СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P2 - 11684

В.Н.Стрельцов

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

(Релятивистская механика)

1978

Р2 - 11684

В.Н.Стрельцов

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

(Релятивистская механика)

Стрельцов В.Н. Р2 - 11684

Некоторые вопросы специальной теории относительности
(Релятивистская механика)

Обсуждаются вопросы, связанные с определением обобщенной, истинно механической силы и работы силы в специальной теории относительности. Показано, что использование 3-силы приводит к трудностям релятивистской формулировки статики. На основе использования 4-тензора момента силы обсуждаются проблемы равновесия (на примере прямоугольного рычага Льюиса-Толмена) и динамики твердого тела. Для случая непрерывного распределения материи рассматриваются 4-тензор второго ранга мощности-силы и 4-тензор третьего ранга плотности момента силы, а также плотность ковариантной функции Лагранжа. Отмечается, что значение центра масс в релятивистской механике весьма ограничено; его место занимает понятие центра инерции.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Strel'tsov V.N. P2 - 11684

Some Problems of Special Relativity
(Relativistic Mechanics)

The questions concerning the definition of generalized, true mechanical force and force work in special relativity are discussed. It is shown that the use of a 3-force leads to difficulties of the relativistic formulation of statics. Based on a 4-tensor of torque, the problems of equilibrium (e.g., for the Lewis-Tolman right-angled lever) and the dynamics of rigid body are discussed. For a continuous distribution of matter a 4-tensor of second rank of power-force and a 4-tensor of third rank of torque density as well as the Lagrange covariant function are considered. It is shown the application of cencenter of mass is highly limited in relativistic mechanics; the notion of center of inertia is used instead of it.

The investigation has been performed at the Laboratory of High Energies, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

Круг проблем, ставший предметом дискуссии в последнее время, который мы рассматриваем ниже, касается релятивистской механики и, в частности, вопроса релятивистской формулировки статики, т.е. релятивистского описания силы, момента силы, их плотностей, и других вопросов.

1. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ СИЛА. РАБОТА СИЛЫ

1.1. 3-сила. До самого последнего времени в задачах релятивистской механики очень часто применяется нерелятивистское выражение для силы:

$$\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \qquad /1/$$

В рамках специальной теории относительности при переходе от одной инерциальной системы отсчета, K° к другой, K, указанная величина должна подчиняться следующей формуле преобразования:

$$\vec{f} = \frac{\gamma^{-1}\vec{f}^{\circ} + \vec{v}\,[(\vec{v}\,\vec{f}^{\circ})(1-\gamma^{-1}) + (\vec{f}^{\circ}\vec{v}^{\circ})\beta^2\,]/v^2}{1+\vec{v}\,\vec{v}^{\circ})/c^2}, \qquad /2/$$

где $\gamma = (1-\beta\ )^{-1/2}$, $\beta = v/c$, $\vec{v}$ - скорость движения K°-системы относительно K, $\vec{f}^{\circ}$- сила и $\vec{v}^{\circ}$- скорость, измеренные в K°, c - скорость света.

Здесь необходимо подчеркнуть, что уже само определение понятия инерциальной системы отсчета накладывает жесткие ограничения на выбор выражения для релятивистской силы. Именно, если в какой-либо инерциальной системе, например K°, силы нет, то она не должна возникать и при переходе к любой другой системе отсчета.

Можно, однако, привести пример, когда это условие для величины $\vec{f}$ не выполняется. Классическим аналогом такого примера может служить известный опыт, иллюстрирующий закон равенства действия и противодействия. В этом опыте два человека стоят на разных тележках /или лодках/ и держат веревку, натягивая которую, они приводят в движение навстречу друг другу указанные тележки /лодки/.

Итак, рассмотрим две силы, $\vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$, которые в K°-системе уравновешивают друг друга:

$$\vec{f}^{\,\circ}_1 + \vec{f}^{\,\circ}_2 = 0. \qquad /3/$$

Пусть при этом для простоты $f^\circ_{1z} = f^\circ_{2z} = 0$, а ось $O^\circ X^\circ$ K°-системы скользит по оси OX K-системы.

На основании /2/, например для y-составляющих сил в K-системе, будем иметь тогда

$$f_y = f_{1y} + f_{2y} = \frac{\gamma^{-1} f^\circ_{1y}}{1 + (vv^\circ_{1x})/c^2} + \frac{\gamma^{-1} f^\circ_{2y}}{1 + (vv^\circ_{2x})/c^2}. \qquad /4/$$

Откуда с учетом /3/ получим

$$f_y = \frac{f^\circ_{1y}\beta}{\gamma(1+\beta\beta^\circ_{1x})(1+\beta\beta^\circ_{2x})}(\beta^\circ_{2x} - \beta^\circ_{1x}). \qquad /4a/$$

Легко видеть, что требуемое равенство $f_y = 0$ будет выполняться только в одном частном случае, когда

$$v^\circ_{2x} = v^\circ_{1x}.$$

Таким образом, мы получили, что некоторая взаимодействующая совокупность, покоящаяся в K°-системе, поскольку $\vec{f}^{\,\circ} = 0$, должна прийти в движение по отношению

к K-системе, поскольку с точки зрения K указанная совокупность будет испытывать действие силы $\vec{f} \neq 0$. Такой результат, являющийся прямым следствием использования в качестве силы величины $\vec{f}$*, нельзя, конечно, считать физически приемлемым.

В этой связи следует также упомянуть пример, приведенный Меллером в его монографии "Теория относительности" /2/. Он касается скопления пыли, покоящейся относительно инерциальной системы K°. Полагая далее, что указанное скопление разделяется движущейся воображаемой поверхностью на две части, 1 и 2, в системе K будем иметь $\vec{f}_1 \neq 0$. Таким образом, мы вынуждены допустить, что для поддержания постоянной скорости части 1 скопления требуется реальная физическая сила. Но это, как отмечает Меллер, означает отказ от самых фундаментальных основ экспериментальной физики Галилея и возврат к философии Аристотеля, которая утверждает, что для поддержания постоянной скорости требуется сила.

Последний известный факт, на который мы хотим обратить внимание, заключается в том, что величины $\vec{f}$ и 3-ускорение подчиняются различным формулам преобразования. Это, в свою очередь, приводит к необходимости введения продольной и поперечной масс, хотя, по определению, масса частицы в специальной теории относительности является скалярной величиной и не преобразуется при переходе от одной системы отсчета к другой.

Все отмеченные выше трудности являются прямым следствием нарушения требования ковариантности, поскольку используемая величина $\vec{f}$ /как и 3-ускорение/ не является тензорной.

1.2. 4-сила. Требованию ковариантности, а следовательно, и принципу относительности удовлетворяет сила Минковского

---

* К слову сказать, именно указанная причина лежит, например, в основе "парадокса пружины" в специальной теории относительности /1/.

$$F_i^* = \frac{dp_i}{d\tau} \qquad /5/$$

/где $i = 1,2,3,4$; p_i -4-вектор импульса, а τ - собственное время/, которая является 4-вектором.

Следуя Меллеру[2], будем называть величину F_i^*, определяющую скорость изменения 4-импульса, обобщенной силой, а величину

$$F_i = m\frac{du_i}{d\tau}, \qquad /6/$$

определяющую изменение 4-скорости u_i частицы массы m, - истинно механической силой.

На основании /5/ и /6/ будем иметь

$$F_i^* = m\frac{du_i}{d\tau} + u_i\frac{dm}{d\tau} = F_i + \Pi_i, \qquad /7/$$

где Π_i, очевидно, описывает изменение 4-импульса, обусловленное изменением массы. А кроме того,

$$F_i u_i = 0 \qquad /8/$$

и

$$F_i^* u_i = \Pi_i u_i = -\frac{dm}{d\tau}c^2. \qquad /9/$$

При этом работа обобщенной силы будет определяться формулой

$$dA_4^* = i\,dA^* = F_4^* d\tau = -\frac{u_\alpha}{u_4}F_\alpha^* d\tau - \frac{c^2}{u_4}dm \qquad /10/$$

/$\alpha = 1,2,3$/, а работа истинной механической силы - формулой

$$dA_4 = i\,dA = F_4\,d\tau = -\frac{u_\alpha}{u_4}F_\alpha\,d\tau, \qquad /11/$$

где F_4^* и F_4 - релятивистские мощности обобщенной и механической сил соответственно. Последнее выражение можно также переписать в известной форме:

$$dA = \vec{v}\,d\vec{p}, \qquad /11a/$$

подчеркнув, что в данном случае изменение импульса $d\vec{p}$ не связано с изменением массы.

2. РЕЛЯТИВИСТСКИЙ МОМЕНТ СИЛЫ

Определение релятивистского момента силы, с одной стороны, тесно связано с уже рассмотренным вопросом определения релятивистской силы, а с другой стороны - с определением понятия релятивистской длины.

2.1. Равновесие прямоугольного рычага. В рамках четырехмерной формулировки момент силы (N_{ik}) описывается антисимметричным 4-тензором второго ранга

$$N_{ik} = \Sigma(x_i F_k - x_k F_i). \qquad /12/$$

При этом собственно моменту силы Минковского F_α соответствует пространственная часть $N_{\alpha\beta}$ указанного тензора.

Ранее[2a] при рассмотрении опыта Троутона-Нобла мы уже пользовались компонентой N_{12} данного тензора.

Ниже мы коснемся аналогичной проблемы, связанной с обсуждаемым до самого последнего времени в литературе /см., например,[3-5]/ так называемым парадоксом прямоугольного рычага Льюиса-Толмена[6].

Возьмем для этого покоящийся в K°-системе угольник с плечами ℓ_x° и ℓ_y°, который испытывает действие двух сил, F_y° и F_x°, приложенных соответственно к первому и второму плечам /см. *рис. 1*/. Будем считать, что угольник находится в равновесии в собственной системе отсчета K°, т.е. крутящий момент

$$N_{12}^\circ = \ell_x^\circ F_y^\circ - \ell_y^\circ F_x^\circ = 0. \qquad /13/$$

В К-системе, где угольник движется, на основании формул преобразования для компонент силы F_i и, в частности, с учетом формулы лоренцева сокращения

$$\ell^L_x = \ell^o_x \gamma^{-1} \qquad /14/$$

имеем

$$N_{12} = \ell^L_x F_y - \ell_y F_x = (\ell^o_x \gamma^{-1}) F^o_y - \ell^o_y (F^o_x \gamma) = -\beta^2 \ell^o_x F^o_y \gamma \neq 0. \qquad /15/$$

Таким образом, в К-системе появляется крутящий момент сил.

В качестве ответа на возникающий вопрос, почему несмотря на наличие момента сил вращение рычага не имеет места, обычно выдвигается сомнительное утверждение, что появившийся момент должен в точности компенсироваться возникающим при этом моментом упругих сил.

Естественное решение рассмотренного парадокса заключается в использовании /как и в примере с конденсатором Троутона-Нобла/ введенного ранее [2a] определения релятивистской длины и вытекающей из него "формулы удлинения"

$$\ell_x = \ell^o_x \gamma , \qquad /16/$$

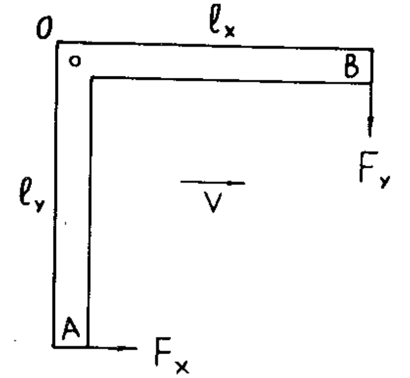

Рис.1

заменяющей /14/. В этом случае, как того и требует логика вещей, мы будем иметь

$$N^o_{ik} = 0. \qquad /17/$$

Откуда на основании тензорного анализа немедленно получаем

$$N_{ik} = 0, \qquad /18/$$

т.е. равновесие не нарушается и при переходе к другой /несобственной/ системе отсчета.

С другой стороны, в рамках общепринятого подхода мы имеем, например, что $N^o_{42} = ict^o_{OB} F^o_y \neq 0$.

Такое положение, когда для системы, находящейся в равновесии, тензор $N_{ik} \neq 0$, нельзя признать удовлетворительным. Смысл сказанного здесь поясняет рассмотренный ниже /в п. 2.3/ пример.

Подчеркнем, что вообще релятивистское равновесие некоторой системы, находящейся под действием момента сил, должно определяться именно уравнением /18/, описывающим релятивистские законы сохранения углового момента и постоянства скорости движения центра инерции

$$\frac{dM_{ik}}{d\tau} = 0, \qquad /18a/$$

где $M_{ik} = \Sigma (x_i p_k - x_k p_i)$ - 4-тензор углового момента.

Уравнение /18/ наряду с уравнением

$$\mathcal{F}_i = \Sigma F_i = 0, \qquad /19/$$

описывающим релятивистские законы сохранения импульса и энергии

$$\frac{dP_i}{d\tau} = 0 \qquad (P_i = \Sigma p_i), \qquad /19a/$$

полностью определяют состояние равновесия в релятивистской статике.

2.2. Динамика твердого тела. Применение уравнений /18/ и /19/ мы проиллюстрируем примером, рассмотренным в свое время Эйнштейном [7].

Представим себе жесткий стержень AB /*рис. 2*/,

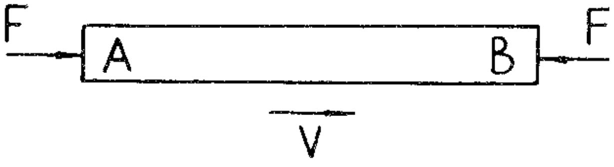

Рис.2

который покоится в K°-системе. Пусть в некоторый определенный момент времени t° к концам стержня в течение очень короткого времени приложены противоположно направленные равные силы F°, а все остальное время на стержень силы не действуют. Ясно, что описанное действие на стержень в момент t° не вызывает движения. Теперь рассмотрим в точности то же событие в системе отсчета координат, относительно которой наш стержень движется в направлении AB. Но в K-системе импульсы сил в точках A и B уже не будут одновременными; напротив, импульс в точке B будет запаздывать относительно импульса в точке A на $\ell^\circ_x(\beta/c)\gamma$ единиц времени, где ℓ°_x - длина одного стержня в покое. Таким образом, мы пришли к следующему странному результату. К движущемуся стержню приложены сначала импульс в точке A и спустя некоторое время - противоположный импульс в точке B. Оба эти импульса сил компенсируют друг друга таким образом, что движение под действием их не нарушается. Дело представляется еще более странным, если мы интересуемся энергией стержня в момент, когда импульс в точке A уже кончился, а импульс в точке B еще не начал действовать. Импульс в точке A /в общепринятом смысле/ совершает над стержнем

работу /так как стержень движется/; благодаря этой работе должна, следовательно, увеличиваться энергия стержня. Однако ни скорость, ни другие относящиеся к нему величины, от которых могла бы зависеть энергия стержня, не изменились. Налицо, таким образом, кажущееся нарушение закона сохранения энергии.

Принципиальное разрешение трудности очевидно. Своим неявным предположением, что мгновенное состояние стержня можно полностью определить действующими на него силами и скоростью стержня в тот момент, мы допустим, что вследствие приложенной к телу в какой-то точке силы скорость его возрастает и что, следовательно, распространение на все тело силы, действующей в какой-либо точке, не требует времени. Предположение такого рода, как отмечает Эйнштейн, несовместимо с принципом относительности.

Это качественное объяснение Эйнштейна мы дополним следующим количественным расчетом.

Итак, в K°-системе в данном случае имеем

$$F^\circ_2 = F^\circ_3 = F^\circ_4 = 0,$$

$$F^\circ_1 = F^\circ_A + F^\circ_B = F^\circ - F^\circ = 0, \qquad /20/$$

поскольку силы, приложенные в точках A и B, равны по величине и противоположно направлены. $N^\circ_{\alpha\beta} = 0$, $N^\circ_{24} = N^\circ_{34} = 0$,

$$N^\circ_{41} = ic(t^\circ_A F^\circ_A + t^\circ_B F^\circ_B) = ict^\circ_{AB} F^\circ = 0. \qquad /21/$$

Поскольку силы F°_A и F°_B приложены одновременно, $t^\circ_{AB} = t^\circ_A - t^\circ_B = 0$.

С точки зрения K-системы имеем

$$F_2 = F_3 = 0,$$

$$F_1 = F^\circ_A\gamma + F^\circ_B\gamma = F - F = 0, \quad F_4 = i\beta F_1 = 0, \qquad /20'/$$

т.е. энергия стержня, действительно, не изменяется. Вместе с тем уже

$$t_{AB}F = \left(\frac{\beta}{c}\ell^\circ_x\gamma\right)F^\circ\gamma) \neq 0.$$

Однако

$$N_{41} = ict_{AB}F_1 - X_{AB}F_4 ,$$

а $X_{AB} = \ell_x^o \gamma$ * и $F_4 = i\beta F^o \gamma$, откуда следует, что и по отношению к К-системе

$$N_{41} = 0. \qquad /21/$$

Этот результат, очевидно, находится в полном соответствии с законом сохранения движения центра инерции и вместе с /20/ свидетельствует о том, что при переходе к К-системе равновесие стержня, действительно, не нарушилось.

3. ТЕНЗОР МОЩНОСТИ-СИЛЫ. 4-ТЕНЗОР ПЛОТНОСТИ МОМЕНТА СИЛЫ

3.1. Тензор мощности-силы /8/. Как уже отмечалось выше, релятивистская сила, действующая на тело малых размеров/частицу/, представляет собою 4-вектор. При этом, например, механическая сила определяется выражением

$$F_i = m w_i , \qquad /22/$$

где $w_i = du_i / d\tau$ - 4-ускорение.

Вместе с тем в теории относительности пространственный объем или фактически обратная ему величина - плотность в единице объема - являются компонентами 4-вектора объема (V_i) и 4-вектора плотности тока соответственно.

Сказанное позволяет утверждать, что в случае непрерывного распределения материи /массы, заряда/, например, плотность X-компоненты релятивистской силы в единице пространственного объема должна определяться компонентой f_{14} 4-тензора второго ранга *.

$$f_{14} = w_i J_4 , \qquad /23/$$

где J_4 - временная компонента 4-тока плотности массы. В то же время, например, компонента f_{41} /поток мощности/ будет определяться выражением

$$f_{41} = w_4 J_1 . \qquad /24/$$

Отсюда можно заключить, что $f_{14} \neq f_{41}$, т.е. вводимый таким путем тензор плотности 4-силы или тензор мощности-силы f_{ik} несимметричен.

Отметим здесь для полноты, что, например, компоненты f_{11} и f_{12} вводимого тензора будут описывать изменение X-компоненты силы, действующей на нормальную и касательную единичные площадки соответственно, в единицу времени и т.д.

В общем случае для тензора f_{ik} будем иметь

$$f_{ik} = w_i J_k = \mu^o w_i u_k . \qquad /25/$$

Здесь мы воспользовались тем, что величина J_k может быть представлена в виде

$$J_k = \mu^o u_k , \qquad /26/$$

где μ^o - собственная плотность массы.

---

* В соответствии с формулой /16/.

* В то время, как, напомним, плотность 3-силы является компонентой 4-вектора. В связи с этим возникает вопрос о возможности записи релятивистских законов сохранения в виде дивергенции тензора энергии-импульса. Однако, как будет видно ниже, прежняя форма записи указанных законов может быть сохранена и в этом случае при использовании тензора плотности силы.

При этом полная сила F_i будет определяться интегралом

$$F_i = \int f_{ik} dV_k .$$

Если мы потребуем, чтобы вводимый тензор мощности-силы /как и тензор энергии-импульса T_{ik} / удовлетворял условию симметрии, то вместо /25/ будем иметь

$$f^c_{ik} = \frac{1}{2}(w_i J_k + w_k J_i) = \frac{\mu^o}{2}(w_i u_k + w_k u_i). \qquad /25'/$$

Рассмотрим далее тензор кинетической энергии

$$T_{ik} = \frac{1}{2}(J_i u_k + J_k u_i) = \mu^o u_i u_k . \qquad /27/$$

Изменение указанной величины в единицу собственного времени будет определяться выражением

$$\frac{dT_{ik}}{d\tau} = \mu^o(w_i u_k + w_k u_i) = f_{ik} + f_{ki} , \qquad /28/$$

или для симметричного тензора мощности-силы

$$\frac{dT_{ik}}{d\tau} = 2f^c_{ik} . \qquad /28'/$$

В случае изменяющейся собственной плотности массы вместо /28/ и /28'/ будем иметь

$$\frac{dT_{ik}}{d\tau} = f^*_{ik} + f^*_{ki} = f_{ik} + f_{ki} + \pi_{ik} = f_{ik} + f_{ki} + \frac{d\mu^o}{d\tau} u_i u_k ,$$

или /29/

$$\frac{dT_{ik}}{d\tau} = 2f^{c*}_{ik} = 2f^c_{ik} + \pi_{ik} = 2f^c_{ik} + \frac{d\mu^o}{d\tau} u_i u_k , \qquad /29'/$$

где последние члены и описывают существование источников собственной массы.

Образуем теперь дивергенцию T_{ik}. Тогда при условии выполнения уравнения непрерывности

$$\frac{\partial J_k}{\partial x_k} = 0 \qquad /30/$$

получим

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = \mu^o w_i . \qquad /31/$$

В результате для тензора мощности-силы найдем

$$f_{ik} = \frac{\partial T_{i\ell}}{\partial x_\ell} u_k , \qquad /32/$$

или

$$f^c_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial T_{i\ell}}{\partial x_\ell} u_k + \frac{\partial T_{km}}{\partial x_m} u_i\right), \qquad /32'/$$

откуда, в частности, можно заключить, что в случае f^c_{ik} /в отличие от f_{ik} при $u_k \neq 0$ / равенство нулю дивергенции $\partial T_{ik}/\partial x_k$ является необходимым, но не достаточным условием обращения в нуль тензора плотности силы.

3.2. Тензор плотности момента силы мы введем по аналогии с 4-тензором плотности углового момента $m_{ik\ell}$. Напомним для этого, что $m_{ik\ell}$ определяется следующим выражением:

$$m_{ik\ell} = x_i T_{k\ell} - x_k T_{i\ell} . \qquad /33/$$

При этом для тензора углового момента имеем

$$M_{ik} = \int m_{ik\ell} dV_\ell , \qquad /34/$$

где суммирование идет по одному из двух последних индексов $m_{ik\ell}$, соответствующих тензору энергии импульса.

Итак, 4-тензор плотности момента силы будет представлять собою тензор третьего ранга, антисимметричный по двум первым индексам:

$$n_{[ik]\ell} = x_i f_{k\ell} - x_k f_{i\ell} \quad . \qquad /35/$$

При этом для тензора момента силы будем иметь

$$N_{ik} = \int n_{[ik]\ell} \, dV_\ell \quad . \qquad /36/$$

В последних формулах с помощью скобок мы специально выделили индексы, удовлетворяющие условию антисимметрии, по которым при вычислении интеграла не проводится суммирование.

4. ЦЕНТР ИНЕРЦИИ

4.1. Центр масс. В механике Ньютона центр масс системы n точечных частиц определяется величиной

$$\vec{X} = \frac{\sum_n m^n \vec{x}^n}{\sum_n m^n} \quad . \qquad /37/$$

В релятивистском случае /37/ мы, очевидно, должны заменить выражением

$$X_i = \frac{\sum_n m^n x_i^n}{\sum_n m^n} \quad , \qquad /38/$$

где X_i и x_i^n - 4-векторы.

При непрерывном распределении массы /с плотностью μ/ центр масс системы в классической механике определяется как точка, радиус-вектор которой равен

$$\vec{X} = (1/M) \int \vec{x} \mu \, dV , \qquad /39/$$

где $M = \int \mu \, dV$ - полная масса системы. Отметим, что поскольку в данном /нерелятивистском/ случае пространственный объем - инвариантная величина, т.е. 3-скаляр, то ввиду инвариантности $M \; \mu$ также будет 3-скаляром.

В релятивистской механике, привлекая 4-вектор плотности тока массы J_k, вместо /39/ будем иметь

$$X_i = (1/M) \int x_i J_k dV_k \; , \qquad /40/$$

где $M = \int J_k dV_k$. Здесь важно /как и в формуле /38//, отметить наличие временной компоненты X_4, учитывающей то, что в релятивистском случае одновременные в одной системе отсчета положения элементов массы* во всех других системах отсчета будут не одновременны.

Здесь необходимо, однако, подчеркнуть, что введенная выше величина X_i /центр масс/ имеет в релятивистской механике ограниченное применение, поскольку как величины $\sum_n m^n x_i^n$ и $\int x_i J_k dV_k$, так и масса M не сохраняются. Именно поэтому в специальной теории относительности понятие центра масс должно уступить свое место понятию центра инерции.

4.2. Центр инерции системы n точечных частиц мы определим, привлекая компоненты

$$M_{\alpha 4} = \Sigma (x_\alpha p_4 - x_4 p_\alpha)^{**} \qquad /41/$$

рассмотренного выше 4-тензора углового момента M_{ik}, который является сохраняющейся величиной. При этом собственной системой отсчета (K°) совокупности n частиц, или системой центра инерции, мы будем называть такую систему отсчета, где $\Sigma x_4^\circ p_\alpha^\circ = 0$. Здесь мы полагаем также, что положения частиц в K° берутся

---

* В соответствии с нашими определением элемента объема $dV_k^{/2a/}$ это собственная система отсчета (K°).

** Здесь и ниже мы опускаем индекс "n".

в один и тот же момент времени, а поэтому, кроме того, полный импульс $P^{\circ}_{\alpha} = \Sigma p^{\circ}_{\alpha} = 0$.

Итак, введем в K°-системе радиус-вектор центра инерции с помощью выражения

$$X^{\circ}_{\alpha} P^{\circ}_{4} = \Sigma x^{\circ}_{\alpha} p^{\circ}_{4} , \qquad /42/$$

где $(c/i) P^{\circ}_{4}$ - полная энергия системы частиц. Тогда с учетом сохранения $M_{\alpha 4}$ и P_4 будем иметь, что

$$\frac{dX^{\circ}_{\alpha}}{d\tau} = 0 , \qquad /43/$$

т.е. положение центра инерции, действительно, сохраняется.

Для произвольной системы отсчета K вместо /42/ будем иметь

$$X_{\alpha} P_4 - X_4 P_{\alpha} = \Sigma (x_{\alpha} p_4 - x_4 p_{\alpha}) , \qquad /44/$$

где X_4 определяет временную координату центра инерции.

Дифференцируя /44/ по собственному времени и учитывая, что $dP_4/d\tau = 0$, $dP_{\alpha}/d\tau = 0$ и $dM_{\alpha 4}/d\tau = 0$, получим

$$\frac{dX_{\alpha}}{d\tau} P_4 - \frac{dX_4}{d\tau} P_{\alpha} = U_{\alpha} P_4 - U_4 P_{\alpha} = 0. \qquad /45/$$

Откуда мы заключаем, что в K-системе центр инерции равномерно движется со скоростью

$$\vec{V} = \frac{U_{\alpha}}{U_4} = \frac{\Sigma p_{\alpha}}{\Sigma p_4} . \qquad /46/$$

Для непрерывного распространения материи вместо /41/ будем иметь

$$M_{\alpha 4} = \int (x_{\alpha} T_{4k} - x_4 T_{\alpha k}) dV_k , \qquad /47/$$

а все предыдущие рассуждения могут быть легко перенесены на данный случай. При этом мы только хотим заметить, что с учетом /42/ и /44/ следующее выражение:

$$X_{\alpha} = \frac{\int x_{\alpha} T_{44} dV_4}{\int T_{44} dV_4} , \qquad /48/$$

будет, очевидно, справедливо только в собственной системе отсчета K°, где $\int x^{\circ}_{4} T^{\circ}_{\alpha 4} dV^{\circ}_{4} = 0$. Поэтому величину X_{α}, определенную с помощью /48/, можно назвать собственным центром инерции.

5. КОВАРИАНТНАЯ ФУНКЦИЯ ЛАГРАНЖА. ЕЕ ПЛОТНОСТЬ.

Как известно /см., например [9] /, ковариантная функция Лагранжа является скаляром и, например, для частицы в электромагнитном поле имеет вид

$$L = \frac{1}{2} m u_i u_i + \frac{e}{c} u_j A_j , \qquad /49/$$

тогда как для ковариантной /скалярной/ функции Гамильтона имеем

$$H = P_i u_i - L = \frac{1}{2} m u_i u_i = \frac{1}{2} (P_i - \frac{e}{c} A_i)^2 . \qquad /50/$$

При этом ковариантный вариационный принцип определяется требованием равенства нулю вариации интеграла действия:

$$\delta S = \delta \int L \, d\tau = 0 . \qquad /51/$$

В случае системы с непрерывным распределением массы и заряда, характеризуемой 4-векторами J_k и j_k плотности тока массы и заряда, для плотности функции Лагранжа на основании /49/ будем иметь

$$\mathcal{L}_k = \frac{1}{2} J_k u_i u_i + \frac{1}{c} j_k u_j A_j . \qquad /52/$$

Отсюда для плотности обобщенного импульса получим

$$T_{ik} = \frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial u_i} = J_k u_i + \frac{j_k}{c} A_i , \qquad /53/$$

а для плотности функции Гамильтона найдем

$$\mathcal{H}_k = T_{ik} u_i - \mathcal{L}_k = \frac{1}{2} J_k u_i u_i = -\frac{1}{2} J_k = -\frac{\mu^0}{2} u_k . \qquad /54/$$

Полагая далее, что релятивистский вариационный принцип /51/ справедлив также для плотности действия $S_k (S = \int S_k dV_k)$, т.е. для каждого элемента мировой трубки, описывающей поведение рассматриваемой системы, придем к уравнению Эйлера-Лагранжа для

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial u_i} - \frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial x_i} = 0 . \qquad /55/$$

Привлекая /52/, в частности, будем иметь

$$\frac{d}{d\tau} (J_k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{j_k}{c} A_j u_j \right) - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{j_k}{c} A_i \right) , \qquad /56/$$

где правая часть сводится к простому выражению для плотности силы Минковского $f_{ik} = (j_k / c) u_j F_{ij}$ при условии выполнения равенства

$$\frac{\partial j_k}{\partial x_i} A_j u_j = \frac{d j_k}{d\tau} A_i . \qquad /57/$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, выше мы показали, что трудности, связанные с релятивистским описанием статики и динамики твердого тела, устраняются в результате использования 4-силы и введенного ранее определения релятивистской длины, составляющих 4-тензор момента силы.

Для описания систем с непрерывным распределением материи были введены 4-тензоры f_{ik} мощности-силы и $n_{ik\ell}$ плотности момента силы, а также плотность $\mathcal{L}_i$ функции Лагранжа.

Было показано также, что значение классического понятия центра масс в релятивистской механике весьма ограничено, его место занимает понятие центра инерции.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Матвеев В.А. Сб. "Некоторые вопросы физики космоса", М., 1974, стр. 194.*
2. *Меллер К. Теория относительности М., Атомиздат, 1975, §4.6.*

2а. *Стрельцов В.Н. ОИЯИ, Р2-10912, Дубна, 1977.*

3. *Arzeliès H. Nuovo Cim., 1965, 35, p.783.*
4. *Butler J.W. Amer. J.Phys., 1970, 38, p.360.*
5. *Grøn Ø. Nuovo Cim., 1973, 17B, p.141; Lett. Nuovo Cim., 1975, 13, p.441; Amer.J.Phys., 1978, 46, p.249.*
6. *Lewis G.N., Tolman R.C. Phil.Mag., 1909, 18, p.510.*
7. *Эйнштейн А. Собр. научных трудов, "Наука", М., 1965, т. 1, стр. 53.*
8. *Стрельцов В.Н. ОИЯИ, Р2-10154, Дубна, 1976.*
9. *Голдстейн Г. Классическая механика. "Наука", М., 1975, § 6.6.*

Рукопись поступила в издательский отдел 21 июня 1978 года.