ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



Р2 - 11749

А.Г.Бонч-Осмоловский, М.И.Подгорецкий

# О ТРАЕКТОРИИ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

1978

P2 - 11749

А.Г.Бонч-Осмоловский, М.И.Подгорецкий

# О ТРАЕКТОРИИ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

*Направлено в ЖТФ*

Бонч-Осмоловский А.Г., Подгорецкий М.И.

P2 - 11749

О траектории ультрарелятивистской частицы в однородном магнитном поле

Двумя различными методами вычислена траектория ультрарелятивистской частицы в однородном магнитном поле с учетом влияния излучения. Один из методов основан на простых физических предположениях, касающихся закона сохранения энергии и баланса сил, определяющих радиус кривизны; второй - заключается в точном решении уравнения Лоренца-Дирака.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Bonch-Osmolovsky A.G., Podgoretsky M.I.

P2 - 11749

On a Trajectory of Ultrarelativistic Particle in a Homogeneous Magnetic Field

A trajectory of the relativistic particle in a homogeneous magnetic field was calculated by two different methods taking into account the influence of radiation. The first method is based on some physical assumptions concerning the low energy and the balance of forces which determine the curvature radius; the second one is based on an exact solution of the Lorenz-Dirac equation.

The investigation has been performed at the Laboratory of High Energies, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978



В настоящей работе рассмотрен вопрос о траектории заряженной ультрарелятивистской частицы, движущейся в однородном магнитном поле; энергия частицы и напряженность поля предполагаются достаточно большими, так что характер движения в значительной степени определяется радиационным торможением (пример: электроны с энергией порядка 100 ГэВ в полях порядка $10^5$ Э).

Обычно в основу анализа влияния излучения на движение частицы кладется уравнение Лоренца-Дирака. Пределы его применимости в задаче о движении в магнитном поле и некоторые свойства его решений (в частности, влияние радиационного торможения на синхротронное излучение) уже изучались в ряде работ /1-3/. Однако, насколько нам известно, полное решение задачи о траектории частицы в однородном магнитном поле пока что не проведено. Ниже показано, что исходя из двух естественных физических предположений можно найти траекторию частицы в магнитном поле, не обращаясь непосредственно к уравнению Лоренца-Дирака. Такой подход может представить интерес при анализе и сопоставлении различных модификаций уравнений с радиационным торможением. Вывод тех же результатов с помощью уравнения Лоренца-Дирака отнесен в приложение.

Прежде всего предположим, что радиационная сила $\vec{F}_p$ непосредственно приводит только к торможению частицы, т.е. к изменению ее энергии. Иными словами, составляющая $\vec{F}_p$, перпендикулярная к скорости, мала по сравнению с силой Лоренца $\vec{F}_л = \frac{e}{c}[\vec{v},\vec{H}]$:

$$\frac{\left|\left[\frac{\vec v}{c}, \vec F_p\right]\right|}{|\vec F_л|} \ll 1 . \qquad (1)$$

Пусть частица влетает в магнитное поле с отличной от нуля компонентой начальной скорости вдоль поля (обозначим ее $v_{||}^0$ ). Тогда нетрудно убедиться, что величина $v_{||}$ далее не изменяется. Действительно, перейдем в инерциальную систему, движущуюся вдоль поля со скоростью $v_{||}^0$. В этой системе начальная скорость частицы перпендикулярна магнитному полю, следовательно, составляющая силы, параллельная полю, равна нулю*. Поэтому компонента скорости, параллельная полю, не может появиться и в дальнейшем. В лабораторной системе это означает, что продольная скорость всегда равна своему начальному значению.

Используя это обстоятельство, весь дальнейший анализ мы проведем в системе отсчета, в которой частица движется перпендикулярно к полю $\vec H$. Последующий переход в лабораторную систему легко произвести с помощью преобразования Лоренца. Пусть $s$-длина дуги траектории в указанной системе и $\theta$- угол между касательной и осью $x$ (ось $z$ направлена вдоль поля $\vec H$ ). Тогда

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R(s)} , \qquad (2)$$

причем радиус кривизны $R(s)$ определяется, в соответствии с (1), только силой Лоренца. Поэтому (2) можно записать в виде

---

*Это следует не только непосредственно из уравнения Лоренца-Дирака, но также и из общего требования сохранения четности в электромагнитных взаимодействиях (из вектора $\vec v$ и псевдовектора $\vec H$ нельзя составить вектор силы, параллельный $\vec H$, если $v_{||}=0$).



$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{eH}{mcv(s)\gamma(s)} . \qquad (3)$$

Далее мы будем заниматься исключительно случаем ультрарелятивистского движения, поскольку именно он особенно интересен с точки зрения учета влияния излучения*. Поэтому будем полагать

$$v(s) = c , \quad s = ct . \qquad (4)$$

Второе предположение относится к закону сохранения энергии в постоянном магнитном поле: будем считать, что при движении перпендикулярно к магнитному полю кинетическая энергия частицы полностью переходит в излучение, т.е. изменение энергии в единицу времени равно интенсивности излучения /4,8/. Используя известное выражение для интенсивности излучения /4/, имеем, следовательно, с учетом (4)

$$mc^2 \frac{d\gamma}{dt} = - \frac{2e^4 H^2 \gamma^2}{3m^2 c^3} . \qquad (5)$$

---

*Лоренц-фактор $\gamma$ в рассматриваемой вспомогательной системе координат связан с лоренц-фактором $\gamma_л$ в лабораторной системе соотношением

$$\gamma = \gamma_л \left(1 - \frac{v_л^2 \cos^2\alpha}{c^2}\right)^{1/2} = \gamma_л (1 - \cos^2\alpha)^{1/2} ,$$

где $\alpha$ – угол между скоростью частицы $\vec v_л$ и полем $\vec H_л$ в лабораторной системе. Поэтому при достаточно больших значениях $\gamma_л$ движение во вспомогательной системе может быть ультрарелятивистским даже при малых $\alpha$, когда в лабораторной системе поперечная скорость, равная $v_л tg\alpha \approx c\,tg\alpha$, мала.

Интегрируя (5), получаем

$$\gamma(s) = \frac{\gamma_0}{1 + \frac{kH^2\gamma_0 s}{c}}, \quad k = \frac{2e^4}{3m^3c^5}. \tag{6}$$

Подставляя (6) в (3), находим $\theta(s)$:

$$\theta = \theta_0 + \frac{eH}{mc^2\gamma_0}\left(s + \frac{kH^2\gamma_0 s^2}{2c}\right). \tag{7}$$

Поскольку $dx = ds\cos\theta$ и $dy = -ds\sin\theta$, с помощью (7) можно получить в явном виде уравнение траектории:

$$x = x_0 + \int_0^s \cos\theta(s)\,ds,$$
$$y = y_0 - \int_0^s \sin\theta(s)\,ds. \tag{8}$$

Без ограничения общности можно выбрать начало отсчета времени t, ориентацию осей x и y и положение начала координат таким образом, чтобы при $t=0$ выполнялись начальные условия

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = c,$$
$$y(0) = r_0, \quad \dot{y}(0) = 0, \tag{9}$$

причем величина $r_0$ остается еще произвольной и ее можно выбрать равной ларморовскому радиусу, соответствующему начальной энергии частицы:

$$r_0 = \frac{c\gamma_0}{\omega_H}, \quad \omega_H = \frac{eH}{mc}. \tag{10}$$



Иными словами, предполагается, что при $t=0$ частица находится в точке $(0, r_0)$ и начальный участок траектории совпадает с окружностью радиуса $r_0$ с центром в начале координат. Если бы радиационные потери энергии отсутствовали, частица всегда двигалась бы по указанной окружности; учет радиационных потерь приводит к более сложному движению, описываемому формулами (8). При выбранных начальных условиях $\theta_0 = 0$ и формулы (8) можно записать также в виде

$$\frac{x}{r_0} = \int_0^{\phi} \cos(\phi + p^2\phi^2)\,d\phi,$$
$$\frac{y}{r_0} = \int_0^{\phi} \sin(\phi + p^2\phi^2)\,d\phi. \tag{11}$$

Здесь введены обозначения

$$\phi = \frac{\omega_H t}{\gamma_0}, \tag{12}$$

$$p^2 = \frac{\gamma_0^2 H}{3H_e}, \quad H_e = \frac{(mc^2)^2}{e^3}. \tag{13}$$

Заметим, что параметр $\phi$ не совпадает с азимутальной координатой $\tilde{\phi} = \mathrm{arctg}\frac{x}{y}$, поскольку текущее значение $\gamma \neq \gamma_0$; совпадение имело бы место только при отсутствии радиационных потерь энергии.

Интегралы, входящие в (11), можно выразить через интегралы Френеля

$$S(t) = \int_0^t \sin t^2\,dt, \quad C(t) = \int_0^t \cos t^2\,dt. \tag{14}$$

Тогда после несложных преобразований получим окончательные выражения:

$$\frac{x}{r_0}=\frac{1}{p}\{C(p\phi+\frac{1}{2p})-C(\frac{1}{2p})\}\cos\frac{1}{4p^2}+\frac{1}{p}\{S(p\phi+\frac{1}{2p})-S(\frac{1}{2p})\}\sin\frac{1}{4p^2},$$

$$\frac{y}{r_0}=1-\frac{1}{p}\{S(p\phi+\frac{1}{2p})-S(\frac{1}{2p})\}\cos\frac{1}{4p^2}+\frac{1}{p}\{C(p\phi+\frac{1}{2p})-C(\frac{1}{2p})\}\sin\frac{1}{4p^2}. \tag{15}$$

Ниже будет видно, что характер движения существенно зависит от величины параметра $p$. Поэтому в дальнейшем отдельно проанализированы предельные режимы, когда $p \ll 1$ и $p \gg 1$.

Случай $p \ll 1$. Для ориентировки в порядках величин укажем, что для $\gamma_0 \simeq 10^5$ неравенство $p<1$ выполнено при $H \lesssim 3\cdot 10^4$ Э. В рассматриваемых условиях при любых значениях $\phi$ аргументы функций, входящих в (15), очень велики. Можно, следовательно, воспользоваться асимптотическими разложениями интегралов Френеля /5/:

$$S(t) \simeq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2t}\cos t^2-\frac{1}{4t^3}\sin t^2,$$

$$C(t) \simeq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2t}\sin t^2-\frac{1}{4t^3}\cos t^2. \tag{16}$$

Тогда с точностью до членов порядка $p^2$ включительно формулы (15) переходят в



$$\frac{x}{r_0}=\frac{\sin(\phi+p^2\phi^2)}{1+2p^2\phi}+2p^2\{1-\frac{\cos(\phi+p^2\phi^2)}{(1+2p^2\phi)^3}\},$$

$$\frac{y}{r_0}=\frac{\cos(\phi+p^2\phi^2)}{1+2p^2\phi}+\frac{2p^2}{(1+2p^2\phi)^3}\sin(\phi+p^2\phi^2). \tag{17}$$

При этом возможные значения $\phi$ ограничены, поскольку движение предполагается ультрарелятивистским. Действительно, равенство (6) можно переписать в виде

$$\gamma=\frac{\gamma_0}{1+2p^2\phi}, \tag{6'}$$

откуда следует выполнение условия $\gamma \gg 1$, если

$$2p^2\phi \ll \gamma_0 . \tag{18}$$

Тем самым устанавливается верхняя граница для $\phi$; вместе с тем величина $\phi$ может быть очень большой, так как $\gamma_0 \gg 1$ и $p \ll 1$.

При $p \to 0$ из (17) следует обычный результат: движение по окружности радиуса $r_0$ с частотой $\omega_H/\gamma_0$. В более общем случае (но все еще в предположении $p \ll 1$) траектория (17) также близка к окружности с центром, почти совпадающим с началом координат (смещение порядка $2p^2$ вдоль оси $x$), и радиусом, линейно уменьшающимся во времени по закону

$$r \simeq \frac{r}{1+2p^2\phi}=\frac{\gamma}{\gamma_0}r_0 . \tag{19}$$

Соответствующую частоту при достаточно больших $\phi$ можно определить как производную фазы, т.е.

$$\omega = \frac{d}{dt}(\phi + p^2\phi^2) = (1 + 2p^2\phi)\frac{d\phi}{dt}.$$

С помощью (12) и (6′) получаем

$$\omega = \omega_H / \gamma \ *. \qquad (20)$$

Иными словами, в рассматриваемом предельном случае величины $r$ и $\omega$ определяются мгновенным значением энергии таким же образом, как если бы радиационные потери энергии отсутствовали. Полученный результат вполне понятен, поскольку относительные потери энергии за один оборот $\frac{\Delta\gamma}{\gamma}$, равные $\frac{2\pi}{\gamma\omega}\frac{d\gamma}{dt}$, очень малы. Действительно, исходя из (12), (6′) и (20), легко убедиться в том, что

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma} = 4\pi p^2 \left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)^2 \ll 1\,. \qquad (21)$$

Вопрос о влиянии радиационных потерь на форму траектории может возникнуть при измерении энергии частицы в магнитном поле. В таких случаях обычно $\phi < 1$ и за меру энергии удобно принять величину $\Delta y$, равную отклонению траектории от касательной к первоначальному направлению. При движении по окружности

$$\Delta y = (\Delta y)_0 \simeq \frac{1}{2} r_0 \phi^2\,.$$

---

*Заметим, что в формулах (19) и (20) величина $\phi$ связана с азимутальным углом $\tilde{\phi}$ соотношением $\tilde{\phi} \simeq \phi + p^2\phi^2$; при малых $\phi$ величина $\phi \simeq \tilde{\phi}$, при больших $\phi$ она пропорциональна $\sqrt{\tilde{\phi}}$.



Учет радиационных потерь приводит к

$$\Delta y = (\Delta y)_0 \left(1 + \frac{2}{3}p^2\phi\right). \qquad (22)$$

При $\gamma_0 \simeq 10^5$, $H = 3\cdot 10^4$ Э и $\phi \simeq 1/10$ поправка еще мала $\left(\frac{2}{3}p^2\phi \simeq 10^{-3}\right)$.

Если измерение энергии производится по углу отклонения при пролете магнита длиной $L$, то можно исходить непосредственно из формулы (7), переписав ее в виде

$$\Delta\theta = \phi_L (1 + p^2\phi_L). \qquad (22')$$

где $\phi_L = \frac{eHL}{mc^2\gamma_0}$ – угол поворота без учета радиационных потерь.

Случай $p \gg 1$. Заметим, что согласно (П. 3) всегда должно быть выполнено неравенство

$$p^2 \ll \frac{\alpha\gamma_0}{3}\,, \quad \alpha = \frac{e^2}{hc}\,. \qquad (23)$$

Это условие противоречит требованию $p \gg 1$. Например, при $\gamma_0 \simeq 10^6$ и $H \simeq 3\cdot 10^5$ получаем $p = 20$ и $\frac{\alpha\gamma_0}{3} = 2{,}5\cdot 10^3$. В рассматриваемом режиме некоторые из функций, входящих в общую формулу (15), малы; поэтому в соответствующих случаях следует пользоваться разложениями в ряды Тейлора [5]:

$$S(t) \simeq \frac{1}{3}t^3\,, \quad C(t) \simeq t\,. \qquad (24)$$

Тогда с точностью до членов порядка $\frac{1}{p^2}$ включительно имеем

$$\frac{x}{r_0} = \frac{1}{p}\left[ C\left(p\phi + \frac{1}{2p}\right) - \frac{1}{2p}\right],$$

$$\frac{y}{r_0} = 1 - \frac{1}{p} S\left(p\phi + \frac{1}{2p}\right). \tag{25}$$

В течение очень небольшого начального интервала времени радиационные потери еще не сказываются, и из (25) следуют тривиальные результаты

$$\frac{x}{r_0} \simeq \phi, \quad \frac{y}{r_0} \simeq 1 - \frac{1}{2}\phi^2,$$

соответствующие движению по окружности радиуса $r_0$. Более интересна последующая стадия, когда $p\phi \gg 1$. Тогда, пользуясь формулами (16), можно переписать (25) в виде

$$\frac{x}{r_0} = \frac{\sqrt{\pi/2}}{2p} + \frac{1}{1+2p^2\phi}\sin(\phi + p^2\phi^2),$$

$$\frac{y}{r_0} = 1 - \frac{\sqrt{\pi/2}}{2p} + \frac{1}{1+2p^2\phi}\cos(\phi + p^2\phi^2). \tag{26}$$

Формулы (25) и (26) показывают, что при $p \gg 1$ и $p\phi \gg 1$ траектория представляет из себя т.н. клотоиду (спираль Корню), фокус которой находится в точке $\left(\frac{\sqrt{\pi/2}}{2p}, 1 - \frac{\sqrt{\pi/2}}{2p}\right)$, т.е. смещен от центра исходной окружности на расстояние $\frac{\sqrt{\pi}}{2p}$. Таким образом, при $p \gg 1$ частица проникает внутрь области, занятой



полем, только на малое расстояние порядка $r_0/p \simeq \frac{mc^2}{eH\sqrt{H/H_e}}$, не зависящее от величины $\gamma_0$.

Заметим, что последние члены в выражениях для $x/r_0$ и $y/r_0$ из формулы (26) совпадают с главными членами соответствующих выражений (17). Это вполне естественно, поскольку требование $p\phi \gg 1$ означает, что частица успела потерять почти всю свою исходную энергию. Если теперь условно объявить рассматриваемый момент времени начальным, то дальнейшее движение частицы следует характеризовать новым значением параметра $p$ (мы обозначим его $\tilde{p}$), соответствующим ее энергии именно в этот момент. Сопоставляя (6′) и (13), получим $\tilde{p} = \frac{p}{1 + 2p^2\phi}$, т.е. при $p\phi \gg 1$ и $p \gg 1$ новый параметр $\tilde{p} \simeq \frac{1}{p\phi} \ll 1$, что и приводит к отмеченному выше совпадению.

При измерении энергии частицы роль радиационных потерь в рассматриваемом случае может быть очень существенной. Если величина $\phi$ достаточно мала ($p\phi \ll 1$), по-прежнему справедлива формула (22), но теперь величина поправки значительно больше. Например, при $H \simeq 3 \cdot 10^5$ Э и $\gamma_0 \simeq 10^6$ на пути в $2 \cdot 10^2$ см угол поворота $\phi \simeq 3 \cdot 10^{-2}$ и $\frac{2}{3}p^2\phi \simeq 0{,}5$.

Следует иметь в виду, что все приведенные выше результаты относятся к движению частиц в вакууме. При движении в среде надо учесть влияние потерь на тормозное излучение. Можно показать, что им можно пренебречь только при выполнении условий

$$L \ll t_0, \quad 2p^2 t_0/r_0 \gg 1, \tag{27}$$

где $L$ – длина пути в магнитном поле, $t_0$ – радиационная единица.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для постоянного и однородного магнитного поля $\vec{H}$, направленного вдоль оси z, уравнение Лоренца-Дирака [7,4] имеет вид

$$m\frac{d}{dt}(\gamma\dot{x}) = \frac{e}{c}\dot{y}H - \frac{2e^4\gamma^2\dot{x}}{3m^2c^7}[\vec{v},\vec{H}]^2 - \frac{2e^4H^2}{3m^2c^5}\dot{x},$$

$$m\frac{d}{dt}(\gamma\dot{y}) = -\frac{e}{c}\dot{x}H - \frac{2e^4\gamma^2\dot{y}}{3m^2c^7}[\vec{v},\vec{H}]^2 - \frac{2e^4H^2}{3m^2c^5}\dot{y}, \qquad (П.1)$$

$$m\frac{d}{dt}(\gamma\dot{z}) = -\frac{2e^4\gamma^2\dot{z}}{3m^2c^7}[\vec{v},\vec{H}]^2.$$

Здесь

$$\gamma = \left(1 - \frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{c^2}\right)^{-1/2}.$$

Одно из условий применимости (П.1) связано, как известно, с требованием малости радиационной силы по сравнению с силой Лоренца в сопутствующей системе отсчета [4]; его можно записать в виде

$$\gamma H \ll H = \frac{e}{r_e^2} \simeq 6\cdot 10^{15}\ Э. \qquad (П.2)$$

Если составить с помощью (П.1) отношение компоненты радиационной силы, перпендикулярной к скорости, к силе Лоренца, то легко убедиться, что эта величина имеет порядок $H/H_e$, т.е. в силу условия (П.2) она очень мала; заметим также, что при движении перпендикулярно к $\vec{H}$ радиационная сила в точности параллельна скорости.



Второе условие предполагает малость квантовых поправок [4]; оно приводит к более сильному ограничению:

$$\gamma H \ll \alpha H_e = \frac{m^2c^3}{e\hbar} \simeq 4{,}4\cdot 10^{13}\ Э. \qquad (П.3)$$

Умножая уравнения (П.1) соответственно на $\dot{x}$, $\dot{y}$ и $\dot{z}$ и складывая результаты, приходим к закону изменения энергии частицы

$$mc^2\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{2e^4H^2\gamma^2}{3m^2c^5}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)\ * . \qquad (П.4)$$

С помощью (П.4) третье уравнение (П.1) сводится к еще одному закону сохранения:

$$\gamma\frac{d\dot{z}}{dt} = 0, \quad \dot{z} = \text{const}. \qquad (П.5)$$

Подчеркнем, что продольный импульс не сохраняется, сохраняется только продольная скорость.

Для ультрарелятивистской частицы $\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2 = c^2$; поэтому из сохранения продольной скорости следует и сохранение квадрата поперечной скорости $v_\perp^2 = \dot{x}^2+\dot{y}^2$, а также – сохранение модуля угла между направлением движения частицы и магнитным полем (см. также [2]). Постоянство величины $v_\perp$ немедленно позволяет найти простое решение уравнения (П.4):

---

* Поскольку при выводе (П.4) направление начальной скорости было произвольным, эта формула справедлива и для случая винтового движения. Вопрос о соотношении (П.4) с потоком излучения при $\dot{z} \neq 0$ мы предполагаем рассмотреть в специальной работе.

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{1 + \dfrac{kH^2\gamma_0 t}{\gamma_{||}^2}} . \qquad (П.6)$$

Здесь $\gamma_{||} = (1 - \dot{z}^2/c^2)^{-1/2}$ – продольной лоренц-фактор, а величина $k = \dfrac{2e^4}{3m^3c^5}$.

С помощью (П.4) можно также существенно упростить первые два уравнения (П.1), сведя их к

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} - \frac{\omega_H}{\gamma}\dot{y} + \frac{kH^2}{\gamma}\dot{x} = 0 , \\ \ddot{y} + \frac{\omega_H}{\gamma}\dot{x} + \frac{kH^2}{\gamma}\dot{y} = 0 . \end{aligned}\right\} \qquad (П.7)$$

Здесь введено обозначение

$$\omega_H = \frac{eH}{mc} . \qquad (П.8)$$

Подчеркнем, что уравнения движения (П.7) не содержат радиационных членов, пропорциональных $\gamma^2$ *.

С помощью комплексной переменной $\zeta = x+iy$ система уравнений (П.7) сводится к уравнению

$$\ddot{\zeta} + \frac{k + i\omega_H}{\gamma}\dot{\zeta} = 0 \qquad (П.9)$$

с решением

$$\frac{d\zeta}{dt} = \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_0 e^{-(i\omega_H + kH^2)\tau} , \qquad (П.10)$$

---

* Аналогичное обстоятельство уже отмечалось в нашей работе /6/, посвященной каналированию ультрарелятивистских частиц.



где $\tau$ – собственное время частицы. Умножая (П.10) на комплексно-сопряженное выражение, получаем формулу для квадрата поперечной скорости частицы:

$$v_\perp^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (v_\perp^2)_0 \, e^{-2kH^2\tau} , \qquad (П.11)$$

Как уже подчеркивалось ранее, мы рассматриваем движение на ограниченном отрезке времени, пока величина поперечной скорости практически не изменяется (эквивалентная формулировка: пока движение остается ультрарелятивистским в системе, в которой $\dot{z} = 0$). Тогда из (П.11) следует ограничение на величину собственного времени:

$$2kH^2\tau \ll 1 \; * , \qquad (П.12)$$

т.е. формула (П.10) фактически переходит в

$$\frac{d\zeta}{dt} = \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_0 e^{-i\omega_H \tau} . \qquad (П.10')$$

Времена $\tau$ и $t$ связаны известным соотношением

$$\tau = \int_0^t \frac{dt}{\gamma} , \qquad (П.13)$$

которое с учетом (П.6) дает

$$\tau = \frac{t}{\gamma_0} + \frac{kH^2t^2}{2\gamma_{||}^2} = \frac{1}{\omega_H}\left(\phi + \frac{p^2\phi^2}{\gamma_{||}^2}\right) , \qquad (П.13')$$

где $\phi$ и $p^2$ определены формулами (12) и (13). Теперь (П.10') можно записать в виде

---

*Легко показать, что ограничивающее неравенство (П.12) фактически совпадает с прежним условием (18).

$$\frac{d\zeta}{d\phi} = \left(\frac{d\zeta}{d\phi}\right)_0 e^{-i\left(\phi + \frac{p^2\phi^2}{\gamma_{||}^2}\right)}, \qquad (\Pi.10'')$$

откуда следует

$$\zeta = \zeta_0 + \left(\frac{d\zeta}{d\phi}\right)_0 \int_0^{\phi} e^{-i\left(\phi + \frac{p^2\phi^2}{\gamma_{||}^2}\right)} d\phi. \qquad (\Pi.14)$$

Если начальные условия выбраны по аналогии с (9), т.е.

$$x_0 = 0, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = v_\perp,$$

$$y_0 = \frac{v_\perp \gamma_0}{\omega_H}, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = 0, \qquad (\Pi.15)$$

то (П.14) дает

$$x = \frac{v_\perp \gamma_0}{\omega_H} \int_0^{\phi} \cos\left(\phi + \frac{p^2\phi^2}{\gamma_{||}^2}\right) d\phi,$$

$$y = \frac{v_\perp \gamma_0}{\omega_H}\left(1 - \int_0^{\phi} \sin\left(\phi + \frac{p^2\phi^2}{\gamma_{||}^2}\right) d\phi\right). \qquad (\Pi.16)$$

В системе, в которой ультрарелятивистская частица не имеет продольной скорости, $\gamma_{||} = 1$, $v_\perp = c$ и формулы (П.16) переходят в (11).



ЛИТЕРАТУРА

1. Erber T. Rev.Mod.Phys., 1966, 38, p. 626.
2. Shen C.S. Phys.Rev.D, 1972, 6, p. 2736.
3. Lubart N.D. Phys.Rev.D, 1977, 9, p. 2717.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля, Изд. "Наука", М., 1973.
5. Таблицы интегралов Френеля. Изд. АН СССР, М., 1953.
6. Бонч-Осмоловский А.Г., Подгорецкий М.И. ОИЯИ, Р2-11250, Дубна, 1978.
7. Dirac P.A.M. Proc.Roy.Soc., 1938, 167, p. 148.
8. Гинзбург В.Л. Теоретическая физика и астрофизика, Изд. "Наука", М., 1975.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 июля 1978 года.