ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 11857

Б.М.Барбашов, А.Л.Кошкаров

НЕКОТОРЫЕ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТРУНЫ С МАССАМИ НА КОНЦАХ

1978

P2 - 11857

Б.М.Барбашов, А.Л.Кошкаров

НЕКОТОРЫЕ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТРУНЫ С МАССАМИ НА КОНЦАХ

Направлено в "Letters in Mathematical Physics"

Барбашов Б.М., Кошкаров А.Л. P2 - 11857

Некоторые решения граничных условий для релятивистской струны с массами на концах

Исследуется струнная модель мезона с массивными кварками на концах. В качестве функции действия масс кварков выбирается длина мировых траекторий концов струны (модель I), а также интеграл от геодезической кривизны мировых концов струны (модель II). Получены частные решения нелинейных граничных условий для этих систем. Рассмотрен нерелятивистский предел модели II.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Barbashov B.M., Koshkarov A.L. P2 - 11857

Some Solutions of Boundary Conditions for Relativistic String with Massive Ends

A string model of meson with massive quarks at ends is studied. At the action of the quark masses, we take (i) the length of world trajectories of the string ends (model I), and also (ii) the integral of the geodesic curvature of world trajectories of the string ends (model II). For these models, particular solutions of nonlinear boundary conditions are derived. For model II the nonrelativistic limit is analysed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

Релятивистская струна с массивными концами представляет собой одну из возможных моделей составной частицы /мезона/,в которой массивные точки,связанные струной,отождествляют с кварками [1-3]. С другой стороны, такая система представляет интересный пример релятивистской системы двух массивных точек, взаимодействующих определенным образом между собой /струна - переносчик взаимодействия между ними/. В нерелятивистском пределе взаимодействие с помощью струны приводит к линейному потенциалу для кварков, обеспечивающему неразлетание этих частиц [4]. Сложный вид нелинейных граничных условий для струны с массами, в отличие от безмассовой струны, до сих пор остается "камнем преткновения" при нахождении общих решений уравнений этой системы, несмотря на ряд найденных решений линеаризованной задачи [2,3], как частного случая общей нелинейной.

В данной заметке на основе результатов работы [5], где было найдено решение для полубесконечной нагруженной струны, предлагается метод построения целого класса решений для конечной нагруженной на концах струны. Рассматривается также другой способ введения масс в этой системе, когда массивная часть функции действия является не длиной мировой траектории, а определяется геодезической кривизной этих траекторий на мировой поверхности струны [3]. В силу теоремы Гаусса-Бонне такая функция действия для массивных точек связана с интегральной гауссовой кривизной мировой поверхности. Для этой системы также находится класс решений и рассмотрен нерелятивистский предел взаимодействия массивных концов струны.

Весьма плодотворным при исследовании граничных условий является применение геометрических методов, развитых в работах [6-10]. Показано, что в калибровке $[\dot{x}(\tau,\sigma) \pm \dot{x}'(\tau,\sigma)]^2 = -p^2$, введенной в работах [7,8], положение концов струны описывается простыми уравнениями в переменных τ, σ: $\sigma_1(\tau) = 0$, , $\sigma_2(\tau) = \pi$.

В первых двух параграфах исследуются две модели мезона, отличающиеся способом введения масс кварков. В третьем параграфе изучен пример нерелятивистского движения для модели II.

§1. Модель I

Рассмотрим струну с массами на концах с функцией действия следующего вида:

$$S = S_0 + \sum_{i=1}^{2} m_i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}[\tau, \sigma_i(\tau)]\right)^2}, \qquad /1/$$

где

$$S_0 = -\gamma \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)} d\sigma \sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2},$$

$$\frac{dx_\mu}{d\tau}[\tau, \sigma_i(\tau)] = \dot{x}_\mu(\tau, \sigma_i) + \dot{\sigma}_i(\tau) x'_\mu(\tau, \sigma_i).$$

Присутствие в /1/ неизвестных функций $\sigma_i(\tau)$ связано с произволом в выборе параметров τ, σ на мировой поверхности струны. Как будет показано ниже, определенный выбор координат на мировой поверхности /выбор калибровки/ однозначно фиксирует вид функций $\sigma_i(\tau)$, $i = 1,2$.

Варьирование действия /1/ по функциям $x_\mu(\tau, \sigma)$ приводит к уравнениям движения и граничным условиям, которые в ортогональных координатах /изотермические или конформные координаты/

$$[\dot{x}(\tau,\sigma) \pm x'(\tau,\sigma)]^2 = 0, \qquad /2/$$

выглядят следующим образом:

$$\ddot{x}_\mu(\tau,\sigma) - x''_\mu(\tau,\sigma) = 0, \qquad /3/$$

$$(-1)^{i+1} m_i \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\frac{dx_\mu}{d\tau}(\tau,\sigma_i)}{\sqrt{[\frac{dx}{d\tau}(\tau,\sigma_i)]^2}}\right) = \gamma[x'_\mu(\tau,\sigma_i) + \dot{\sigma}_i(\tau)\dot{x}_\mu(\tau,\sigma_i)], \; i=1,2. \qquad /4/$$

Уравнения /2/,как известно, не фиксируют полностью параметры τ, σ на струне и допускают преобразования, содержащие произвольные функции, оставляющие инвариантными уравнения /2/ и /3/. При этом функции $\sigma_i(\tau)$, описывающие положение концов струны, также являются произвольными. Как показано в работах [5, 11], варьирование действия по этим функциям приводит к уравнениям, которые являются следствием граничных условий. Однако, как только параметры τ и σ фиксируются, сразу же определяется и вид функций $\sigma_i(\tau)$ [11]. Естественно стремиться так выбрать калибровку, чтобы $\sigma_i(\tau)$ были, по возможности, простыми.

В рассматриваемых случаях функции $\sigma_i(\tau)$ будут константами, если калибровку выбрать следующим образом [8]:

$$[\ddot{x}(\tau,\sigma) \pm \dot{x}'(\tau,\sigma)]^2 = -4p^2, \qquad /5/$$

где p - произвольная константа. Действительно, если спроектировать уравнения /4/ на вектор $\frac{d}{d\tau}\left(\frac{x'_\mu + \dot{\sigma}_i \dot{x}_\mu}{\sqrt{(\frac{dx}{d\tau})^2}}\right)$, то получим

$$(\ddot{x}\dot{x}')[(1+\dot{\sigma}_i^2)^2 + 4\dot{\sigma}_i^2] + 2\dot{\sigma}_i(1+\dot{\sigma}^2)(\ddot{x}^2 + \dot{x}'^2) = 0, \; i=1,2,$$

откуда, с учетом /5/, следует, что $\dot{\sigma}_i(\tau) = 0$, $i = 1,2$. Далее везде будем считать $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = \pi$.

Будем искать решение уравнения /3/, удовлетворяющее граничным условиям /4/. Решение для полубесконечной струны, удовлетворяющее первому из условий /4/, получено в [5]. Это решение имеет следующий вид

$$x_\mu(\tau,\sigma) = \psi_{1\mu}(\tau+\sigma) + \psi_{2\mu}(\tau-\sigma),$$

где функции $\psi_{1,2\mu}(\tau)$ определяются единичным вектором $e_\mu(\tau)$:

$$\psi'_{i\mu}(\tau) = \frac{1}{2}[\xi(\tau)e_\mu(\tau) - \frac{m_1}{\gamma}(-1)^i \dot{e}_\mu(\tau)], \quad i = 1,2,$$

$$\xi^2(\tau) = -\frac{m_1^2}{\gamma^2}\dot{e}^2(\tau). \qquad /6/$$

Это решение удовлетворяет условию /4/ на границе $\sigma_1 = 0$, а также уравнениям движения /3/ и условиям /2/. Остается удовлетворить второй границе при $\sigma_2 = \pi$. Для этого достаточно потребовать, чтобы

$$\xi(\tau+\pi) = -\xi(\tau), \quad e_\mu(\tau+\pi) = -e_\mu(\tau).$$

Тогда будет удовлетворено уравнение /4/ на второй границе $(\sigma_2 = \pi)$ в частном случае $m_1 = m_2 = m$. В другом частном случае, когда $m_2 = 0$ /полунагруженная струна/, граничные условия удовлетворены, если

$$\xi(\tau + 2\pi) = -\xi(\tau), \quad e_\mu(\tau + 2\pi) = -e_\mu(\tau). \qquad /7/$$

Решение /6/ удобно записать в другой форме. Пользуясь представлением для единичного вектора:

$$e_\mu(\tau) = \frac{1}{E(\tau)}\{a_\mu + \sum_{i=1}^{n-2} b_{i\mu}E_i(\tau) + \frac{c_\mu}{2}[E^2(\tau) + \sum_{i=1}^{n-2} E_i^2(\tau)]\}, \qquad /8/$$

где постоянные векторы a_μ, c_μ, $b_{i\mu}$ образуют специальный базис в n-мерном псевдоэвклидовом пространстве /8/

$$a^2 = c^2 = ab_i = cb_i = 0, \; b_i b_j = \delta_{ij}, \quad i,j = 1,2,\dots,n-2,$$

а $E(\tau)$ и $E_i(\tau)$ - произвольные функции, получим решение в этом базисе

$$\psi'_{1\mu}(\tau) = \frac{m}{2\gamma}\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-2}\dot{E}_i^2(\tau)}}{E^2(\tau)}e^{-\theta}[a_\mu + \sum_{i=1}^{n-2} b_{\mu i}(E_i + \frac{\dot{E}_i E}{\sqrt{\sum_j \dot{E}_j^2}}e^{\theta}) +$$

$$+\frac{c_\mu}{2}\sum_{i=1}^{n-2}(E_i + \frac{\dot{E}_i E e^{\theta}}{\sqrt{\sum_j \dot{E}_j^2}})^2],$$

$$\psi'_{2\mu}(\tau) = \frac{m}{2\gamma}\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-2}\dot{E}_i^2}}{E^2(\tau)}e^{\theta}[a_\mu + \sum_{i=1}^{n-2} b_{\mu i}(E_i - \frac{\dot{E}_i E}{\sqrt{\sum_j \dot{E}_j^2}}e^{-\theta}) +$$

$$+\frac{c_\mu}{2}\sum_{i=1}^{n-2}(E_i - \frac{\dot{E}_i E}{\sqrt{\sum_j \dot{E}^2}}e^{-\theta})^2], \qquad /9/$$

где

$$e^{\pm\theta} = \frac{1}{\sqrt{\sum_j^{n-2} \dot{E}_j^2}}\{\sqrt{\dot{E}^2 + \sum_{j=1}^{n-2}\dot{E}_j^2} \pm \dot{E}\}.$$

Условия /7/ в новом базисе эквивалентны следующим:

$$E(\tau + 2\pi) = -E(\tau), \; E_i(\tau + 2\pi) = E_i(\tau), \; i = 1,2,\dots,n-2. \qquad /10/$$

Решение в форме /9/, /10/ удовлетворяет уравнениям движения, дополнительным условиям /2/ и граничным условиям для полунагруженной струны. Остается еще наложить на решение условие калибровки /5/. Подстановка формул /9/ в /5/ дает

$$\psi''^2_1(\tau) = -\frac{m^2}{4\gamma^2}\frac{\sum_{j=1}^{n-2}\dot{E}_j^2}{E^4(\tau)}e^{-2\theta}\sum_{i=1}^{n-2}(\dot{E}_i + \frac{d}{d\tau}\frac{\dot{E}_i E}{\sqrt{\sum_j \dot{E}_j^2}}e^{\theta})^2 = -p^2,$$

$$\psi_2''^2(\tau) = -\frac{m^2}{4\gamma^2}\,\frac{\sum\limits_{j=1}^{n-2}\dot{E}_j^2}{E^4(\tau)}\,e^{2\theta}\sum_{i=1}^{n-2}\Big(\dot{E}_i - \frac{d}{d\tau}\,\frac{\dot{E}_i E}{\sqrt{\sum_j \dot{E}_j^2}}\,e^{-\theta}\Big)^2 = -p^2. \qquad /11/$$

Вместо двух уравнений здесь в действительности есть только одно, так как легко убедиться, что $\psi_1''^2(\tau) = \psi_2''^2(\tau)$. Следовательно, из $n-1$ произвольных функций E и E_i, входящих в /9/, независимыми являются $n-2$ функции. Однако выразить явно из /11/, например, E через E_i и тем самым разрешить условие калибровки /5/, не удается.

Таким образом, получено частное решение для полунагруженной струны в виде /9/, формально удовлетворяющее всем требованиям.

§2. Модель II

Рассмотрим теперь струну с функцией действия вида

$$S = S_0 + \mu \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int\limits_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)} d\sigma\, R\sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2}, \qquad /12/$$

где $R = \dfrac{R_{12,12}}{\dot{x}^2 x'^2 - (\dot{x}x')^2}$ - гауссова кривизна мировой поверхности струны, а величина $R_{12,12}$ представляет собой единственную существенную компоненту тензора кривизны двумерного риманова пространства [12]. По теореме Гаусса-Бонне второе слагаемое в /12/ можно преобразовать к контурному интегралу от геодезической кривизны мировых траекторий концов струны. Таким образом, массивная часть действия /12/ определяется не длиной мировых линий концов, как обычно, а их геодезической кривизной [3].

Очевидно, что уравнения движения, следующие из /12/, совпадут /с учетом /2// с уравнениями /3/, а граничные условия имеют следующий вид

$$x'_\mu(\tau,\sigma_i) + \dot{\sigma}_i(\tau)\,\dot{x}_\mu(\tau,\sigma_i) = \frac{\mu}{2\gamma}\,\frac{\partial}{\partial\tau}\Big\{\frac{1}{\dot{x}^2}\Big[2x'_\mu - \frac{1}{\dot{x}^2}\,\frac{\partial\dot{x}^2}{\partial\sigma}\,\dot{x}_\mu - \frac{1}{\dot{x}^2}\,\frac{\partial\dot{x}^2}{\partial\tau}\,x'_\mu\Big]\Big\},$$

$$\ddot{x}_\mu(\tau,\sigma_i) = \frac{1}{2\dot{x}^2}\Big[\frac{\partial\dot{x}^2}{\partial\tau}\,x_\mu + \frac{\partial\dot{x}^2}{\partial\sigma}\,x'_\mu\Big], \quad i = 1,2. \qquad /13/$$

Как и в модели I, можно показать, что в калибровке /5/ справедливы уравнения $\dot{\sigma}_i(\tau) = 0$, $i = 1,2$. Поэтому положим в /13/ $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = \pi$.

Для простоты ограничимся изучением граничных условий /13/ в трехмерном пространстве и воспользуемся известными из геометрии деривационными формулами Гаусса

$$\ddot{x}_\mu = \frac{1}{2\dot{x}^2}\Big[\frac{\partial\dot{x}^2}{\partial\tau}\,\dot{x}_\mu + \frac{\partial\dot{x}^2}{\partial\sigma}\,x'_\mu\Big] - b_{00}n_\mu,$$

$$\dot{x}'_\mu = \frac{1}{2\dot{x}^2}\Big[\frac{\partial\dot{x}^2}{\partial\sigma}\,\dot{x}_\mu + \frac{\partial\dot{x}^2}{\partial\tau}\,x'_\mu\Big] - b_{01}n_\mu, \qquad /14/$$

и Вейнгартена

$$\dot{n}_\mu = \frac{1}{\dot{x}^2}\big[-b_{00}\dot{x}_\mu + b_{01}x'_\mu\big], \quad n'_\mu = \frac{1}{\dot{x}^2}\big[-b_{01}\dot{x}_\mu + b_{00}x'_\mu\big], \qquad /15/$$

которые для данного случая получены в [8]. Входящие в /14/ и /15/ величины $b_{\mu\nu}$ являются коэффициентами второй квадратичной формы, а $n_\mu(\tau,\sigma)$ - нормаль к мировой поверхности струны, $n^2 = -1$.

Сравнивая /13/ и /14/, замечаем, что $b_{00}(\tau,\sigma_i) = 0$. Теперь подставим деривационные формулы в условие калибровки /5/. Тогда

$$[b_{00}(\tau,\sigma) \pm b_{01}(\tau,\sigma)]^2 = 4p^2.$$

Это условие можно удовлетворить двумя способами:

$$b_{00}(\tau,\sigma)=0, \quad b_{01}^2(\tau,\sigma) = 4p^2, \tag{/16/}$$

либо

$$b_{00}^2(\tau,\sigma)=4p^2, \quad b_{01}(\tau,\sigma)=0. \tag{/17/}$$

Граничные условия подсказывают нам, что надо выбрать условия /16/, которые соответствуют асимптотическим координатам на мировой поверхности струны /8/, в то время как /17/ означает выбор линий кривизны в качестве координат.

Теперь подставим вторую из формул /14/ в первое граничное условие /13/ и выполним дифференцирование по τ:

$$\gamma x_\mu'(\tau,\sigma_i) = \mu\left[\dot{n}_\mu \frac{b_{01}}{\dot{x}^2} + n_\mu \frac{\partial}{\partial\tau} \frac{b_{01}}{\dot{x}^2}\right], \quad i=1,2.$$

Воспользовавшись формулами Вейнгартена, запишем это равенство в виде

$$\left[\gamma - \mu\left(\frac{b_{01}}{\dot{x}^2}\right)^2\right] x_\mu' = n_\mu \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{b_{01}}{\dot{x}^2}\right), \quad i=1,2. \tag{/18/}$$

Проектируя /18/ на $x_\mu'(\tau,\sigma_i)$ и $n_\mu(\tau,\sigma_i)$ соответственно, получим

$$\left(\frac{b_{01}}{\dot{x}^2}\right)^2 = \frac{\gamma}{\mu}, \quad \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{b_{01}}{\dot{x}^2}\right) = 0,$$

или

$$\dot{x}^2(\tau,\sigma_i) = b_{01}\sqrt{\frac{\mu}{\gamma}}, \quad i=1,2. \tag{/19/}$$

Отсюда, между прочим, видно, что $\mu>0$, так как $\gamma>0$. В асимптотических координатах /16/ имеем

$$\dot{x}^2(\tau,\sigma_i) = 2p\sqrt{\frac{\mu}{\gamma}}, \quad i=1,2. \tag{/20/}$$

Таким образом, первая пара граничных условий в трехмерном пространстве сводится к /19/. Вторая пара граничных условий /13/ с учетом /20/ запишется в виде

$$\ddot{x}_\mu(\tau,\sigma_i) = \frac{1}{4p^2}\sqrt{\frac{\gamma}{\mu}}\frac{\partial x'^2}{\partial\sigma} x_\mu'(\tau,\sigma_i). \tag{/21/}$$

Будем решать граничные условия /21/. С учетом /2/ уравнение /21/ на границе $\sigma_1=0$ записывается следующим образом:

$$\psi_{1\mu}''(\tau)+\psi_{2\mu}''(\tau) = \Gamma(\psi_2'\psi_1''-\psi_1'\psi_2'')[\psi_{1\mu}'(\tau)-\psi_{2\mu}'(\tau)], \quad \Gamma=-\frac{1}{2p}\sqrt{\frac{\gamma}{\mu}}. \tag{/22/}$$

Оно решается с помощью подстановки

$$\psi_{i\mu}'(\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\Gamma}}e_\mu(\tau) - (-1)^i \dot{e}_\mu(\tau)\chi(\tau), \quad i=1,2,$$

где $e_\mu(\tau)$ - единичный вектор, а $\chi(\tau)$ связано с $e_\mu(\tau)$:

$$\chi^2(\tau) = -\frac{1}{4\Gamma}\frac{1}{\dot{e}^2(\tau)}.$$

Используя представление /8/ для вектора $e_\mu(\tau)$ в трехмерном пространстве, найдем:

$$\psi_{1\mu}'(\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\Gamma}}\frac{\dot{E}_1(\tau)}{E\sqrt{\dot{E}^2+\dot{E}_1^2}}e^{-\theta}\left\{a_\mu + b_\mu(E_1+Ee^{\theta}) + \frac{c_\mu}{2}(E_1+Ee^{\theta})^2\right\},$$

$$\psi_{2\mu}'(\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\Gamma}}\frac{\dot{E}_1(\tau)}{E(\tau)\sqrt{\dot{E}^2+\dot{E}_1^2}}e^{\theta}\left\{a_\mu + b_\mu(E-Ee^{-\theta}) + \frac{c_\mu}{2}(E-Ee^{-\theta})^2\right\},$$

$$e^{\pm\theta} = \frac{1}{\dot{E}_1}\left[\sqrt{\dot{E}^2+\dot{E}_1^2} \pm \dot{E}\right]. \tag{/23/}$$

Формулы /23/ удовлетворяют и второму граничному условию /21/, если функции E_1 и E периодические:

$$E(\tau+2\pi) = E(\tau), \quad E_1(\tau+2\pi) = E(\tau).$$

Калибровочное условие /5/ в данном случае приводит к равенствам

$$\psi_1''^{\,2}(\tau) = -\frac{1}{4\Gamma}\,\frac{\dot{E}_1^2}{E^2(\dot{E}^2+\dot{E}^2)}\,e^{-2\theta}\,[\dot{E}_1 + \frac{d}{d\tau}(Ee^{\theta})]^2 = -p^2,$$

$$\psi''^{\,2}(\tau) = -\frac{1}{4\Gamma}\,\frac{\dot{E}_1^2}{E^2(\dot{E}^2+\dot{E}^2)}\,e^{2\theta}[\dot{E}_1 - \frac{d}{d\tau}(Ee^{-\theta})]^2 = -p^2. \qquad /24/$$

Как и в случае /11/, здесь их не два, а одно.

Таким образом, решения /23/ удовлетворяют граничным условиям /13/, дополнительным условиям /2/ и содержат одну независимую произвольную функцию, которая определяется начальными данными для струны.

§3. Нерелятивистский предел модели II

Нерелятивистский предел действия /1/ рассмотрен в /4/. Там же решены уравнения движения, вид которых определяется свободным действием S_0.

Чтобы перейти к нерелятивистскому пределу /12/, выберем калибровку $t = \tau$ и разложим подынтегральное выражение в /12/ по величине $v^2 = \dot{\vec{x}}^2(t, \sigma)$. Ограничиваясь нулевым приближением, приведем /12/ к следующему виду:

$$S = -\gamma \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^{\pi} d\sigma \sqrt{\vec{x}'^2(t,\sigma)} + \mu \int_{t_1}^{t_2} dt\,[\frac{(\vec{x}'\ddot{\vec{x}})}{\sqrt{\vec{x}'^2}}(t,0) - \frac{(\vec{x}'\ddot{\vec{x}})}{\sqrt{\vec{x}'^2}}(t,\pi)]. \qquad /25/$$

Положив $\dot{\sigma}_i(t) = 0$, мы рассматриваем лишь некоторые движения струны. Уравнения движения, следующие из /25/, таковы:

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\,\frac{\vec{x}'}{\sqrt{\vec{x}'^2}}(t, \sigma) = 0, \qquad /26/$$

а граничные условия принимают вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\frac{\vec{x}'}{\sqrt{\vec{x}'^2}}(t, \sigma_i) + \frac{\gamma}{\mu}\,\frac{\vec{x}'}{\sqrt{\vec{x}'^2}}(t, \sigma_i) = 0, \quad i = 1,2, \qquad /27/$$

$$\ddot{\vec{x}}(t, \sigma_i) = (\frac{\vec{x}'}{\sqrt{\vec{x}'^2}}\,\ddot{\vec{x}})\,\frac{\vec{x}'}{\sqrt{\vec{x}'^2}}(t, \sigma_i), \quad i = 1,2. \qquad /28/$$

Уравнение /26/ имеет общее решение /4/

$$\vec{x}(t, \sigma) = \vec{y}(t) + \xi(t, \sigma)\vec{n}(t), \qquad /29/$$

где $\vec{y}(t)$, $\xi(t, \sigma)$ - произвольные функции, а $\vec{n}(t)$ - произвольный единичный вектор.

Уравнение /27/ дает:

$$\frac{\vec{x}'}{\sqrt{\vec{x}'^2}}(t, \sigma_i) = \vec{e}_1\cos\omega t + \vec{e}_2\sin\omega t, \quad \omega^2 = \frac{\gamma}{\mu}, \quad i = 1,2. \qquad /30/$$

Здесь векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ единичные и ортогональные между собой

$$(\vec{e}_1\vec{e}_2) = 0, \quad \vec{e}_1^{\,2} = \vec{e}_2^{\,2} = 1.$$

Сравнивая /29/ и /30/, находим, что

$$\vec{n}(t) = \vec{e}_1\cos\omega t + \vec{e}_2\sin\omega t.$$

Общее решение /29/ с таким вектором $\vec{n}(t)$ удовлетворяет граничному условию /27/. Необходимо также, чтобы выполнялись условия /28/. Смысл /28/ состоит в том, что на границе вектор $\ddot{\vec{x}}(t, \sigma_i)$ параллелен вектору $\vec{n}(t)$. Это будет так, если на функции $\xi(t, \sigma)$ и $\vec{y}(t)$ наложить условия

$$\frac{\partial^2\vec{y}(t)}{\partial t^2} = \vec{n}(t)\,z(t), \quad \frac{\partial\xi(t, \sigma_i)}{\partial t} = 0,$$

где $z(t)$ - новая произвольная функция. Теперь удовлетворены все граничные условия /27/ и /28/.

Найдем расстояние между концами струны:

$$|\vec{r}_{12}| = |\vec{x}(t, \pi) - \vec{x}(t, 0)| = |\xi(t, \pi) - \xi(t, 0)| = |C_2 - C_1|.$$

Здесь C_1 и C_2 - произвольные константы. Отсюда видно, что действие /25/ описывает в нерелятивистском пределе струну с фиксированным расстоянием между концами, вращающуюся в плоскости векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ с постоянной угловой скоростью $\omega = \sqrt{\frac{\gamma}{\mu}}$.

Более общие примеры движения можно получить, если, в соответствии с идеями первых двух параграфов, не фиксировать положение концов $\sigma_1 = 0$ и $\sigma_2 = \pi$, а найти вид функций $\sigma_i(\tau)$ из граничных условий в калибровке $t = \tau$.

Литература

1. *Chodos A., Thorn C. Nucl.Phys., 1974, B72, p.509.*
2. *Andreo R., Rohrlich F. Nucl.Phys., 1976, B115, p.521.*
3. *Барбашов Б.М., Нестеренко В.В. ТМФ, 1977, 31, с.291.*
4. *Черников Н.А., Шавохина Н.С. ОИЯИ, Р2-10375, Дубна, 1977.*
5. *Barbashov B.M. Nucl.Phys., 1977, B129, p.175.*
6. *Lund F., Regge J. Phys. Rev., 1976, D14, p.1524.*
7. *Omnes R. Preprint Laboratoire de Phys. Theor. et Hautes Energ., 77/12.*
8. *Барбашов Б.М., Кошкаров А.Л. ОИЯИ, Р2-11430, Дубна, 1978.*
9. *Barbashov B.M., Nesterenko V.V., Cherviakov A.M. JINR, E2-11669, Dubna, 1978.*
10. *Barbashov B.M., Nesterenko V.V. JINR, E2-11706, Dubna, 1978.*
11. *Барбашов Б.М., Кошкаров А.Л., Нестеренко В.В. ТМФ, 1977, 31, с.176.*
12. *Рашевский П.К. Риманова геометрия и тенз. анализ. "Наука", М., 1964.*

Рукопись поступила в издательский отдел 30 августа 1978 года.