ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 11772

А.В.Сермягин

НОВОЕ КЛАССИЧЕСКОЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯДА В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

1978

Р2 - 11772

А.В.Сермягин

НОВОЕ КЛАССИЧЕСКОЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯДА В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Направлено в ЖЭТФ

Сермягин А.В. Р2 - 11772

Новое классическое релятивистское уравнение движения заряда в электромагнитном поле

Путем ковариантного обобщения дифференциально-разностного ретардированного уравнения Goedecke (1975) получено, в двух эквивалентных формах, новое классическое релятивистское уравнение движения заряда во внешнем электромагнитном поле:

$$m\dot{u} - m\dot{u}\cdot v\,\frac{u+v}{1+u\cdot v} = eF\cdot v; \qquad (a)$$

$$m\dot{u} = eF\cdot v - eF\cdot v\cdot u\,\frac{u+v}{1+u\cdot v}; \qquad (б)$$

$$u = \mathrm{ret}\,v = v(\tau-\tau_0); \quad \tau_0 = \frac{2}{3}\,\frac{e^2}{m}; \quad c = 1.$$

Показано, что (а) и (б) не имеют самоускоряющихся решений. Найдены явные выражения для специальных однородных преобразований Лоренца в инвариантной бескоординатной форме как функции произвольных 4-скоростей u и v.

Работа выполнена в Лаборатории нейтронной физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Sermyagin A.V. P2 - 11772

A New Classical Relativistic Equation of Motion for a Charge in the Electromagnetic Field

By covariant generalization for the differential-difference retarded Goedecke (1975) equation a new relativistic equation of motion for a charge in the external electromagnetic field was obtained in two equal forms:

$$m\dot{u} - m\dot{u}\cdot v\,\frac{u+v}{1+u\cdot v} = eF\cdot v; \qquad (a)$$

$$m\dot{u} = eF\cdot v - eF\cdot v\cdot u\,\frac{u+v}{1+u\cdot v}; \qquad (b)$$

$$u = \mathrm{ret}\,v = v(\tau-\tau_0); \quad \tau_0 = \frac{2}{3}\,\frac{e^2}{m}; \quad c = 1.$$

It is shown that (a) and (b) have no runaway solutions. Evident expressions are found for the special homogeneous Lorentz transformations in invariant uncoordinate form as functions of any four-velocities u and v.

The investigation has been performed at the Laboratory of Neutron Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

Рассмотрим нерелятивистское уравнение движения точечного заряда во внешнем электромагнитном поле /1/

$$m\ddot{\vec{r}}(t-\tau_0) = e\vec{E} + e[\dot{\vec{r}}(t)\vec{H}]; \quad \tau_0 = \frac{2}{3}\,\frac{e^2}{m}, \quad c = 1. \qquad /1/$$

В четырехмерной безындексной записи инерциальный член приобретает вид

$$f_{inert}(\tau-\tau_0) = m\frac{dv(\tau-\tau_0)}{d\tau} = m\dot{u};$$

соответственно сила Лоренца $f_L(\tau) = eF\cdot v$, где $d\tau$ - собственное время, в выбранной системе единиц совпадающее с инвариантным интервалом ds, $d\tau = ds = (dt^2 - dr^2)^{1/2}$; $F = F(\tau)$ - тензор внешнего электромагнитного поля; $v = v(\tau)$, $u = \mathrm{ret}\,v = v(\tau-\tau_0)$ - 4-скорость, $u\cdot u = v\cdot v = 1$.

Предполагая, что другие силы в системе "заряд плюс его собственное поле" отсутствуют, необходимо приравнять инерциальный член силе Лоренца. Для этого $f_{inert}(\tau-\tau_0)$ и $f_L(\tau)$ надо записать в одной инерциальной мгновенно-сопутствующей системе отсчета. В результате искомое релятивистское обобщение для /1/ будет иметь вид $\Lambda f_{inert}(\tau-\tau_0) = f_L(\tau)$, или

$$m\Lambda\dot{u} = eF\cdot v, \qquad /2/$$

где Λ - преобразование Лоренца из системы отсчета, в которой некоторый объект имеет 4-скорость u, к системе отсчета, в которой этот же самый объект в этот же момент времени имеет 4-скорость v. Ввиду группового свойства преобразований Лоренца, $\Lambda^{-1}\Lambda = \Lambda\Lambda^{-1} = I$, где I - тождественное преобразование, уравнение

$$m\dot{u} = e\Lambda^{-1}F\cdot v \qquad /3/$$

эквивалентно /2/.

Найдем явные выражения для конечных преобразований Λ и Λ^{-1}. Если Λ - однородное, или собственное, преобразование Лоренца без пространственных вращений, $\Lambda: u \to v$, так что

$$\operatorname{ch}\phi = u\cdot v, \qquad /4/$$

то этому преобразованию соответствует матрица M вращений в 3 + 1 пространстве Минковского,

$$M = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\phi & \operatorname{sh}\phi & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}\phi & \operatorname{ch}\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad /5/$$

относительно ортонормированного локального базиса e,

$$e = \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}; \qquad e_0 = u, \quad e_1 = \frac{v}{\operatorname{sh}\phi} - u\operatorname{cth}\phi. \qquad /6/$$

Конкретный вид e_2 и e_3 нам не понадобится. Фундаментальная матрица G связана с единичной матрицей I соотношением $G = e\tilde{e} = I\cos\pi[(k+p)! + 1]$; $k, p = 0,1,2,3$; ~ означает транспонирование.

Для произвольного 4-вектора a имеем, очевидно:

$$b = \Lambda a = a + \tilde{e}(M - I)\,G a\cdot e, \qquad /7/$$

где $\tilde{e}Ga\cdot e$ есть разложение 4-вектора a по векторам базиса e. Обратное преобразование имеет вид

$$a = \Lambda^{-1}b = b + \tilde{e}(M - I)^{-1}\,G b\cdot e. \qquad /8/$$

Подстановка /5/ и /6/ в /7/ после несложных преобразований дает:

$$b = \Lambda a = a - \frac{a\cdot u + a\cdot v}{1 + u\cdot v}u + \frac{2a\cdot u\,u\cdot v + a\cdot u - a\cdot v}{1 + u\cdot v}v. \qquad /9/$$

Обратное преобразование $\Lambda^{-1}: v \to u$ получается комбинированием /5/, /6/ и /8/ и совпадает, очевидно, с /9/, в котором переставлены u и v,

$$a = \Lambda^{-1}b = b - \frac{b\cdot u + b\cdot v}{1 + u\cdot v}v + \frac{2b\cdot v\,u\cdot v + b\cdot v - b\cdot u}{1 + u\cdot v}u. \qquad /10/$$

Выражения /9/ и /10/ представляют собой преобразования Лоренца без пространственных вращений для произвольного 4-вектора, записанные в инвариантной бескоординатной форме как функции произвольных 4-скоростей u и v.

Подставляя /9/ в /2/, приняв $a = \dot{u}$, получим:

$$m\dot{u} - m\dot{u}\cdot v\frac{u + v}{1 + u\cdot v} = eF\cdot v. \qquad /11/$$

Подставив /10/ в /3/, взяв $b = F\cdot v$, находим:

$$m\dot{u} = eF\cdot v - eF\cdot v\cdot u\frac{u + v}{1 + u\cdot v}. \qquad /12/$$

То, что уравнения /11/ и /12/ не имеют самоускоряющихся решений, видно уже из общего вида этих уравнений, /2/ и /3/, когда вид представления для операторов Λ и Λ^{-1} не конкретизирован. Для /3/ и /12/ это очевидно; при условии $F = 0$ подействуем на /2/ оператором Λ^{-1}, будем иметь $\dot{u} = 0$, т.е. уравнение движения свободной частицы. Убедимся непосредственным вычислением, что /11/ при $F=0$ описывает только свободное движение по инерции. Имеем:

$$b = \dot{u} - \dot{u}\cdot v\frac{u+v}{1+u\cdot v} = 0.$$

Используя соотношения $\Lambda^{-1}\dot{u} = \dot{u} + \dot{u}\cdot v\dfrac{(2u\cdot v+1)u - v}{1+u\cdot c}$;

$\Lambda^{-1}v = u$; $\Lambda^{-1}u = 2u\cdot vu - v$, легко находим, что

$$\Lambda^{-1}b = \dot{u} = 0.$$

Отметим связь между /11/ и /12/ и известными уравнениями Лоренца-Дирака и Мо-Папаса. Для этого разложим ретардированные члены уравнения /11/ в ряд Тейлора в окрестности точки τ и отбросим члены, пропорциональные τ_0 в степени выше первой. Мы получим тогда уравнение Лоренца-Дирака

$$m\dot{v} = eF\cdot v + m\tau_0(\ddot{v} + \dot{v}\cdot\dot{v}v).$$

При этом из /12/ следует

$$m\dot{v} - m\tau_0\ddot{v} = eF\cdot v + e\tau_0 F\cdot v\cdot\dot{v}v. \qquad /13/$$

Используя $m\ddot{v} = e\dfrac{d}{d\tau}F\cdot v$ в предположении, что $\dot{F}\cdot v = 0$, получаем из /13/ уравнение Мо-Папаса[4]:

$$m\dot{v} = eF\cdot v + e\tau_0(F\cdot\dot{v} + F\cdot v\cdot\dot{v}v).$$

В заключение надо отметить, что обычная процедура ортогонализации, с помощью которой совершается, например, переход от уравнения Абрагама-Лоренца к уравнению Лоренца-Дирака[3], в случае уравнения /1/ приводит к исследованному ранее другими авторами[5] уравнению, отличающемуся от /11/ и /12/.

Пользуюсь случаем для выражения искренней признательности В.Н.Мельникову за обсуждения и полезные советы, а также Б.В.Васильеву и И.М.Маторе за внимание к работе. Особенно я благодарен В.К.Игнатовичу за подробное обсуждение и важные замечания, учет которых в значительной мере улучшил первоначальный замысел.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Goedecke G.H. Nuovo Cim., 1975, 30B, p.112.*
2. *Rohrlich F. Classical Charged Particles (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1965), p.145.*
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля, "Наука", М., 1973, с.270.*
4. *Tse Chin Mo, Papas C.H. Phys.Rev., 1971, D4, p.3566.*
5. *Sorg M. Z.Naturforsch., 1976, 31a, p.664; Petzold J., Sorg M. Z.f.Phys., A, 1977, v.283, p.207.*

Рукопись поступила в издательский отдел 18 июля 1978 года.