

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



K-231

4926/2-78

А.Каримходжаев, Р.Н.Фаустов

9/21-78
P2 - 11746

УРОВНИ ЭНЕРГИИ (μ)-АТОМА

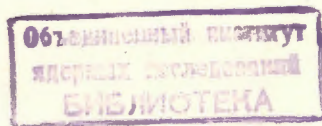
1978

P2 - 11746

А.Каримходжаев*, Р.Н.Фаустов

УРОВНИ ЭНЕРГИИ ($\pi\mu$)-АТОМА

Направлено в ЯФ



*ИЯФ АН УзССР, Ташкент.

Каримходжаев А., Фаустов Р.Н.

P2 - 11746

Уровни энергии $(\pi\mu)$ -атома

В рамках квазипотенциального подхода Логунова-Тавхелидзе вычислены тонкая структура и лэмбовский сдвиг уровней энергии $(\pi\mu)$ -атома в приближении одно- и двухфотонного обмена с учетом адронной поляризации вакуума.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Karimkhodzhaev A., Faustov R.N.

P2 - 11746

The Energy Levels of the $(\pi\mu)$ -Atom

In the framework of the Logunov-Tavkhelidze quasipotential approach the fine structure and the Lamb shift of the $(\pi\mu)$ -atom energy levels are calculated in the one- and two-photon exchange approximation taking into account hadronic vacuum polarization.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research.

Dubna 1978

© 1978 Объединенный институт ядерных исследований Дубна

1. ВВЕДЕНИЕ

Лэмбовский сдвиг уровней энергии водородоподобных атомов является одним из важнейших радиационных эффектов^{/1,2/}, подтверждающих с большой точностью справедливость квантовой электродинамики. Недавно было сообщено о наблюдении^{/3/} связанной системы пиона и мюона: $(\pi\mu)$ -атома в атомном распаде^{/4/} $K_L^0 \rightarrow (\pi\mu)\nu$. Предлагаемые прецизионные измерения лэмбовского сдвига в таком атоме дали бы весьма ценные сведения о влиянии эффектов сильных взаимодействий на предсказания квантовой электродинамики при низких энергиях.

Интерес к изучению $(\pi\mu)$ -атома вызван в первую очередь тем, что вклад размеров пиона в общий сдвиг равен 1% и измерение лэмбовского сдвига с точностью 10^{-3} привело бы к уточнению значения электромагнитного радиуса пиона. Экспериментальные измерения пионного радиуса $r_\pi = \langle r_\pi^2 \rangle^{1/2}$ приводят к различным результатам:

$$r_\pi = 0,75 \pm 0,09 \text{ Фм} /5/,$$

$$r_\pi = 0,78 \pm 0,09 \text{ Фм} /6/,$$

$$r_\pi = 0,56 \pm 0,04 \text{ Фм} /7/.$$

В связи с вышесказанным представляется актуальным повышение точности теоретических расчетов спектра энергии $(\pi\mu)$ -атома. Недавно в работе^{/8/} была вычислена поправка на адронную поляризацию вакуума /АПВ/ к фотонному пропагатору и к лэмбовскому сдвигу мюонных атомов. В этой заметке в рамках квазипотенциального

подхода Логунова-Тавхелидзе^{/9/} вычислены спектр энергии $(\pi\mu)$ -атома, поправки порядка $a[fs]$ к энергетическим уровням и устранены некоторые неточности в ранее проведенном расчете^{/10/}.

2. СХЕМА ВЫЧИСЛЕНИЯ УРОВНЕЙ ЭНЕРГИИ

Хорошо известны преимущества квазипотенциального подхода Логунова-Тавхелидзе в решении задачи об уровнях энергии водородоподобных атомов^{/11,12/} по сравнению с другими подходами. Этот метод позволяет совмещать простоту и наглядность трехмерного описания нерелятивистской квантовой механики /уравнение Шредингера/ с ковариантным аппаратом квантовой теории поля. Общая схема квазипотенциального подхода подробно изложена в обзорах^{/11,12/}, поэтому ниже приведем только нужные нам формулы.

В дальнейшем мы будем рассматривать связанную систему спинорной частицы /мюона/ с массой m_a и скалярной частицы /пиона/ с массой m_b . Квазипотенциальное уравнение в системе центра масс имеет вид

$$\begin{aligned} & \overline{(M - \sqrt{\vec{p}^2 + m_a^2} - \sqrt{\vec{p}^2 + m_b^2}) \Psi_M(\vec{p})} = \\ & = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} V(\vec{p}, \vec{q}; \mathcal{P}) \Psi_M(\vec{q}), \end{aligned} \quad /1/$$

где M - масса связанной системы, \vec{p} и \vec{q} - относительные импульсы в конечном и начальном состояниях. Квазипотенциал V определяется в терминах амплитуды рассеяния вне энергетической поверхности:

$$V = T(1 + \overline{G}_0^{(+)} T)^{-1} = T - T \overline{G}_0^{(+)} T + \dots, \quad /2/$$

где

$$\overline{G}_0^{(+)}(\vec{p}, \vec{q}; \mathcal{P}) = \frac{(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q})}{M - \sqrt{\vec{p}^2 + m_a^2} - \sqrt{\vec{p}^2 + m_b^2}} \quad /3/$$

$\mathcal{P} = (M, \vec{0})$ - полный импульс системы, а умножение понимается в операторном смысле как интегрирование по пространству относительных трехимпульсов.

Амплитуда рассеяния:

$$T = [\overline{G}_0^{(+)}]^{-1} \Delta \overline{G}^{(+)} [\overline{G}_0^{(+)}]^{-1}, \quad /4/$$

$$\Delta \overline{G}^{(+)} \equiv \overline{G}^{(+)} - \overline{G}_0^{(+)},$$

выражается через фурье-образ двухвременной функции Грина в импульсном пространстве:

$$\overline{G}(\vec{p}, \vec{q}; \mathcal{P}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp^0 dq^0 G(p, q; \mathcal{P}), \quad p = (p^0, \vec{p}), \quad q = (q^0, \vec{q}),$$

спроектированной на положительночастотные состояния^{/11/}. Для спинор-скалярного случая операция проектирования имеет вид

$$\overline{G}^{(+)}(\vec{p}, \vec{q}; \mathcal{P}) = \frac{u_a^*(\vec{p})}{\sqrt{2\epsilon_b(\vec{p})}} \overline{G}(\vec{p}, \vec{q}; \mathcal{P}) \gamma_a^0 \frac{u_a(\vec{q})}{\sqrt{2\epsilon_b(\vec{q})}}, \quad /5/$$

$$\epsilon_{a,b}(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 + m_{a,b}^2}.$$

Дираковские спиноры, нормированные условием $u^*u = 1$, возьмем в стандартном представлении:

$$u(\vec{p}) = \sqrt{\frac{\epsilon(\vec{p}) + m}{2\epsilon(\vec{p})}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{\sigma} \vec{p}}{\epsilon(\vec{p}) + m} \end{pmatrix} w, \quad /6/$$

где w - двухкомпонентный паулиевский спинор. Четырехвременная функция Грина удовлетворяет уравнению Бете-Солпитера:

$$G - G_0 = G_0 K G = G_0 K G_0 + \dots$$

В рамках квантовой электродинамики квазипотенциал можно построить по теории возмущений:

$$V = V_{1\gamma} + V_{2\gamma} + \dots, \quad /7/$$

$$V_{1\gamma} = T_{1\gamma}, \quad V_{2\gamma} = T_{2\gamma} - V_{1\gamma} G_0^{(+)} V_{1\gamma} + \dots,$$

где $T_{1\gamma}$ - амплитуда однофотонного обмена с радиационными поправками, $T_{2\gamma}$ - амплитуда двухфотонного обмена и т.д. Удобно выделить явно кулоновский потенциал

$$V_{1\gamma} = V_C + \Delta V_{1\gamma}, \quad V_C(\vec{k}^2) = -\frac{4\pi Z\alpha}{\vec{k}^2}, \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi}, \quad /8/$$

где Z - заряд частицы b /ядра/. Уравнение /1/ в нерелятивистском пределе переходит в уравнение Шредингера

$$(W - \frac{\vec{p}^2}{2\mu}) \Psi(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q V(\vec{p}, \vec{q}; W) \Psi(\vec{q}), \quad /9/$$

$$\mu = \frac{m_a m_b}{m_a + m_b}, \quad W = M - m_a - m_b.$$

За исходное приближение принимается точное решение уравнения /9/ с кулоновским потенциалом, для которого

$$W_{Cn} = -\frac{(Z\alpha)^2 \mu}{2n^2}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad /10/$$

$\Psi_{Cn}(\vec{p})$ - кулоновские волновые функции. Сдвиг уровней определяется по обычной теории возмущений:

$$W = W_{Cn} + \Delta W, \quad /11/$$

$$\Delta W \approx \langle n | \Delta V | n \rangle = \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3p d^3q \Psi_{Cn}^*(\vec{p}) \Delta V(\vec{p}, \vec{q}; W) \Psi_{Cn}(\vec{q}).$$

В дальнейшем нам понадобится значение величины

$$|\Psi_{Cn}(\vec{r}=0)|^2 = \frac{(Z\alpha\mu)^3}{\pi n^3} \delta_{\ell 0}, \quad /12/$$

где ℓ - орбитальное квантовое число.

3. ТОНКАЯ СТРУКТУРА УРОВНЕЙ ($\pi\mu$) - АТОМА

Общее выражение для квазипотенциала, соответствующего однофотонному обмену, в приближении рассеяния имеет следующий вид /в системе центра масс $\vec{p}_a = -\vec{p}_b = \vec{p}$, $\vec{q}_a = -\vec{q}_b = \vec{q}$ /:

$$V_{1\gamma}(\vec{p}, \vec{q}) = Z e^2 u_a(\vec{p}) \Gamma_{a\mu}(p_a, q_a) u_a(\vec{q}) \mathcal{D}^{\mu\nu}(k) \otimes \frac{\Gamma_{b\nu}(p_a, p_b)}{\sqrt{2\epsilon_b(\vec{p})} \sqrt{2\epsilon_b(\vec{q})}}, \quad /13/$$

где

$$\Gamma_{a\mu}(p_a, q_a) = \gamma_\mu \rho_a(k^2) + \frac{ik^\nu}{2m_a} \sigma_{\mu\nu} f_a(k^2), \quad k = \mathbf{0}, \vec{p} - \vec{q},$$

$$\Gamma_{b\nu}(p_a, p_b) = (p_b + q_b)_\nu \rho_b(k^2), \quad p_{a,b}^0 = \epsilon_{a,b}(\vec{p}), \quad q_{a,b}^0 = \epsilon_{a,b}(\vec{q}),$$

$\rho_{a,b}(0) = 1$, $f_a(0) = a$ - аномальный магнитный момент. Хотя для ($\pi\mu$) - атома $Z=1$, мы будем явно писать Z для того, чтобы отличать радиационные поправки от релятивистских. Фотонный пропагатор $\mathcal{D}^{\mu\nu}$ удобно выбрать в так называемой кулоновской калибровке:

$$\mathcal{F}^{00}(\mathbf{k}) = -\frac{d(k^2)}{k^2}, \quad \mathcal{F}^{0i}(\mathbf{k}) = \mathcal{F}^{i0}(\mathbf{k}) = 0, \quad /14/$$

$$\mathcal{F}^{ij}(\mathbf{k}) = -\frac{d(k^2)}{k^2} \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{k^2} \right), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad d(0) = 1.$$

Величина $d(k^2)$ описывает эффект поляризации вакуума. В силу малости средних значений импульсов в атоме $\langle \vec{p}^2 \rangle = 2\mu |W_{Cn}|$ произведем разложение в равенстве /13/ по параметру \vec{p}^2/m^2 . Используя явный вид спиноров /6/ и оставляя в /13/ лишь члены первого порядка по этому параметру, в согласии с определением /8/ получаем:

$$V_{1\gamma} = V_C + \Delta V_{1\gamma}, \quad \Delta V_{1\gamma} = V_{fs} + V_0 + V_S, \quad /15/$$

$$V_{fs} = -\frac{Ze^2}{k^2} d(k^2) \rho_a(k^2) \rho_b(k^2) \left(1 + \frac{2m_a}{m_b} \left\{ \frac{i\sigma[\vec{p} \times \vec{q}]}{4m_a^2} - \frac{\vec{k}^2}{8m_a^2} \right\} \right), \quad /16/$$

$$V_0 = -\frac{Ze^2}{k^2} \rho_a(k^2) \rho_b(k^2) d(k^2) \left\{ \frac{\vec{p}^2 + \vec{q}^2}{2m_a m_b} - \frac{(\vec{p}^2 - \vec{q}^2)^2}{4m_a m_b k^2} \right\}, \quad /17/$$

$$V_S = -\frac{Ze^2}{k^2} [d(k^2) \rho_b(k^2) G_{Ea}(k^2) - 1] - \frac{Ze^2}{k^2} \frac{i\sigma[\vec{p} \times \vec{q}]}{2m_a^2} \left(1 + \frac{m_a}{m_b} \right) d(k^2) \rho_b(k^2) f_a(k^2), \quad k^2 = -\vec{k}^2, \quad /18/$$

где введен электрический формфактор

$$G_{Ea}(k^2) = \rho_a(k^2) + \frac{k^2}{4m_a^2} f_a(k^2). \quad /19/$$

Кроме того, имеется поправка к кинетической энергии из разложения по \vec{p}^2/m^2 квадратного корня в уравнении /1/:

$$V_{kin} = -\frac{\vec{p}^4}{8\mu^3} \left(1 - 3 \frac{\mu}{m_a + m_b} \right) (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{q}). \quad /20/$$

Обсудим теперь физический смысл различных слагаемых в определении /15/. Потенциал V_{fs} вместе с первым слагаемым в поправке к кинетической энергии /20/ дает тонкое расщепление кулоновских уровней энергии /10/. Потенциал V_0 вместе со вторым слагаемым поправки /20/ приводит не только к общему сдвигу, зависящему от главного квантового числа n , но и к характерному для скалярной электродинамики сдвигу S -уровня, впервые отмеченному Тодоровым /13/. Потенциал V_S представляет собой поправку на структуру частиц и поляризацию вакуума и приводит к лэмбовскому сдвигу. Перейдем к вычислению тонкой структуры.

В качестве потенциала в уравнении /1/ сначала возьмем $V_C + V_{fs} + V_0$ без учета радиационных поправок, поляризации вакуума и структуры частиц:

$$d(k^2) = 1, \quad \rho_a(k^2) = \rho_b(k^2) = 1.$$

Получающееся после таких приближений уравнение совпадает с уравнением Брейта /2,13/ в системе центра масс/:

$$\left[W - \frac{\vec{p}^2}{2\mu} + \frac{\vec{p}^4}{8\mu^3} \left(1 - 3 \frac{\mu}{m_a + m_b} \right) \right] \Psi(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q (V_C + V_{fs} + V_0)_{\vec{p}, \vec{q}} \Psi(\vec{q}). \quad /21/$$

Уравнение /21/ приводит к правильному спектру энергии лишь в первом порядке теории возмущений. Перепишем далее уравнение /21/ в координатном пространстве с учетом явных выражений для потенциалов:

$$\begin{aligned} & \{W + (\frac{a}{2} - \frac{\vec{p}^2}{2\mu}) + \frac{\vec{p}^4}{8\mu^3} (1 - \frac{3\mu}{m_a + m_b}) + \\ & + \frac{a}{2m_a m_b} [\vec{p}^2 + \frac{i\vec{r}\vec{p}}{r^2} - \frac{\vec{L}^2}{2r^2}] - \\ & - \frac{a}{8m_a^2} [1 + 2(1 + \frac{2m_a}{m_b}) \frac{\vec{L}\vec{\sigma}}{r^3}] \} \Psi(r) = 0, \end{aligned} \quad /22/$$

где $\vec{p} = -i\vec{\nabla}$, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

Используя явный вид средних значений ^{/2/} степеней r и оператора \vec{p} по кулоновским волновым функциям, получим поправку к кулоновским уровням $m_a \equiv m_\mu$, $m_b \equiv m_\pi$ /:

$$\begin{aligned} \Delta W_{fs} = & - \frac{(Za)^4 \mu}{(m_\mu + m_\pi) n^3} \left\{ \frac{m_\mu - \mu}{2\ell + 1} + \frac{m_\pi + \mu}{2j + 1} \right\} + \\ & + \frac{(Za)^4 \mu}{8n^4} \left(3 - \frac{\mu}{m_\mu + m_\pi} \right), \mu = \frac{m_\mu m_\pi}{m_\pi + m_\mu}, j = \ell \pm \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad /23/$$

Отметим, что в отличие от обычных водородоподобных атомов вырождение тонкой структуры $(\mu\pi)$ -атома по ℓ отсутствует. Таким образом, для $(\pi\mu)$ -атома осуществляется, по выражению Бродского ^{/14/}, "естественный лэмбовский сдвиг":

$$[\Delta W(2S) - \Delta W(2P)]_{\text{Бреит}} = - \frac{(Za)^4 \mu (m_\mu - \mu)}{12(m_\mu + m_\pi)}. \quad /24/$$

Перейдем к вычислению радиационных поправок порядка $a[fs]$.

4. ЛЭМБОВСКИЙ СДВИГ В $(\pi\mu)$ -АТОМЕ. ВКЛАД ОДНОФОТОННОГО ОБМЕНА

Хорошо известно ^{/2, 12/}, что при вычислении лэмбовского сдвига приходится одновременно устранять как ультрафиолетовые, так и инфракрасные расходимости. Это приводит к тому, что на практике используется, как правило, "смешанное" рассмотрение этой проблемы: нерелятивистское - в области малых частот фотонов и релятивистское - в области больших частот. Вследствие этого возникает проблема ^{/2/} "сшивания" полученных результатов. Эта проблема впервые была решена ^{/15/} на основе ковариантного уравнения Бете-Солпитера. Недавно удалось развить ^{/16/} весьма общий метод суммирования вклада мягких /инфракрасных/ фотонов, основанный на новом уравнении типа Дайсона-Швингера для двухчастичной функции Грина. Здесь мы применим этот формализм для вычисления лэмбовского сдвига низшего порядка $a[fs]$ в $(\pi\mu)$ -атоме. Заметим, что все эффекты "связанности" проявляются лишь при малых импульсах виртуального фотона. Параметр λ , ограничивающий низкочастотную /НЧ/ область, следует выбрать таким, чтобы

$$(Za)^2 \mu \ll \lambda \ll \mu. \quad /25/$$

На практике удобно взять $\lambda \sim Za\mu$. В соответствии с этим интеграл по импульсу виртуального фотона разобьем на две части:

$$\int d^3k dk^0 = \left[\int_{|\vec{k}| < \lambda} d^3k + \int_{|\vec{k}| > \lambda} d^3k \right] \int_{-\infty}^{\infty} dk^0. \quad /26/$$

Поскольку главную роль в эффектах "связанности" играет кулоновское взаимодействие, то в НЧ области можем использовать кулоновскую функцию Грина нерелятивистского уравнения Шредингера ^{/9/}, модифицированного соответствующим образом. При этом с нужной точностью достаточно использовать лишь положительночастотную проекцию четырехвременной функции Грина:

$$G_C^{(+)} - G_0^{(+)} = G_0^{(+)} [\bar{G}_0^{(+)}]^{-1} [G_C^{NR} - \bar{G}_0^{(+)}] [\bar{G}_0^{(+)}]^{-1} G_0^{(+)} ,$$

где

/27/

$$G_0^{(+)}(p, q) = i(2\pi)^4 \delta^4(p - q) S_a^{(+)}(p_a) S_b^{(+)}(p_b) ,$$

$$S_{a,b}^{(+)} = (p^0 - \sqrt{\vec{p}^2 + m_{a,b}^2})^{-1} ,$$

$$\bar{G}_C^{(+)}(\vec{p}, \vec{q}; \mathcal{P}) \approx G_C^{NR}(\vec{p}, \vec{q}; W) = \sum_n \frac{\Psi_{Cn}(\vec{p}) \Psi_{Cn}^*(\vec{q})}{W - W_{Cn} + i0} .$$

Здесь суммирование ведется как по дискретному, так и по непрерывному спектру энергий. Подставив функцию Грина /27/ в выражение, соответствующее диаграммам рис. 1а, и проинтегрировав по k^0 , найдем квазипотенциал $\Delta V_{1\gamma}$ в НЧ области:

$$\begin{aligned} \Delta V_{1\gamma}^{<}(\vec{p}, \vec{q}; W) &= -\frac{e^2}{(2\pi)^3} \int_{|\vec{k}| < \lambda} \frac{d^3k}{2k} \{ \bar{u}_a(\vec{p}) \gamma_{a\mu} u_a(\vec{p} - \vec{k}) \times \\ &\times [\sum_n \frac{\Psi_{Cn}(\vec{p} - \eta_b \vec{k}) \Psi_{Cn}^*(\vec{q} - \eta_b \vec{k})}{W - W_n - k + i0} - \\ &- \frac{(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q})}{\epsilon_a(\vec{p}) - \epsilon_a(\vec{p} - \vec{k}) - k + i0}] \bar{u}_a(\vec{q} - \vec{k}) \gamma_a^\mu u_a(\vec{q}) + \\ &+ \frac{(2p - k)_\mu \cdot Z^2}{\sqrt{2\epsilon_b(\vec{p})} \sqrt{2\epsilon_b(\vec{p} - \vec{k})}} \otimes [\sum_n \frac{\Psi_{Cn}(\vec{p} + \eta_a \vec{k}) \Psi_{Cn}^*(\vec{q} + \eta_a \vec{k})}{W - W_n - k + i0} - \end{aligned}$$

$$- \frac{(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q})}{\epsilon_b(\vec{p}) - \epsilon_b(\vec{p} - \vec{k}) - k + i0}] \otimes \frac{(2q - k)^\mu}{\sqrt{2\epsilon_b(\vec{q})} \sqrt{2\epsilon_b(\vec{q} - \vec{k})}} \} ,$$

$$k = |\vec{k}|, \quad \eta_{a,b} = \frac{m_{a,b}}{m_a + m_b} . \quad /28/$$

Соответствующая действительная часть поправки к уровням выражается /2, 12/ через хорошо известный логарифм Бете /для $(\pi\mu)$ -атома/:

$$\begin{aligned} \text{Re} \Delta W_n^{<} &= \frac{4\alpha(Z\alpha)^4 \mu^3}{3\pi n^3} \left[\frac{1}{m_\mu^2} + \frac{Z^2}{m_\pi^2} \right] \times \\ &\times \left[\ln \frac{(Z\alpha)^2 \mu}{2W_{n,\ell}^{av}} + \delta_{\ell 0} \ln \frac{2\lambda}{(Z\alpha)^2 \mu} \right] , \quad /29/ \end{aligned}$$

где $W_{n,\ell}^{av}$ - средняя энергия возбуждения с учетом приведенной массы.

При вычислении спектра энергии в высокочастотной /ВЧ/ области можно, как указывалось выше, пренебречь эффектами "связанности" и воспользоваться потенциалом /18/, полученным в приближении рассеяния. Представим инвариантную функцию $d(k^2)$ в виде

$$d(k^2) = 1 - \Pi(e^+ e^-) - \Pi(\mu^+ \mu^-) - \Pi(\text{адроны}) , \quad /30/$$

где Π - поляризационный оператор соответствующих частиц. Тогда квазипотенциал V_s можно естественным образом разбить на три части:

$$V_s^{>} = V_\mu^{>} + V_\pi^{>} + V_e^{>} , \quad /31/$$

где $V_\mu^{>}$ содержит поправку к мюонной вершинной части и на мюонную поляризацию вакуума второго порядка /рис. 1з/, $V_\pi^{>}$ - поправку к пионной вершинной части

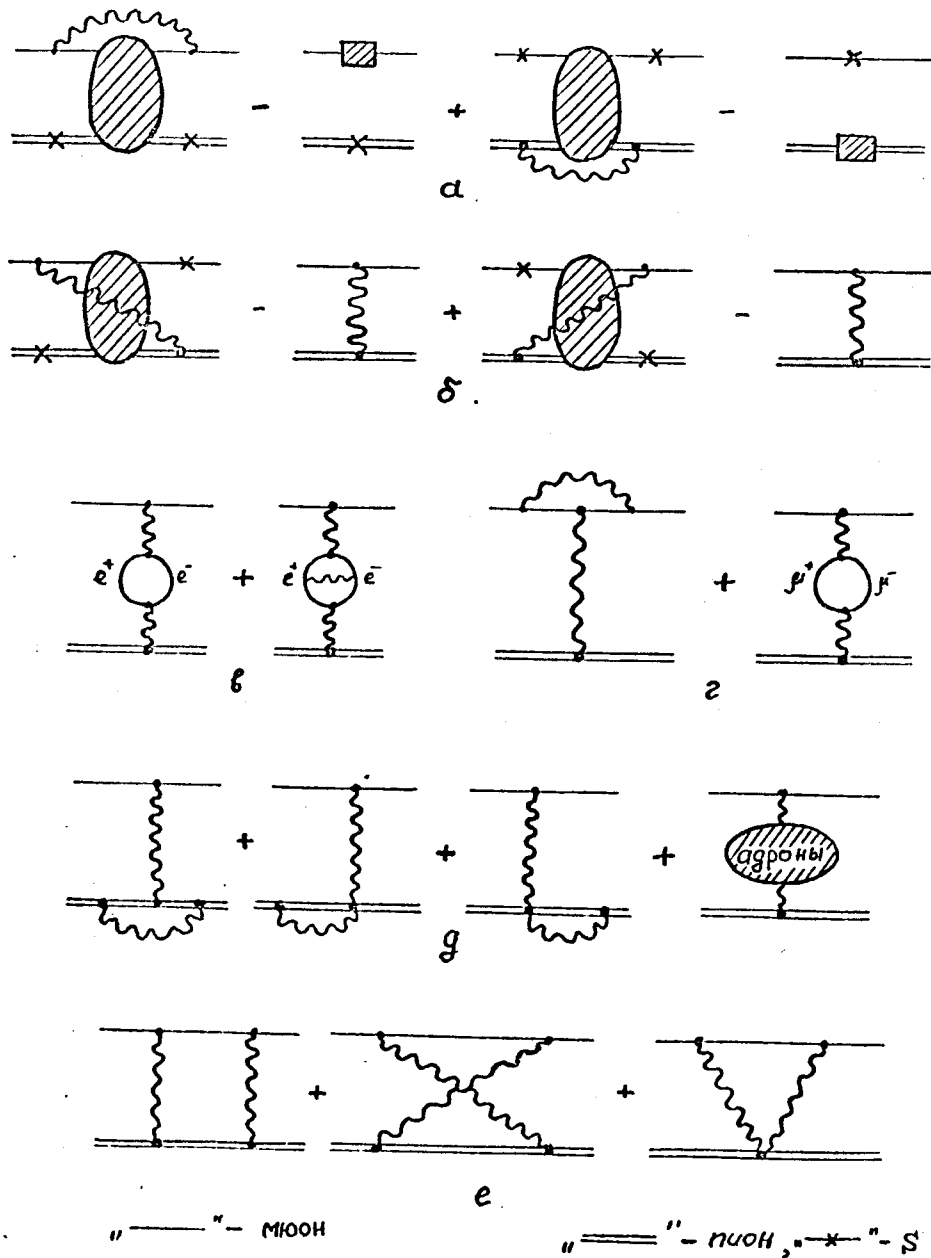


Рис. 1

второго порядка и на адронную поляризацию вакуума /рис. 1д/, $V_e^>$ - поправку на электрон-позитронную поляризацию вакуума /ЭППВ/ второго и четвертого порядков /рис. 1в/. Для формфакторов $\rho(k^2)$, $f(k^2)$ и функции $\Pi(\mu^+\mu^-)$ известны /1,17/ явные приближенные выражения:

$$\rho_\mu(k^2) \approx 1 + \frac{\alpha}{3\pi} \left(\ln \frac{m_\mu}{2\lambda} + \frac{11}{24} \right) \frac{k^2}{m_\mu^2}, \quad f_\mu(k^2) = a \approx \frac{\alpha}{2\pi},$$

$$\Pi(\mu^+\mu^-) \approx \frac{\alpha}{15\pi} \frac{k^2}{m_\mu^2},$$

$$\rho_\pi(k^2) \approx 1 + \frac{\alpha}{3\pi} \frac{k^2}{m_\pi^2} \left(\ln \frac{m_\pi}{2\lambda} + \frac{1}{12} \right) + \frac{k^2}{6} \langle \Gamma_\pi^2 \rangle, \quad /32/$$

где λ - параметр инфракрасного обрезания. Исходя из экспериментальных данных по аннигиляции e^+e^- в адроны для поляризационного оператора Π (адроны) при малых передачах импульса было получено /8/ выражение

$$\Pi(\text{адроны}) \approx \frac{\alpha}{3\pi} \frac{k^2}{m_h^2}, \quad m_h^2 \approx 4m_\pi^2. \quad /33/$$

Подставляя выражения /30/, /32/ и /33/ в равенства /18/ и /11/, найдем сдвиг уровней энергии (π_μ) -атома в виде суммы нескольких вкладов:

- вклад мюонной вершинной части второго порядка:

$$\Delta W_n^> = \frac{(Z\alpha)^4 4a\mu^3}{3\pi^3 m_\mu^2} \left\{ \left[\ln \frac{m_\mu}{2\lambda} + \frac{11}{24} - \frac{3}{8} \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2} \right] \delta \ell_0 + \frac{3}{4} \left[\frac{1}{2\ell+1} - \frac{1}{2j+1} \right] \left(1 + \frac{m_\mu}{m_\pi} \right) \right\}, \quad /34/$$

- вклад мюонной поляризации вакуума второго порядка:

$$\Delta W_n^> = - \frac{4a(Za)^4 \mu^3}{15n^3 m_\mu^2 \pi} \delta \ell_0, \quad /35/$$

- вклад пионной вершинной части второго порядка и поправки на структуру пиона:

$$\Delta W_n^> = \frac{4a(Za)^4 \mu^3}{3\pi n^3 m_\mu^2} \left[\ln \frac{m_\pi}{2\lambda} + \frac{1}{12} \right] \delta \ell_0 + \frac{2}{3} \frac{(Za)^4 \mu^3}{n^3} \langle r_\pi^2 \rangle \delta \ell_0, \quad /36/$$

- вклад АПВ:

$$\Delta W_n^> = - \frac{4a(Za)^4 \mu^3}{3\pi n^3 m_\mu^2} \delta \ell_0 = - \frac{4a(Za)^4 \mu^3}{3\pi n^3 (4m_\pi^2)} \delta \ell_0, \quad /37/$$

значение которого превышает на порядок соответствующий вклад пионной петли с точечными вершинами *.

Складывая результаты для ВЧ области /34/-/37/ с результатом для НЧ области /29/, получим не зависящее от параметра λ выражение, которое для сдвига 2S- и 2P-уровней ($\pi\mu$)-атома имеет вид:

$$\Delta W(2S) = \frac{a^5 \mu^3}{6\pi m_\mu^2} \left[\ln \frac{m_\mu}{2W_{2,0}^{av}} + \frac{19}{30} \right] + \frac{a^5 \mu^3}{6\pi m_\pi^2} \left[\ln \frac{m_\pi}{2W_{2,0}^{av}} - \frac{1}{6} \right], \quad /38/$$

$$\Delta W(2P) = \frac{a^5 \mu^3}{6\pi m_\mu^2} \left[\ln \frac{Ry}{W_{2,1}^{av}} - \frac{m_\mu}{8\mu} \right] + \frac{a^5 \mu^3}{6\pi m_\pi^2} \ln \frac{Ry}{W_{2,1}^{av}}, \quad /39/$$

где

$$\ln \frac{Ry}{W_{2,0}^{av}} = -2,811769883(28), \quad \ln \frac{Ry}{W_{2,1}^{av}} = 0,030016697(12),$$

$$Ry = \frac{a^2 \mu}{2}.$$

* Отметим, что в работе /10a/ вклад пионной петли приведен с неправильным знаком.

Переходя к вычислению вклада потенциала $V_e^>$, заметим, что основную долю в сдвиг уровней мюонных атомов внесет эффект ЭППВ. В этом случае, как хорошо известно /18/, нельзя пользоваться нерелятивистским выражением /32/ для поляризационного оператора. Дело в том, что характерные импульсы мюона в ($\pi\mu$)-атоме $|\vec{p}_\mu| \sim a m_\mu$ для мюона являются нерелятивистскими, но по отношению к электрону релятивистскими. Используя точное выражение /1, 18/ для оператора $\Pi(e^+e^-)$, найдем вклад* потенциала $V_e^>$ в лэмбовский сдвиг ($\pi\mu$)-атома /10, 19/:

$$\Delta W(2S) - \Delta W(2P) = -Ry \int_0^1 dx \frac{a^2}{(\sqrt{x} + a)^4} \rho\left(\frac{a^2}{x}\right), \quad /40/$$

где

$$\Pi(k^2) = k^2 \int_{4m_e^2}^\infty \frac{dm^2 \rho(m^2)}{m^2(m^2 - k^2 + i0)},$$

$$a = \frac{2m_e}{a\mu}, \quad \mu = \frac{m_\mu m_\pi}{m_\mu + m_\pi}.$$

Спектральная функция $\rho\left(\frac{a^2}{x}\right)$ во втором порядке равна:

$$\rho\left(\frac{a^2}{x}\right) = \frac{a}{3\pi} \left(1 + \frac{1}{2}x\right) \sqrt{1-x}, \quad /41/$$

а в четвертом порядке - приведена в работе /20/. Численное интегрирование в выражении /40/ приводит к следующим значениям /10/:

1/ для вклада ЭППВ второго порядка:

$$\Delta W(2S) - \Delta W(2P) = -76,584 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}, \quad /42/$$

2/ для вклада ЭПВВ четвертого порядка:

$$\Delta W(2S) - \Delta W(2P) = -0,589 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}. \quad /43/$$

* В соответствующих выражениях ошибочно написаны множители 1/2 в работе /10a/ и 2 в работе /19/.

5. ЛЭМБОВСКИЙ СДВИГ В $(\pi\mu)$ -АТОМЕ. ВКЛАД ДВУХФОТОННОГО ОБМЕНА

Перейдем теперь к вычислению поправок, связанных с двухфотонным обменом /рис. 1б,е/, которые учитывают эффекты отдачи. Впервые такие поправки порядка

$\alpha \frac{m_a}{m_b} [\text{fs}]$ для связанных состояний двух спинорных

частиц были получены численно Солпитером^{/21/}а в аналитическом виде - в работе Фултона и Мартина^{/15/}. Такие же поправки для водорода в рамках "модели эффективного потенциала" рассмотрены Гротчем и Йенни^{/22/}. Последовательное вычисление поправок на двухфотонный обмен в рамках квазипотенциального подхода содержится в работе^{/23/}. Квазипотенциал, соответствующий двухфотонному обмену, определен выражениями /7/ и /8/, а сдвиг уровней равен

$$\begin{aligned} \Delta W_{2\gamma} &= \langle n | V_{2\gamma} + \Delta V_{1\gamma} \overline{G}_0^{(+)} \Delta V_{1\gamma} | n \rangle = \\ &= \langle n | T_{2\gamma} - V_C \overline{G}_0^{(+)} V_C - V_C \overline{G}_0^{(+)} \Delta V_{1\gamma} - \Delta V_{1\gamma} \overline{G}_0^{(+)} V_C | n \rangle. \end{aligned} \quad /44/$$

Выражение для амплитуды двухфотонного обмена $T_{2\gamma}$ имеет следующую структуру /в системе центра масс/:

$$T_{2\gamma}(\vec{p}, \vec{q}; \mathcal{P}) = \frac{\bar{u}_a(\vec{p})}{\sqrt{2\epsilon_b(\vec{p})}} M_{2\gamma}(\vec{p}, \vec{q}; \mathcal{P}) \frac{u_a(\vec{q})}{\sqrt{2\epsilon_b(\vec{q})}},$$

где

$$M_{2\gamma}(\vec{p}, \vec{q}; \mathcal{P}) = \frac{i(Ze^2)^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \mathcal{D}^{\mu\nu}(k-p) \gamma_{a\mu} S_a(\eta_a \mathcal{P} + k) \gamma_{a\lambda} \otimes$$

$$\otimes \{ (2\eta_b \mathcal{P} - p - k)_\nu S_b(\eta_b \mathcal{P} - k) (2\eta_b \mathcal{P} - q - k)_\sigma +$$

$$\begin{aligned} &+ [2(\eta_b \mathcal{P} - p) - q + k]_\sigma S_b(\eta_b \mathcal{P} + k - p - q) [2(\eta_b \mathcal{P} - q) - p + k]_\nu - \\ &- 2g_{\sigma\lambda} \} \mathcal{D}^{\sigma\lambda}(k - q), \end{aligned}$$

$$\mathcal{P} = (M, \vec{0}), \quad p = (0, \vec{p}), \quad q = (0, \vec{q}), \quad k = (k_0, \vec{k}),$$

$$p_{a,b} = \eta_{a,b} \mathcal{P} \pm p, \quad S_a^{-1}(p) = p \gamma_a - m_a, \quad S_b^{-1} = p^2 - m_b^2.$$

/45/

При использовании кулоновской калибровки /14/ для фотонного пропагатора амплитуда $T_{2\gamma}$ /45/ естественным образом разбивается на три части, соответствующие обмену двумя кулоновскими, кулоновским и поперечным и двумя поперечными фотонами:

$$T_{2\gamma} = T_{CC} + T_{CT} + T_{TT},$$

$$M_{2\gamma} = M_{CC} + M_{CT} + M_{TT}.$$

/46/

При вычислении вклада в квазипотенциал от этих трех частей амплитуды приходится использовать различного рода приближения. В ВЧ области можно пренебречь эффектами "связанности" в промежуточных виртуальных состояниях. В приближении

$$\vec{p} \approx \vec{q} \approx 0, \quad W = M - m_a - m_b \approx 0 \quad /47/$$

амплитуда T_{CC} принимает простой вид:

$$\begin{aligned} T_{CC}^{>}(0,0) &= \frac{i(Z\alpha)^2}{2m_b \pi^2} \int_{|\vec{k}| > \lambda} \frac{d^3k}{k^4} \int \frac{(2m_a + k_0) dk_0}{(m_a + k_0)^2 - k^2 - m_a^2} \otimes \\ &\otimes \left[\frac{(2m_b - k_0)^2}{(m_b - k_0)^2 - k^2 - m_b^2} + \frac{(2m_b + k_0)^2}{(m_b + k_0)^2 - k^2 - m_b^2} - 2 \right] = \end{aligned}$$

$$= -\frac{16(Z\alpha)^2 \mu}{3\lambda^3} + \frac{4(Z\alpha)^2 (m_b - m_a)}{\lambda(m_a + m_b) m_b} - \frac{4(Z\alpha)^2}{3m_a m_b} + \frac{2(Z\alpha)^2}{(m_b^2 - m_a^2)} \frac{m_a}{m_b} \ln \frac{m_b}{m_a}. \quad /48/$$

Найдем теперь соответствующий вклад вычитаемой итерации в выражении /44/ для поправки к уровням энергии. Нужная часть квазипотенциала однофотонного обмена равна

$$\Delta V_{1\gamma}(\vec{p}, \vec{q}) = -\frac{4\pi Z\alpha}{\vec{k}^2} \left[\frac{\vec{p}^2 + \vec{q}^2}{2m_a m_b} - \frac{(\vec{p}^2 - \vec{q}^2)^2}{4m_a m_b k^2} - \frac{\vec{k}^2}{8m_a^2} \left(1 + \frac{2m_a}{m_b}\right) \right]. \quad /49/$$

Таким образом, в принятом выше приближении

$$\begin{aligned} & [V_C \bar{G}_0^{(+)} V_C + V_C \bar{G}_0^{(+)} \Delta V_{1\gamma} + \Delta V_{1\gamma} \bar{G}_0^{(+)} V_C] > \approx \\ & \approx \frac{2(Z\alpha)^2}{\pi} \int_{|\vec{k}| > \lambda} \frac{d^3 k}{\vec{k}^2 (m_a + m_b - \sqrt{k^2 + m_a^2} - \sqrt{k^2 + m_b^2})} \left[\frac{1}{2m_a m_b} - \right. \\ & \left. - \frac{m_b + 2m_a}{4m_a^2 m_b} + \frac{1}{\vec{k}^2} \right] \approx -\frac{16\mu(Z\alpha)^2}{3\lambda^3} + \frac{4(Z\alpha)^2 (m_b - m_a)}{\lambda m_b (m_a + m_b)}. \quad /50/ \end{aligned}$$

Подставляя выражения /49/ и /50/ в равенство /44/, получаем не зависящий от параметра λ результат, который для сдвига 2S- и 2P-уровней ($\pi\mu$)-атома имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta W_{CC}(2S) &= -\frac{\alpha^5 \mu^3}{6\pi m_\pi m_\mu} + \frac{\alpha^5 \mu^3 m_\mu}{4\pi (m_\pi^2 - m_\mu^2) m_\pi} \ln \frac{m_\pi}{m_\mu}, \\ \Delta W_{CC}(2P) &= 0. \quad /51/ \end{aligned}$$

Заметим, что этот результат отличается от случая спинор-спинорной системы /15,23/ логарифмическим членом и совпадает с результатом работы /10/. Перейдем к рассмотрению вклада обмена двумя поперечными фотонами в сдвиг уровней энергии. В ВЧ области, как и прежде, положим $\vec{p} = \vec{q} \approx 0$ и $M \approx m_a + m_b$. Тогда выражение для амплитуды $T_{TT}^>$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} T_{TT}^>(0,0) &= \frac{i(Z\alpha)^2}{2m_b \pi^2} \int_{|\vec{k}| > \lambda} d^3 k \int \frac{4k_0 dk_0}{(k_0^2 - \vec{k}^2)^2 [(m_a + k_0)^2 - \vec{k}^2 - m_a^2]} = \\ &= \frac{2(Z\alpha)^2}{m_a m_b} \ln \frac{2\lambda}{m_a}. \quad /52/ \end{aligned}$$

Это выражение отличается от случая спинор-спинорной системы конечным логарифмическим членом. В НЧ области уже нельзя пренебречь внешними импульсами \vec{p} и \vec{q} , но по-прежнему можно считать $M \approx m_a + m_b$. В этом случае

$$\begin{aligned} T_{TT}^<(\vec{p}, \vec{q}) &= \frac{i(Z\alpha)^2}{2m_b \pi^2} \int \frac{d^4 k}{(k_0^2 - \vec{k}_p^2)(k_0^2 - \vec{k}_q^2)} [\delta^{ij} - \frac{k_p^i k_p^j}{\vec{k}_p^2}] \left[\frac{k_0 \sigma_i \sigma_n}{(m_a + k_0)^2 - \vec{k}^2 - m_a^2} \right] \otimes \\ & \otimes \left[\frac{(k+p)_j (k+q)_\ell}{(m_b - k_0)^2 - \vec{k}^2 - m_b^2} + \frac{(k_q - 2p)_\ell (k - 2q)_j}{(m_b + k_0)^2 - \vec{k}_{pq}^2 - m_b^2} - 2g_{j\ell} \right] \left[\delta^{\ell n} - \frac{k_q^n k_q^\ell}{\vec{k}_q^2} \right] \approx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \approx -\frac{(Z\alpha)^2}{m_b \pi} \int_{|\vec{k}| < \lambda} \frac{d^3 k (k_p + k_q + 2\sqrt{\vec{k}^2 + m_a^2}) \left(1 + \frac{(\vec{k}_p \cdot \vec{k}_q)^2}{\vec{k}_p^2 \cdot \vec{k}_q^2}\right)}{\sqrt{m_a^2 + \vec{k}^2} (k_p + k_q) [m_a^2 - (k_p + \sqrt{m_a^2 + \vec{k}^2})] [m_a^2 - (k_q + \sqrt{m_a^2 + \vec{k}^2})^2]} \approx \\ & \approx -\frac{(Z\alpha)^2}{4m_a m_b \pi} \int_{|\vec{k}| < \lambda} d^3 k \left[1 + \frac{(\vec{k}_p \cdot \vec{k}_q)^2}{\vec{k}_p^2 \cdot \vec{k}_q^2} \right] \left[\frac{1}{k_p k_q \sqrt{\vec{k}^2 + m_a^2}} + \frac{2}{k_p k_q (k_p + k_q)} \right], \end{aligned}$$

где $\vec{k}_p = \vec{k} - \vec{p}$, $\vec{k}_q = \vec{k} - \vec{q}$, $\vec{k}_{pq} = \vec{k} - \vec{p} - \vec{q}$,

$$k_p = \sqrt{\vec{k}_p^2}, k_q = \sqrt{\vec{k}_q^2}, k_{pq} = \sqrt{\vec{k}_{pq}^2}.$$

/53/

Соответствующий матричный элемент $\langle T_{TT} \rangle$ по кулоновским волновым функциям /2/ 2S- и 2P- состояний, определяющий сдвиг уровней энергии, напоминает вклад /15,23/ не зависящей от спина части амплитуды спинор-спинорной системы и согласно работе /15/ имеет вид:

$$\Delta W_{TT}^{<}(2S) = \frac{(Z\alpha)^5 \mu^3}{4\pi m_a m_b} \left[\ln \frac{m_a Z\alpha}{2\lambda} + \frac{7}{4} + \frac{4}{3}(1 - \ln 2) \right],$$

$$\Delta W_{TT}^{<}(2P) = - \frac{(Z\alpha)^5 \mu^3}{48\pi m_a m_b}.$$

/54/

Как и следовало ожидать, складывая выражение /54/ с поправкой $\Delta W_{TT}^{>} = \langle T_{TT} \rangle$, где $T_{TT}^{>}$ дается выражением /52/, мы получаем не зависящий от λ конечный результат, который для сдвига $(\pi\mu)$ -атома равен

$$\Delta W_{TT}(2S) = \frac{\alpha^5 \mu^3}{4\pi m_\mu m_\pi} \left[\ln \alpha + \frac{7}{4} + \frac{4}{3}(1 - \ln 2) \right],$$

$$\Delta W_{TT}(2P) = - \frac{\alpha^5 \mu^3}{48\pi m_\mu m_\pi}.$$

/55/

Наибольшие трудности представляет вычисление вклада в сдвиг уровней от обмена кулоновским и поперечным фотоном. Здесь инфракрасную особенность удается устранить лишь с помощью явного учета эффектов "связанности", т.е. суммирования многократных обменов кулоновскими фотонами в виртуальных промежуточных состояниях /рис. 16/. Не выписывая громоздких выражений для соответствующих диаграмм, отметим, что вклад

в сдвиг уровней вычисляется так же, как и в случае однофотонного обмена /выражения /28/, /29//, и полностью приведен для спинор-спинорной системы в работах /15,23/. Заметим, что результат не зависит от спина частиц и поэтому выражение для сдвига уровней получается такое же, как и для спинор-спинорного случая /для $(\pi\mu)$ -атома/:

$$\Delta W_{CT}(2S) = \frac{\alpha^5 \mu^3}{3\pi m_\mu m_\pi} \left[\ln \frac{\mu\alpha}{W_{2,0}^{av}} + \frac{25}{12} \right],$$

/56/

$$\Delta W_{CT}(2P) = \frac{\alpha^5 \mu^3}{3\pi m_\mu m_\pi} \left[\ln \frac{Ry}{W_{2,1}^{av}} - \frac{1}{12} \right].$$

Полный лэмбовский сдвиг порядка α [fs] для $(\pi\mu)$ -атома дается выражениями /24/, /38/, /39/, /42/, /51/, /55/ и /56/. Численное значение полного лэмбовского сдвига равно:

$$\Delta W(2S) - \Delta W(2P) = -79,449 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}$$

/57/

и близко к результату работы /10/. Сюда не включен вклад структуры пиона, даваемый выражением /36/.

В заключение авторы выражают благодарность Н.Н.Боголюбову, В.А.Мещерякову, Л.Д.Соловьеву, А.Н.Тавхелидзе, Л.Ш.Ходжаеву за внимание к работе и плодотворные обсуждения, В.П.Гердту - за помощь в численных расчетах и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. "Наука", М., 1976.
2. Бете Г., Солпитер Э. Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. Физматгиз, М., 1960.

3. Schwartz M. In: XVIII Int. Conf. on High Energy Physics, Tbilisi, 1976; JINR, D1,2-10400, Dubna, 1977; Coombes R. e.a. Phys.Rev.Lett., 1976, 37, p.249.
4. Неменов Л.Л. ЯФ, 1972, 15, с.1047.
5. Бережнев С.Ф. и др. ЯФ, 1976, 24, с.1127.
6. Adylov G. e.a. Nucl.Phys., 1977, B128, p.461.
7. Dally E.B. e.a. Phys.Rev.Lett., 1977, 39, p.15
8. Гердж В.П., Каримходжаев А., Фаустов Р.Н. ОИЯИ, P2-11308, Дубна, 1978.
9. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N. Nuovo Cim., 1963, 29, p.380.
10. a) Bar-Gadga U., Cho C.F. Phys.Lett., 1973, 46B, p.95; b) Cho C.F. Nuovo Cim., 1974, 23A, p.557.
11. Фаустов Р.Н. ЭЧАЯ, 1972, 3, с.238.
12. Фаустов Р.Н. Лекции для молодых ученых. ОИЯИ, 8246, Дубна, 1974.
13. Ризов В.А., Тодоров И.Т. ЭЧАЯ, 1975, т.6, с.669.
14. Brodsky S. Proc. SLAC Summer Inst. on Particle Phys., Stanford, 1973, SLAC-167, v.2, p.141.
15. Fulton Th., Martin P.C. Phys.Rev., 1954, 95, p.811.
16. Фаустов Р.Н. Труды МИАН, 1975, 136, часть II, с.295; Каримходжаев А., Фаустов Р.Н. ТМФ, 1977, т.32, с.44.
17. Швингер Ю. Частицы. Источники. Поля. "Мир", М., 1976, т.2, с.76.
18. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика. "Наука", М., 1969, с.519.
19. Di Giacomo A. Nucl.Phys., 1969, B11, p.411; 1970, B23, p.641.
20. Kallen G., Sabry A. Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk, 1955, 29, No. 17.
21. Salpeter E.E. Phys.Rev., 1952, 87, p.328.
22. Grotch H., Yennie D.R. Rev.Mod.Phys., 1969, 41, p.350.
23. Нюнько Н.Е., Тюхтяев Ю.Н., Фаустов Р.Н. ОИЯИ, P2-7530, P2-7493, Дубна, 1973.

Рукопись поступила в издательский отдел
11 июля 1978 года.