СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 11697

Ш.И.Вашакидзе, В.А.Матвеев

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ О ЗАХВАТЕ МАССИВНОЙ ЧАСТИЦЫ КВАНТОВЫМ ПОЛЕМ.

II. Изучение уравнений для функций Грина

1978

P2 - 11697

Ш.И.Вашакидзе, В.А.Матвеев

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ О ЗАХВАТЕ МАССИВНОЙ ЧАСТИЦЫ КВАНТОВЫМ ПОЛЕМ.

II. Изучение уравнений для функций Грина

Вашакидзе Ш.И., Матвеев В.А. Р2 - 11697

Исследование задачи о захвате массивной частицы квантовым полем. II. Изучение уравнений для функций Грина

Изучается задача о захвате массивной частицы скалярным квантовым полем на основе метода коллективных координат Боголюбова. Исследуются уравнения для функций Грина в пределе сильной связи в первом неисчезающем приближении по обратной константе связи. Показано, что для элементов матрицы рассеяния, связанных с непрерывной частью спектра возбуждений в системе частица-поле, выполняется условие упругой унитарности.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

В предыдущей работе /1/ нами была рассмотрена задача о захвате массивной частицы скалярным квантованным полем. Применяя метод преобразования к коллективным координатам Н.Н.Боголюбова /2/, а также предполагая то, что большая масса частицы полностью "съедается" взаимодействием с квантованным полем /3/, мы получили разложение гамильтониана системы по обратным степеням константы связи, а также исследовали спектр возбуждений в окрестности выделенного основного состояния.

Как хорошо известно /1-5/, при использовании метода коллективных координат Боголюбова в задачах адиабатической и сильной связей, эффект взаимодействия частицы с квантовым полем в ведущем порядке разложения гамильтониана в ряд по большой константе связи выражается в появлении области поляризации поля вокруг частицы. Классическое поле, соответствующее этой поляризации, представляется как некая потенциальная яма вокруг частицы, вызывающая ее колебательное движение относительно центра системы с некоторой эффективной массой.

Аналогичные свойства сохраняются и в рассматриваемой нами задаче, однако здесь достигается условие полной компенсации массы тяжелой частицы ее взаимодействием с классическим полем облака поляризации. При этом частица как бы "растворяется" в окружающем ее квантовом поле, теряя свою индивидуальность. В результате получается коллективное образование - частица-поле, вектор состояния которого имеет преимущественно когерентную природу.

В работах /2-3/ были определены частоты нормальных колебаний системы частица-поле, т.е. энергетический спектр возбуждений вблизи выделенного основного состояния. Оказалось, что система характеризуется двумя ветвями спектра возбуждений, соответствующих как свободным стоячим волнам, так и локализованным состояниям, отвечающим захвату квантов поля областью поляризации.

В настоящей заметке мы исследуем уравнения для функций Грина, связанных с коллективными координатами системы частица-поле, проверим условие упругой унитарности для амплитуды рассеяния асимптотически свободных состояний.

Гамильтониан, описывающий нашу задачу, выбираем в виде суммы свободных энергий частицы массы M, квантованного поля и энергии взаимодействия частицы с полем

$$H=\sqrt{M^2-\nabla_r^2}+\frac{1}{2}\sum\omega_f\left(b_f^+b_f+b_fb_f^+\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}g\sum A_f e^{i\vec{f}\vec{r}}\left(b_f+b_{-f}^+\right). \quad (I)$$

Константа взаимодействия g берется очень большой $(g\gg 1)$ и предполагается, что масса частицы M - порядка g^2

$$M=g^2m. \quad (2)$$

Далее переходим к новым канонически сопряженным координатам и импульсам поля

$$q_f=g\frac{b_f+b_{-f}^+}{\sqrt{2}}, \quad P_f=-i\frac{\partial}{\partial q_f}=\frac{b_f-b_{-f}^+}{\sqrt{2}}. \quad (3)$$

Делаем преобразование Боголюбова к новым переменным частицы и поля $\vec{\lambda}$, $\vec{q}$ и Q_f

$$\vec{r}=\vec{q}+\frac{1}{g}\vec{\lambda}, \quad q_f=e^{-i\vec{f}\vec{q}}\left(U_f+\frac{1}{g}Q_f\right), \quad (4)$$

фиксируя лишние степени свободы условием

$$\sum\vec{f}v_f^*Q_f=0, \quad \text{где} \quad (5)$$

v_f - некие c-числа, удовлетворяющие условию вещественности

$$v_f^*=v_{-f}. \quad (6)$$

Переменная $\vec{q}$ в (4) является переменной, описывающей положение центра системы частица-поле, т.е. трансляционные степени свободы системы. Переменные Q_f описывают квантовое поле, а c-числа U_f определяют классические значения поля, создаваемого квантовым полем вокруг частицы. Очевидно, что при таком выборе переменных $\vec{\lambda}$ и Q_f определены трансляционно-инвариантным образом.

После подстановки (4) в выражение гамильтониана (I) получаем, что гамильтониан не зависит явно от переменной $\vec{q}$, что связано с трансляционной инвариантностью гамильтониана, и становится возможным разложение полученного выражения по степеням обратной константы связи.

Эти выкладки подробно были проделаны в работе /2/ и было получено разложение полного гамильтониана в ряд по параметру $1/g$

$$H=g^2H_2+gH_1+H_0+\dots. \quad (7)$$

Условие существования решения задачи требует обращения в ноль, который линеен по переменным поля. Не выписывая явного вида оператора H_1, приведем только окончательное уравнение, полученное из этого требования (см. работу /I/)

$$A_f+\omega_fU_f^*=0.$$

Это уравнение определяет классические значения поля $-U_f$.

Требуя обращения H_2 в ноль, мы получаем условие захвата частицы полем:

$$m-\frac{1}{2}\sum\frac{1}{\omega}|A_f|^2=0. \quad (8)$$

Таким образом, основную информацию о системе несет член нулевого порядка разложения гамильтониана по $1/g$, который имеет вид

$$H_0 = W_0 + \mathcal{D} + \mathcal{N}, \tag{9}$$

где[I]

$$W_c = \frac{m\vec{c}^{\,2}}{2} + \frac{1}{2}\sum \omega_f |\alpha_f'|^2,$$

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2m}\left(\sum \vec{f}\, U_f \frac{\partial}{\partial \tilde{Q}_f}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum\left\{\tilde{Q}_f \tilde{Q}_{-f} - \frac{\partial}{\partial \tilde{Q}_f}\frac{\partial}{\partial \tilde{Q}_{-f}}\right\}\omega_f, \tag{10}$$

$$\mathcal{N} = \sum\left\{U_f(\vec{f}\vec{c}) - i\omega_f \alpha_f'^{*}\right\}\frac{\partial}{\partial \tilde{Q}_f}.$$

Переменные Q_f являются коллективными переменными частицы и поля и выражаются через старые координаты (4) следующим образом:

$$\tilde{Q}_f = Q_f + i U_f(\vec{f}\vec{\lambda}),$$

$$-i\frac{\partial}{\partial \tilde{Q}_f} = -i\frac{\partial}{\partial Q_f} + i v_f^{*}\sum(\vec{f}\vec{f}')U_{f'}\frac{\partial}{\partial Q_{f'}} - v_f^{*}(\vec{f}\vec{\nabla}_\lambda). \tag{11}$$

В (10) введены обозначения

$$\alpha_f' = S_f + i v_f^{*}\left(\vec{f}\,[\vec{J} - m\vec{c}\,]\right), \tag{12}$$

где S_f и $\vec{c}$ - некоторые c-числа канонического преобразования волновой функции системы, а $g\vec{J} = \vec{P}$ - значение полного импульса

$$\Psi = e^{ig\vec{J}\vec{q} + i\sum S_f Q_f + im(\vec{c}\vec{\lambda})}\varphi. \tag{13}$$

При получении этих результатов предполагалось, что удовлетворяются условия

$$\sum S_f U_f \vec{f} = 0, \qquad S_f = S_{-f}^{*},$$
$$\sum f_\alpha f_\beta v_f^{*} U_f = \delta_{\alpha\beta}. \tag{14}$$

С помощью последнего уравнения из (14) мы выражаем $\vec{\lambda}$ и $\vec{\nabla}_\lambda$ через коллективные переменные $\tilde{Q}_f$ и $-i\frac{\partial}{\partial \tilde{Q}_f}$

$$\sum \vec{f} v_f^{*}\tilde{Q}_f = i\vec{\lambda},$$
$$\sum \vec{f}\, U_f\left(-i\frac{\partial}{\partial \tilde{Q}_f}\right) = -i\vec{\nabla}_\lambda. \tag{15}$$

С-числа S_f и $\vec{c}$ выбираем таким образом, чтобы $\mathcal{N}$ в (10) обратился в ноль и при этом выполнялось первое уравнение (14), получаем

$$\alpha_f' = i\,\frac{U_f^{*}}{\omega_f}(\vec{f}\vec{c}). \tag{16}$$

Таким образом, с точностью до членов порядка $O(1/g)$ система описывается гамильтонианом, состоящим из двух частей: С-числовой части - W_c, описывающей кинетическую энергию движения системы с некоторой эффективной массой[3], и операторной части - $\mathcal{D}$, описывающей коллективные возбуждения системы частица-поле вблизи выделенного основного состояния.

Задача отыскания спектра собственных значений оператора $\mathcal{D}$ уже рассматривалась нами в работах[I,3].

В настоящей работе мы рассмотрим задачу нахождения функций Грина, исходя из анализа уравнений движения в приближении (9).

Определим величины

$$A_{ff'}(t) = \langle T\left(\tilde{Q}_f(t), \tilde{Q}_{f'}(0)\right)\rangle_0, \tag{17}$$

$$B_{ff'}(t) = \langle T\left(\tilde{P}_f(t), \tilde{P}_{f'}(0)\right)\rangle_0, \tag{18}$$

$$C^{+}_{ff'}(t) = \langle T\left(\tilde{P}_f(t), \tilde{Q}_{f'}(0)\right)\rangle_0, \tag{19}$$

$$C^-_{ff'}(t) = \langle T(\tilde{Q}_f(t), \tilde{P}_{f'}(0))\rangle_0, \qquad (20)$$

где

$$\tilde{P}_f = -i\frac{\partial}{\partial \tilde{Q}_f}, \qquad (21)$$

а символ T обозначает обычное хронологическое упорядочение по времени.

Прокоммутировав гамильтониан $\mathcal{D}$ с каноническими переменными $\tilde{P}_f$ и $\tilde{Q}_f$, находим следующие уравнения движения

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{Q}}_f &= \omega_f \tilde{P}_{-f} + \frac{1}{m} U_f \vec{f} \sum \vec{f}' U^*_{f'} \tilde{P}_{f'}, \\ \dot{\tilde{P}}_f &= -\omega_f Q_{-f}. \end{aligned} \qquad (22)$$

Отсюда следуют уравнения для определенных выше функций Грина:

$$\begin{aligned} \dot{A}_{ff'} &= \omega_f C^+_{ff'} + \frac{1}{m} U_f \vec{f} \sum \vec{f}'' U^*_{f''} C_{-f''f'}, \\ \dot{B}_{ff'} &= -\omega_f C^-_{-ff'}, \\ \dot{C}^+_{ff'} &= -\omega_f A_{-ff'} - i\delta(t)\delta_{ff'}, \\ \dot{C}^-_{ff'} &= \omega_f B_{ff'} + \frac{1}{m} U_f \vec{f} \sum \vec{f}'' U^*_{f''} B_{-f''f'} + i\delta(t)\delta_{ff'}. \end{aligned} \qquad (23)$$

Продифференцировав уравнения (23) по t и переходя к фурье-представлению, найдем

$$\begin{aligned} &\sum_{f''} \left[(\omega^2 - \omega_f^2)\delta_{ff''} - \frac{1}{m} U_f (\vec{f}\vec{f}'') U^*_{f''} \omega_{f''} \right] A_{f''f'}(\omega) = \\ &= i\left[\omega_f \delta_{-ff'} + \frac{1}{m} U_f U^*_{f'} (\vec{f}\vec{f}') \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{f''} \left[(\omega^2 - \omega_f^2)\delta_{ff''} - \frac{1}{m} U^*_f (\vec{f}\vec{f}'') U_{f''} \omega_f \right] B_{f''f'}(\omega) = i\omega_f \delta_{-ff'}, \\ &C^+_{ff'}(\omega) = -\frac{1}{\omega}\delta_{ff'} + i\frac{\omega_f}{\omega} A_{ff'}(\omega), \\ &C^-_{ff'}(\omega) = -i\frac{\omega}{\omega_f} B_{ff'}(\omega). \end{aligned} \qquad (24)$$

Обозначив далее

$$a_{ff'} = -iA_{-ff'}, \qquad b_{ff'} = -iB_{-ff'}, \qquad (25)$$

перепишем первые два из соотношений (24) в более удобном виде:

$$\begin{aligned} &\sum \left[(\omega^2 - \omega_f^2)\delta_{ff''} - \frac{1}{m} U^*_f U_{f''} (\vec{f}\vec{f}'') \omega_{f''} \right] a_{f''f'} = \omega_f \delta_{ff'} + \frac{1}{m} U^*_f U^*_{f'}, \\ &\sum \left[(\omega^2 - \omega_f^2)\delta_{ff''} - \frac{1}{m} U_f U^*_{f''} (\vec{f}\vec{f}'') \omega_f \right] b_{f''f'} = \omega_f \delta_{ff'}. \end{aligned} \qquad (26)$$

Рассмотрим решение второго из уравнений (26).

Предположим, что параметр m, определенный формулой (2), велик. Тогда легко получить, что

$$b_{ff'} = b^{(0)}_{ff'} + \frac{1}{m} b^{(1)}_{ff'} + O(1/m^2), \qquad (27)$$

где

$$\begin{aligned} b^{(0)}_{ff'} &= \frac{\omega_f}{\omega^2 - \omega_f^2}\delta_{ff'}, \\ b^{(1)}_{ff'} &= U_f U^*_{f'} (\vec{f}\vec{f}') \frac{\omega_f \omega_{f'}}{(\omega^2 - \omega_f^2)(\omega_f^2 - \omega_{f'}^2)}. \end{aligned} \qquad (28)$$

Воспользовавшись видом этих выражений, попытаемся найти точное решение уравнения для величины $b_{ff'}$ в виде:

$$b_{ff'} = \delta_{ff'} \frac{\omega_f}{\omega^2 - \omega_f^2} + \frac{1}{m}\Omega_{ff'} \frac{\omega_f \omega_{f'}}{(\omega^2 - \omega_f^2)(\omega^2 - \omega_{f'}^2)}, \qquad (29)$$

где величины $\Omega_{ff'}$ удовлетворяют условию "вещественности":

$$\Omega^*_{ff'} = \Omega_{-f,-f'}.$$

Подставляя (29) в уравнение (26), находим

$$\Omega_{ff'} - \frac{1}{m} U_f \vec f \sum \vec f'' U^*_{f''} \omega_{f''} \frac{\Omega_{f''f'}}{\omega^2-\omega_{f''}^2} = U_f U^*_{f'} (\vec f \vec f'). \qquad (30)$$

Введя обозначение

$$\vec J_{f'} = \sum \vec f U_f^* \omega_f \frac{\Omega_{ff'}}{\omega^2-\omega_f^2},$$

получаем

$$\Omega_{ff'} - \frac{1}{m} U_f \vec f\, \vec J_{f'} = U_f U^*_{f'}(\vec f \vec f'). \qquad (31)$$

Умножая обе части соотношения (31) на $\vec f U_f^* \frac{\omega_f}{\omega^2-\omega_f^2}$ и суммируя по $\vec f$, нетрудно найти

$$\vec J_{f'} = U^*_{f'} \vec f' \frac{Z(\omega)}{1-\frac{1}{m} Z(\omega)}, \qquad (32)$$

где

$$Z(\omega) = \frac{1}{3} \sum |U_f|^2 \frac{\omega f^2}{\omega^2-\omega_f^2}. \qquad (33)$$

Как было показано в нашей предыдущей работе /I/, условие $Z(\omega)=m$ определяет собственные значения частот, соответствующих локализованным состояниям системы частица-поле, описываемым гамильтонианом (9).

Таким образом, из (31) и (32) находим

$$\Omega_{ff'} = U_f U^*_{f'}(\vec f \vec f') \frac{1}{1-\frac{1}{m} Z}, \qquad (34)$$

откуда следует точное решение уравнения (26) для функции Грина

$$b_{ff'} = \delta_{ff'} \frac{\omega_f}{\omega^2-\omega_f^2} + \frac{1}{m-Z}(\vec f \vec f') \frac{U_f U^*_{f'} \omega_f \omega_{f'}}{(\omega^2-\omega_f^2)(\omega^2-\omega_{f'}^2)}. \qquad (35)$$

Полученная функция Грина имеет полюса как при $\omega = \omega_f$, так и при частотах, удовлетворяющих правилу сумм

$$\frac{1}{3m} \sum |U_f|^2 \frac{\omega_f f^2}{\omega^2-\omega_f^2} = 1, \qquad (36)$$

что находится в соответствии с результатами работы /I/.

Таким образом, изучение функций Грина показывает, что задача в данном приближении характеризуется двумя ветвями спектра. Первая ветвь описывает спектр асимптотически свободных состояний, представляющих собой стоячие волны с частотами $\omega = \omega_f$. Вторая ветвь – это спектр, определенный правилом сумм (37), соответствующий локализованным состояниям в системе частицы и квантованного поля, т.е. захвату квантов поля областью поляризации скалярного поля в окрестности тяжелой частицы, масса которой полностью "съедается" взаимодействием.

Асимптотически свободным состояниям можно поставить в соответствие матрицу рассеяния, определив ее обычным образом через функцию Грина

$$b_{ff'} = b^{(0)}_{ff'} + b^{(0)}_{ff} T_{ff'} b^{(0)}_{f'f'}, \qquad (37)$$

где $b^{(0)}_{ff'}$ – "свободные" решения для функции Грина, определенные в (28). Воспользовавшись явным видом $b_{ff'}$ (35), легко получаем

$$T_{ff'} = \frac{1}{m-Z} U_f U^*_{f'}(\vec f \vec f'). \qquad (38)$$

Для мнимой части $T_{ff'}$ находим

$$\mathrm{Im}\, T_{ff'} = \frac{1}{2i}\left[T_{ff'}(\omega + i0) - T_{ff'}(\omega - i0)\right] =$$

$$= -\frac{\mathrm{Im}\, z}{|m - z|^2}\, U_f U^*_{f'}(\vec{f}\vec{f}'). \qquad (39)$$

Определяя из (33) мнимую часть z

$$\mathrm{Im}\, z = -\frac{1}{3}\sum |U_f|^2 \omega_f f^2 \pi \delta(\omega^2 - \omega_f^2) \qquad (40)$$

и подставляя ее в (36), получаем

$$\mathrm{Im}\, T_{ff'} = \sum g_{f''} T_{ff''} T^+_{f''f'}\,, \qquad (41)$$

где

$$g_f = \pi \omega_f \delta(\omega^2 - \omega_f^2)\big|_{\omega > 0} = \frac{1}{2}\pi \delta(\omega^2 - \omega_f^2)$$

– есть плотность состояний, описываемых плоскими волнами.

Таким образом, мы в явном виде продемонстрировали упругую унитарность амплитуды рассеяния в рассматриваемом нами приближении.

Рассуждая совершенно аналогично, легко найти точное решение первого из уравнений (26). Приведем здесь окончательный результат

$$a_{ff'} = \omega_f \frac{\delta_{ff'}}{\omega^2 - \omega_f^2} + \frac{1}{m - z}\, U^*_f U_{f'}(\vec{f}\vec{f}')\frac{\omega^2}{(\omega^2 - \omega_f^2)(\omega^2 - \omega_{f'}^2)}. \qquad (42)$$

Как мы уже отметили, переменные Q_f и $i\frac{\partial}{\partial Q_f}$ являются коллективными переменными, несущими информацию как о поле, так и о движении частицы в этом поле. Ввиду специфики преобразования переменных (см. формулы (I5)) в изучаемой нами задаче оказалось, что переменные поля и частицы сильно скоррелированы. Это обстоятельство позволяет перенести полученные выше результаты на корреляционные функции, описывающие "квантовое дрожание" координаты

частицы вокруг центра тяжести коллективного образования частица-поле.

Воспользовавшись (I5), находим, например, корреляционную функцию

$$Q_{\alpha\beta}(\omega) = F.\,tr. < T(\lambda_\alpha(t), \lambda_\beta(0))>_c = i\sum f_\alpha f'_\beta v_f v^*_{f'} a_{ff'} =$$

$$= i\sum |v_f|^2 f_\alpha f_\beta \frac{\omega_f}{\omega^2 - \omega_f^2} + \frac{\omega^2}{m - z}\, i|d|^2 \delta_{\alpha\beta}\,, \qquad (43)$$

где

$$d(\omega)\,\delta_{\alpha\beta} = \sum f_\alpha f_\beta v_f U^*_f \frac{1}{\omega^2 - \omega_f^2}. \qquad (44)$$

Совершенно аналогично найдем функцию корреляции частица-поле

$$\vec{\Pi}_f = F.\,tr. < T(\vec{P}_\lambda(t), \vec{P}_f(0))>_0 =$$

$$= -\frac{\vec{f}\omega_f U^*_f}{\omega^2 - \omega_f^2}\,\frac{m}{m - z}\,, \qquad (45)$$

где

$$\vec{P}_\lambda(t) = -i\vec{\nabla}_\lambda.$$

Найденные в этой работе функции Грина могут быть в дальнейшем использованы при изучении модифицированного ряда теории возмущений по параметру $1/g$, связанной с учетом членов разложения гамильтониана, опущенных в формуле (7). Этим вопросам будет посвящена следующая работа.

В заключение авторы считают своим приятным долгом поблагодарить Н.Н.Боголюбова и А.Н.Тавхелидзе за интерес к работе, стимулирующие обсуждения. Мы признательны О.А.Хрусталеву, Н.Е.Тюрину, А.В.Шургая и М.А.Смондыреву за плодотворные обсуждения.

Литература

1. Ш.И.Вашакидзе, В.А.Матвеев. ОИЯИ Р2-11637, Дубна (1978).
2. Н.Н.Боголюбов. УМЖ 2, 3, 1950; Избр.труды. "Наукова думка", т. 2 (1970).
3. Ш.И.Вашакидзе, В.А.Матвеев. Труды ТГУ т. 181, стр. 23 (1976).
4. Е.П.Солодовникова, А.Н.Тавхелидзе, О.А.Хрусталев. ТМФ 10, 162 (1972); 12, 164 (1972).
5. А.А.Архипов, Н.Е.Тюрин. ТМФ 17, 57 (1973); С.В.Семенов, О.Д.Тимофеевская, Н.Е.Тюрин. ТМФ 21, 207 (1974); Н.Е.Тюрин, А.В.Шургая ТМФ 16 , 193 (1973); Л.И.Комаров, Е.В.Крылов, Нгуен Фыог Лан, И.Д.Феранчук ТМФ 32, 262 (1977).

Рукопись поступила в издательский отдел 26 июня 1978 года.