СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 11830

А.С.Гальперин, В.Н.Первушин

КВАНТОВЫЙ ИНСТАНТОН

1978

P2 - 11830

А.С.Гальперин,* В.Н.Первушин

КВАНТОВЫЙ ИНСТАНТОН

* Институт ядерной физики АН УЗ ССР

Гальперин А.С., Первушин В.Н. P2 - 11830

Квантовый инстантон

Обсуждается роль топологического инварианта, описывающего периодическую структуру всего конфигурационного пространства полей Янга-Миллса. Предлагается рассматривать этот инвариант как одномерную коллективную переменную. Плоская волна, построенная с помощью такой "переменной", является точным решением уравнения Шредингера. Найденное решение имеет собственное нулевое значение энергии, удовлетворяет уравнению дуальности в операторной форме и допускает интерпретацию "движения под барьером" (полученное решение обладает на квантовом уровне такими же свойствами, что и классические точные решения Янга-Миллса, называемые инстантонами). Решения такого типа не ограничены в конфигурационном пространстве и, по-видимому, являются нефизическими. Физические решения уравнения Шредингера записываются с помощью функционала Блоха.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Galperin A.S., Pervushin V.N. P2 - 11830

Quantum Instanton

The topological invariant is discussed which describes the periodic structure of the whole configuration space of Yang-Mills fields. This invariant is proposed to consider as a onedimensional collective variable in the configuration space. The plane wave constructed with this "variable" is the exact solution of the Schrödinger equation. The solutions derived (functionals) possess the zero energy eigenvalues, satisfy duality equations in the operator form, and admit interpretation of "the motion under barrier". These solutions possess, on a quantum level, properties similar to those of classical exact solutions of Yang-Mills equation called instantons. Solutions of this type are infinite in the configuration space and, probably, are nonphysical. Physical solutions of the Schrödinger equation are expressed in terms of the Bloch functional.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

1. ВВЕДЕНИЕ

Существование топологически нетривиальных решений классических уравнений в теории неабелевых калибровочных полей /1/ свидетельствует о том, что топологические свойства конфигурационного пространства полей Янга-Миллса резко отличаются от случая невзаимодействующих абелевых полей. В квантовой механике от свойств конфигурационного пространства существенно зависят характер спектра гамильтониана и поведение волновых функций /сравним, например, свободное движение частицы и свободный ротатор/. Следует ожидать поэтому, что не существует непрерывного предельного перехода по константе связи ($g \to 0$) в векторах состояний и матричных элементах точной теории, что подтверждают результаты квантования теории Янга-Миллса с помощью квазиклассических методов /2/.

С этой точки зрения представляет интерес исследование точных решений уравнения Шредингера в теории Янга-Миллса, описывающих "истинные" квантовые состояния глюонных полей.

В настоящей статье обсуждается роль топологических инвариантов в решениях уравнения Шредингера.

В разделе 2 даются общие сведения о топологических свойствах конфигурационного пространства полей Янга-Миллса /1,3/.

В разделе 3 показано, что с помощью топологического инварианта можно построить точное решение евклидова уравнения Шредингера, обладающее свойствами классического инстантона /1/. В разделе 4 обсуждается уравнение Шредингера в пространстве Минковского.

2. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА КОНФИГУРАЦИОННОГО ПРОСТРАНСТВА

Исторически периодическая структура вакуума в теории Янга-Миллса была открыта из требования конечности действия /1/:

$$S=\frac{1}{4}\int d^4x F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}\ ;\ F^a_{\mu\nu}=\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu-g\epsilon^{abc}A^b_\mu A^c_\nu\ . \qquad /1/$$

Все поля с конечным действием должны быть чисто продольны по бесконечности

$$A_\mu=\frac{1}{g}v^{-1}(x)\,\partial_\mu v\ ;\ A_\mu=\frac{i}{2}\tau^a A^a_\mu\ . \qquad /2/$$

Каждой матрице $v(x)$ соответствует отображение S^3 /границы 4-пространства /в группу SU(2). Это отображение характеризуется целым числом /индексом Понтрягина/, которое указывает, сколько раз при отображении граница S^3 обернулась вокруг сферы SU(2). Поэтому все поля с конечным действием разбиваются на различные топологически неэквивалентные классы с индексом ν, вычисленным по формуле

$$\nu=-\frac{g^2}{16\pi^2}\int d^4x\,\mathrm{Tr}(\tilde F_{\mu\nu}F_{\mu\nu})=-\frac{g^2}{16\pi^2}\int ds_\mu X_\mu\ ,$$

$$X_\mu=2\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\mathrm{Tr}(A_\nu\partial_\alpha A_\beta+\frac{2}{3}gA_\nu A_\alpha A_\beta)\ , \qquad /3/$$

$$\tilde F_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}F_{\mu\nu}\ .$$

Минимум действия в каждом классе достигается для полей /названных псевдочастицами или инстантонами/, удовлетворяющих евклидову уравнению дуальности

$$F_{\mu\nu}=\pm\tilde F_{\mu\nu}\ . \qquad /4/$$

Инстантоны имеют нулевую энергию и трактуются как классические решения, интерполирующиеся из одного классического вакуума в другой. Такая интерпретация инстантонов обычно иллюстрируется в калибровке A_0=O, где индекс Понтрягина ν имеет вид разности двух чисел:

$$\nu=n(v_+)-n(v_-)\ ;\quad v_\pm(\vec r)\equiv v(\vec r,t)\big|_{t=\pm\infty}\ ,$$

$$n(v)=-\frac{1}{12\pi^2}\int d^3r\,\epsilon_{ijk}\,\mathrm{Tr}(v^{-1}\partial_i v)(v^{-1}\partial_j v)(v^{-1}\partial_k v)\ . \qquad /5/$$

Матрицы $v_\pm(\vec r)$ описывают классические вакуумы в калибровке A_0=O. Классический вакуум определяется как калибровочное поле, для которого значение плотности гамильтониана

$$\mathcal{H}=\frac{1}{2}[(E^a_i)^2+(B^a_i)^2]\ ;$$

$$E^a_i=\frac{\partial}{\partial t}A^a_i\ ;\quad B^a_i=\epsilon_{ijk}\,(\partial_j A^a_k-\frac{1}{2}g\epsilon^{abc}A^b_jA^c_k) \qquad /6/$$

равно нулю. Этому условию удовлетворяют произвольные матрицы, в том числе такие, для которых выражение /5/ не целое. Интерполяция инстантонов из вакуума при $t=-\infty$ в вакуум при $t=+\infty$ эффективно сводится к калибровочному преобразованию $v^{(\nu)}$ вакуума $v^{-1}_{(-)}\partial_i v_{(-)}$:

$$v_{(-)}\to v_{(+)}=v^{(\nu)}v_{(-)}\ ,$$

где /7/

$$n(v^{(\nu)})=n(v_{(+)})-n(v_{(-)})=\nu\ .$$

Тем самым совокупность инстантонов и выбор матрицы $v_{(-)}$ как начала отсчета задают взаимно-однозначное соответствие между классическими вакуумами и классами матриц v. В частности, если за $v_{(-)}$ выбрать матрицу, топологически эквивалентную единичной, классификация вакуумов совпадает с классификацией $v^{(\nu)}$ по топологическим классам отображения R(3) в SU(2).

Группу калибровочных преобразований $v^{(\nu=0)}$, топологически эквивалентных единичному преобразованию, принято называть "малой" группой калибровочных преобразований. А топологически несвязную группу всех матриц $v^{(\nu)}$ - "большой" калибровочной группой /3/.

Важно отметить, что "малая" и "большая" группы преобразований имеют принципиально разный динамический смысл.

Малая группа - это группа истино калибровочных преобразований: инвариантность относительно этой группы следует из уравнения движения /закон Гаусса/:

$$\nabla_i^{ab}(A) E_i^b = 0, \quad (\nabla_i^{ab}(A) = \delta^{ab}\partial_i + g\epsilon^{acb} A_i^c)$$

или, в квантовой теории, из дополнительных условий, накладываемых на векторы состояний:

$$\nabla_i^{ab}(A)\,\hat{E}_i^b\,\Psi = 0.$$

Эти условия даны в терминах генераторов бесконечно малых преобразований и поэтому определяют трансформационные свойства теории только относительно "малой" группы преобразований.

Преобразования из "большой" группы для $\nu \neq 0$ отражают конечный результат интерполяции инстантонов из вакуума в вакуум и аналогичны в теории движения электронов в кристаллах преобразованиям сдвига из одной ячейки в другую. Если представить "большую" группу как произведение "малой" на циклическую группу Z_∞, то в соответствии с указанным выше динамическим смыслом мы должны требовать инвариантности теории относительно малой группы калибровочных преобразований и ковариантности теории относительно преобразований

циклической группы Z_∞, т.е. динамические величины теории, например волновая функция в уравнении Шредингера, должны преобразовываться по представлениям группы Z_∞.

Таким образом, инстантоны, найденные из соображений конечности действия, указывают на периодическую структуру вакуума.

Как отмечено в /3/, аналогично можно говорить о периодической структуре всего конфигурационного пространства*. В теории Янга-Миллса существует функционал

$$N[A] = -\frac{g^2}{8\pi^2}\int d^3r\,\epsilon_{ijk}\,\mathrm{Tr}(A_i\partial_j A_k + \frac{2}{3}g A_i A_j A_k), \qquad /8/$$

являющийся обобщением n(v) /6/. Этот функционал инвариантен относительно преобразований малой группы, но меняется аддитивно при преобразованиях большой группы:

$$A_i \to A_i'^{(\nu)} = v^{(\nu)-1}(A_i + \frac{1}{g}\partial_i)\,v^{(\nu)}, \qquad /9/$$

$$N[A'^{(\nu)}] = N[A] + \nu. \qquad /10/$$

Поэтому относительно преобразований большой группы /9/ произвольная конфигурация поля A_i периодична в том же смысле, в каком периодичен классический вакуум. В этом смысле конфигурационное пространство полей Янга-Миллса имеет топологию цилиндра /3/. В соответствии со смыслом преобразований $v^{(\nu\neq 0)}$ поля A_i и $A_i'^{(\nu)}$ калибровочно не эквивалентны, несмотря на то, что им отвечают одинаковые значения плотности гамильтониана. При этом динамически мы можем перейти от поля A к полю $A'^{(\nu)}$ с помощью интерполяции невакуумного классического "инстантона" с ненулевой энергией и бесконечным действием.

---

* Один из авторов /В.П./ благодарен Л.Д.Фаддееву, указавшему ему на этот факт.

Бесконечность действия для физически нетривиальной асимптотики полей при $t = \pm\infty$ обычно легко устраняется операцией предельного перехода на массовую поверхность в функциях Грина /см., например,/4//.

3. ПРОСТРАНСТВО ЕВКЛИДА

Для того чтобы выяснить, какую роль играет топологический инвариант N в решениях уравнения Шредингера, рассмотрим вначале простую двумерную модель абелева калибровочного поля Швингера в калибровке A_0=О с гамильтонианом:

$$H_{Ш} = \frac{1}{2}\int dx_1 \hat{E}_1^2; \qquad E_1 = \frac{\partial A_1}{\partial t}.$$

Конфигурационное пространство полей A_1 в этой модели топологически эквивалентно /гомеоморфно/ конфигурационному пространству полей Янга-Миллса. Соответствующий топологический инвариант

$$N[A] = \frac{2\pi}{g}\int dx_1 A_1$$

/g - параметр размерности длины/ играет важную роль при построении решения уравнения Шредингера:

$$\hat{H}_{Ш.}\Psi = \epsilon\Psi,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\hat{E}_1\Psi = 0.$$

Это решение имеет вид

$$\Psi(A) = e^{i\theta N[A]} \qquad /11/$$

Нетрудно убедиться, что выражение, аналогичное /11/ с N, определенным по формуле /8/, удовлетворяет евклидову уравнению Шредингера в теории Янга-Миллса:

$$\hat{H}\Psi_\epsilon = \epsilon\Psi_\epsilon, \qquad H = \frac{1}{2}\int d^3r(-E^2 + B^2) \qquad /12/$$

$$\nabla_i^{ab}(A)\hat{E}_i^b\Psi = 0,$$

с собственным значением ϵ =О. При этом θ принимает значение:

$$\theta \equiv \theta_{g(\pm)} = \pm\frac{8\pi^2}{g^2}. \qquad /13/$$

Решение /11/ с ϵ=0 двукратно вырождено.

Решение /11/ имеет вид плоской волны по коллективной переменной N. При действии больших калибровочных преобразований решение /11/ изменяется по представлению циклической группы Z_∞:

$$\Psi(A'^{(n)}) = e^{i\theta_g n}\Psi(A).$$

Функционал $\exp(i\theta_g N)$ обладает свойствами классического инстантона в том смысле, что: 1/ является точным решением евклидова уравнения Шредингера с нулевой энергией; 2/ удовлетворяет одновременно уравнению дуальности в операторной форме

$$\hat{E}_i^a\Psi(A) = \pm\hat{B}_i^a(A)\Psi(A)\big|_{\theta=\theta_{g(\pm)}}. \qquad /14/$$

Последнее уравнение справедливо вследствие операторного тождества

$$\sum_{i,a}[\hat{E}_i^a, \hat{B}_i^a] = 0.$$

Уравнение дуальности /14/ не имеет нетривиального аналога в квантовой механике: $H = -\frac{1}{2}p^2 + v(x)$, так как решения уравнения дуальности $(\hat{p} \pm \sqrt{V(x)})\psi = 0$, строго говоря, являются решениями уравнения Шредингера только при условии $[\hat{p}, \sqrt{V(x)}] = 0$, т.е. когда $V = \mathrm{const}$. С этой точки зрения теория Янга-Миллса напоминает свободный ротатор.

ПРОСТРАНСТВО МИНКОВСКОГО

Точное решение уравнения Шредингера в пространстве Минковского, аналогичное /11/, имеет вид

$$\Psi = e^{\theta g N} \quad . \qquad /15/$$

Если истантоны интерпретировать как классическое решение, описывающее туннельный переход между топологически разными вакуумами, то /15/ можно интерпретировать как "плоскую волну" с мнимым квазиимпульсом, описывающую движение "под барьером".

Решение /15/ имеет неправильные трансформационные свойства относительно больших калибровочных преобразований, подобные трансформационным свойствам волновой функции свободного ротатора с отрицательной энергией, относительно вращений на целое число оборотов. Это указывает, что решение /15/, по-видимому, не является физическим вакуумным состоянием.

"Вакуумное" решение, аналогичное /15/, существует в квантовой электродинамике:

$$\Psi = \exp\{\pm \frac{1}{2} \int d^3x\, \epsilon_{ijk}\, A_i \partial_j A_k\} \ .$$

Это решение является нефизическим, поскольку оно не ограничено в конфигурационном пространстве.

Рассмотрим решение уравнения Шредингера, обладающее правильными трансформационными свойствами при калибровочных преобразованиях /9/:

$$\Psi(A'^{(n)}) = e^{i\theta n} \ \Psi(A) \ . \qquad /16/$$

Это решение можно записать в виде

$$\Psi(A) = e^{i\theta' N[A]} \ \Phi_\theta(A) \ , \qquad /17/$$

где $\Phi_\theta(A)$ - функционал Блоха /аналог блоховской волновой функции в теории электрона в периодическом потенциале/:

$$\theta' = 2\pi k + \theta \ ,$$

k – целое число, - номер зоны Бриллюэна; θ - произвольная величина, заданная в интервале $(-\pi, \pi)$.

Для состояния $\Phi_\theta(A)$, инвариантного относительно полной группы калибровочных преобразований, имеем уравнения

$$H'\Phi_\theta = \epsilon \Phi_\theta \ ,$$

$$\nabla_i(A) E_i \Phi_\theta = 0 \ , \qquad /18/$$

$$\Phi_\theta(A'^{(n)}) = \Phi_\theta(A) \ ,$$

где

$$H' = \frac{1}{2} \int d^3r [E^2 + B^2(1 + \alpha^2) + 2\alpha BE] \ ,$$

$$\alpha = \theta \frac{g^2}{2\pi^2} . \qquad /19/$$

В /19/ виден явно характер нарушения лоренц-инвариантности, обусловленный заменой /17/. Таким образом, инвариантные величины относительно преобразований циклической группы Z не являются одновременно лоренц-инвариантными /соответствующий лагранжиан $\mathcal{L}'$ содержит кроме инвариантных величин E^2-B^2, BE величину B^2/. Операторы циклической группы Z_∞ действующие на векторы состояний и коммутирующие с гамильтонианом, можно представить в форме $(R)^\nu$, где R - оператор сдвига на одну "ячейку" - имеет следующий вид в конфигурационном пространстве:

$$R = \exp(\frac{d}{dN}) \qquad /20/$$

/Выражение для R, данное в работе /2/:

$$R' = \exp\{ i\frac{8\pi^2}{g^2} \int d^2 s(\hat{E}^a_j(s_i, x_i)\lambda^a_j)\Big|_{x_i=-\infty}^{+\infty} \}, \qquad /20'/$$

написано по аналогии с бесконечно малыми калибровочными преобразованиями, не имеющей места в теории Янга-Миллса/.

В заключение для иллюстрации роли топологических свойств конфигурационного пространства рассмотрим пример гамильтониана:

$$\bar{H} = \frac{\int d^3 r E^2}{\int d^3 r B^2} .$$

Предположим, что решение уравнения Шредингера зависит только от функционала $N[A]$, тогда уравнение $\bar{H}\Psi = \epsilon\Psi$ сведется к уравнению Шредингера для свободного ротатора

$$-\frac{d^2}{dN^2}\Psi(N) = \epsilon\Psi(N) ,$$

$$\psi(N+1) = e^{i\theta}\,\Psi(N) ,$$

с собственными значениями

$$\epsilon = g^2 \frac{1}{8\pi^2}(2\pi k + \theta)^2 ; \quad k = 0,1,2,\dots .$$

Нетрудно видеть, что в данном примере нет непрерывного перехода по константе g.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе обсуждается роль топологического инварианта, который описывает периодическую структуру всего конфигурационного пространства полей Янга-Миллса. Предлагается рассматривать этот инвариант как одномерную коллективную переменную в конфигурационном пространстве.

Плоская волна, построенная с помощью такой "переменной", является точным решением уравнения Шредингера для определенных значений квазиимпульса /действительных в пространстве Евклида/.

В пространстве Минковского найденное решение имеет нулевое собственное значение энергии и описывает "движение под барьером" с мнимым квазиимпульсом.

Решения такого типа не ограничены в конфигурационном пространстве, и, по-видимому, являются нефизическими. Физические решения уравнения Шредингера записываются с помощью функционала Блоха.

Авторы благодарят Д.И.Блохинцева за внимание к работе, а также Г.В.Ефимова, А.Ф.Ефремова, В.И.Огиевецкого и И.В.Полубаринова за обсуждения.

ЛИИЕРАТУРА

1. *Belavin A., Polyakov A., Schwartz A., Tyupkin Yu. Phys.Lett., 1975, 59B, p.85.*
2. *Callan C., Dashen R. and Gross D. Phys.Lett., 1976, 63B, p. 334.*
3. ***Фаддеев Л.Д. Материалы IУ Международного совещания по нелокальным теориям поля. 1976, ОИЯИ, Д1-9788, с. 207., Дубна, 1976.***
4. ***Милехин Г.А., Фрадкин Е.С. ЖЭТФ, 1963, 45, с. 1826.***

Рукопись поступила в издательский отдел 14 августа 1978 года.