$ (см./10/):

$$\beta(g) = \sum_{K=2}^{\infty} \beta_K g^K = 3g^2 - \frac{34}{3} g^3 + 154.32 g^4 - 2338 g^5 + \ldots$$

$$\beta_K \underset{K \to \infty}{\sim} (-2)^K K! \, K^{7/2} .$$

Использование 4[x] известных коэффициентов дает следующую приближенную оценку:

$$\beta(g) \underset{g \to \infty}{\longrightarrow} 1.8 \cdot g^2 \qquad (15)$$

(см. таблицу 3 Приложения), что согласуется с предсказанием работы /3/. Такая асимптотика свидетельствует о том, что $\beta(g)$ не имеет нетривиального нуля, и что рассматриваемая модель внутренне противоречива, в предположении, что имеет место борелевская суммируемость.

Исследование трех описанных здесь моделей, для которых асимптотика при $g \to \infty$ известна, показывает, что использование 4-6 коэффициентов Т.В. дает для μ и константы перед g приближение не хуже 15-20%, а значение A_N при увеличении N приближается к истинному значению μ.

В заключение автор выражает благодарность А.А.Владимирову, Д.И.Казакову и Д.В.Ширкову за обсуждение данной работы и полезные замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица I

Функция $\mu(\kappa)$

	$J(g) \xrightarrow[g\to\infty]{} 1.6\ g^{3/4}$			$E_0(g) \xrightarrow[g\to\infty]{} 0.668\ g^{1/3}$			$\Psi(g) \xrightarrow[g\to\infty]{} \sqrt{8}\ g^{3/2}$		
$\kappa \backslash \alpha'$	-0.25	I.25	2.75	0.5	2.5	4.5	0.25	3.75	7.25
2	0.58496	0.87447	0.92600	-I.I6993	0.4I504	0.65605	-	-	-
3	0.67067	0.84657	0.89800	I.44966	0.4300I	0.57069	I.7095I	2.36482	2.50097
4	0.69754	0.83II0	0.87932	0.4I69I	0.435I8	0.52793	2.08257	2.07876	2.I7476
5	0.7I078	0.82099	0.86574	0.20567	0.42677	0.50I55	I.7I567	I.9540I	2.03570
6	0.7I867	0.8I375	0.85534	0.23467	0.4I6I7	0.4828I	I.74835	I.882I0	I.95560
7	0.7239I	0.80827	0.84708	0.30379	0.40752	0.46843	I.7I574	I.83475	I.90237
8	0.72765	0.80393	0.84033	0.34334	0.40II6	0.45695	I.68569	I.8008I	I.86388
9	0.73045	0.80040	0.83469	0.35I4I	0.39639	0.44755	I.66644	I.77505	I.83446
I0	0.73262	0.79745	0.82989	0.34426	0.39258	0.43972	I.65342	I.75467	I.8II07
II	0.73436	0.79494	0.82576	0.3348I	0.38935	0.43308	I.64295	I.73806	I.79I9I
I2	0.73579	0.79278	0.822I5	0.32877	0.38650	0.42739	I.63378	I.7242I	I.77586
I3	0.73697	0.79089	0.8I897	0.32689	0.38395	0.42244	I.62578	I.7I244	I.762I6
I4	0.73798	0.78922	0.8I6I4	0.32778	0.38I65	0.4I809	I.6I89I	I.70229	I.75030
I5	0.73884	0.78773	0.8I360	0.32977	0.37959	0.4I424	I.6I303	I.69342	I.73990
I6	0.73958	0.78640	0.8II3I	0.33I70	0.37773	0.4I078	I.60793	I.68559	I.73069
I7	0.74023	0.785I9	0.80923	0.33303	0.37605	0.40768	I.60342	I.6786I	I.72245
I8	0.7408I	0.7840I	0.80732	0.33368	0.37453	0.40486	I.59937	I.67234	I.7I503
I9	0.74I32	0.78308	0.80558	0.33383	0.373I4	0.40230	I.5957I	I.66667	I.70830
20	0.74I78	0.782I6	0.80397	0.33368	0.37I87	0.39995	I.59239	I.66I50	I.702I6

N	Паде-аппроксиманты (A_N)								
I	0.74896	0.777I0	0.78559	-0.03I79	0.44580	0.39333	I.7I262	I.6363I	I.6900I
2	0.75000	0.76467	0.77I58	-0.0I599	0.388II	0.4I756	I.7I344	I.4927I	I.59552
3	0.75000	0.75938	0.763I7	0.3I3I3	0.37490	0.35945	I.6I87I	I.52I5I	I.55776
4	0.75000	0.75652	0.759I6	0.I6338	0.38660	0.360I2	I.64362	I.55354	I.5488I
5	0.75000	0.754888	0.75708	0.54490	0.35220	0.347I5	I.56658	I.53372	I.54880
6	0.75000	0.75386	0.75564	-0.00827	0.35249	0.34742	I.57022	I.53948	I.53738
7	0.75000	0.753I6	0.75456	I.45043	0.33780	0.34387	I.53875	I.52504	I.53875
8	0.75000	0.75264	0.75378	0.02604	0.34836	0.34248	I.53058	I.53I55	I.52934
9	0.75000	0.75224	0.75322	0.00994	0.32656	0.34248	I.52042	I.5I027	I.52960
I0	0.75000	0.75I93	0.7528I	0.56762	0.37I24	0.33905	I.53949	I.527II	I.52349

Таблица 2

функция $\mu(\kappa)$ модель $g\,\varphi^4_{(3)}$

$\kappa \backslash \alpha'$	5.25	6.25	7.25	8.25	9.25	I0.25	II.25	I2.25	I3.25
3	2.I6786	2.2402I	2.29547	2.33907	2.37434	2.40348	2.42795	2.44879	2.46676
4	I.90930	I.94663	I.98I06	2.0II89	2.03924	2.06345	2.08494	2.I0408	2.I2II9
5	I.80855	I.83247	I.856I5	I.87880	I.90005	I.9I978	I.93799	I.95477	I.97022
6	I.76702	I.77948	I.79433	I.8I0I0	I.82597	I.84I48	I.85640	I.8706I	I.88405
7	I.75898	I.75894	I.76466	I.77348	I.78394	I.795I8	I.80669	I.8I8I5	I.82939
N	Паде-аппроксиманты (A_N)								
I	I.579I5	I.57302	I.56656	I.563I7	I.56309	I.56584	I.57077	I.5773I	I.58498
2	I.29069	I.43647	I.48443	I.5I56I	I.54026	I.55865	I.57067	I.57723	I.57975

Таблица 3

Функция $\mu(\kappa)$ модель $g\varphi^4_{(4)}$

$\kappa \backslash \alpha$	I.25	2.25	3.25	4.25	5.25	6.25	7.25	8.25	9.25
3	I.86275	2.08969	2.22039	2.30546	2.36529	2.40966	2.44389	2.47II0	2.49325
4	2.50487	2.2722I	2.I94I3	2.I6997	2.I6695	2.I7266	2.I8I89	2.I9232	2.20288
5	2.25373	2.2I29I	2.I6552	2.I335	2.II488	2.I0527	2.I0I45	2.I0I26	2.I033I
	Паде-аппроксиманты (A_N)								
N									
I	2.I438I	2.I8270	2.0852I0	2.07033	2.02573	I.98432	I.94972	I.92I85	I.89984

Литература:

I. Л.Н.Липатов. ЖЭТФ, 72, 4II (I977); E.Brezin, J.C.Le Guillou, J.Zinn-Justin. Phys.Rev., D15, 1544 (1977); D15, 1558, 1977.
2. G.Parisi. Phys.Lett. 69B, 329, 1977.
3. D.I.Kazakov, D.V.Shirkov, O.V.Tarasov. Preprint JINR, E2-11571, Dubna, 1978.
4. В.С.Попов, В.Л.Елецкий, А.В.Турбинер. ЖЭТФ, 74, 495, I978.
5. J.J.Loeffel, Workshop on Pade approximants, eds. D.Bessis. J.Gilewicz and P.Mery , CEA (1976).
6. Е.Титчмарш. Теория функций, Гостехиздат, I95I.
7. C.M.Bender, T.T.Wu, Phys.Rev., 184, 1231 (1969).
8. J.C.Le Guillou, J.Zinn-Justin.Phys.Rev.Lett.,39, 95 (1977).
9. В.С.Попов. ЖЭТФ, 47, 2229, I964.
I0. F.M.Dittes, Yu.A.Kubyshin, O.V.Tarasov. Preprint JINR, E2-11100, Dubna, 1978.

Рукопись поступила в издательский отдел
7 сентября I978 года.