ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 11664

Г.В.Исаев, В.Н.Первушин, С.В.Пушкин

ДИНАМИЧЕСКАЯ АФИННАЯ СИММЕТРИЯ И ПЕРЕНОРМИРОВКИ В ГРАВИТАЦИИ

1978

P2 - 11664

Г.В.Исаев, В.Н.Первушин, С.В.Пушкин

ДИНАМИЧЕСКАЯ АФИННАЯ СИММЕТРИЯ И ПЕРЕНОРМИРОВКИ В ГРАВИТАЦИИ

Направлено на Международный семинар по физике высоких энергий и квантовой теории поля (Серпухов) и в Journal of Physics A.

Исаев Г.В., Первушин В.Н., Пушкин С.В. P2 - 11664

Динамическая афинная симметрия и перенормировки в гравитации

Эйнштейновский лагранжиан записан в терминах дифференциальных форм Картана группы афинных преобразований. Сформулирована почленно-ковариантная перенормировочная процедура в модифицированном формализме внешнего фонового поля, и доказана ее эквивалентность на массовой поверхности стандартному подходу.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Isayev G.V., Pervyshin V.N., Pushkin S.V. P2 - 11664

Dynamical Affine Symmetry and the Renormalization in Gravity

The Einstein lagrangian is written in terms of the affine group Catran forms. Each-order-covariant renormalization procedure is formulated within the framework of the background-field method. The approach proposed is proved to be equivalent on the mass shell with the ordinary one.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

С формальной точки зрения квантовая гравитация является неперенормируемой. Однако исследование ультрафиолетовых расходимостей представляет интерес и может свидетельствовать о нетривиальной связи между симметрией теории и ее перенормируемостью. В работе /1/ показано, что сумма контрчленов однопетлевого приближения равна нулю на массовой поверхности. В недавней работе /2/ была доказана однопетлевая конечность теории также и вне массовой поверхности. Это порождает интерес к высшим порядкам теории возмущений.

В настоящей работе для исследования структуры ультрафиолетовых расходимостей в гравитации предлагается использовать динамическую афинную симметрию.

Хорошо известно, что теория гравитации есть вариант теории калибровочных полей /3,4/. Здесь для построения перенормировочной процедуры используется другая аналогия – с киральной динамикой. Как показано в работе /5/, теория гравитационного поля есть теория спонтанного нарушения афинной и конформной симметрий, подобно тому как киральная динамика есть теория спонтанного нарушения киральной симметрии.

Метод симметрийной перенормировки для киральных теорий сформулирован в /6/ и состоит в следующем:

1. Строится почленно-инвариантная теория возмущений в формализме внешнего фонового поля. Для этого в случае теорий с нелинейной реализацией симметрии при замене $\varphi \to \varphi + h$ необходимо использовать операцию сложения на группе $\varphi \to \varphi (+) h$.

2) Сумма контрчленов в каждом порядке теории возмущений ищется в виде разложения по полному набору инвариантов группы (симметрии лагранжиана) соответствующей размерности. Построение инвариантов (в частности, лагранжиана) и классификация их по порядкам теории возмущений производится при помощи дифференциальных форм Картана/7,8/.

3) Для нахождения численных коэффициентов перед инвариантами группы требуется вычислить сингулярности минимального числа петлевых диаграмм.

В настоящей работе развиты пункты I), 2) изложенной программы применительно к гравитации. Работа построена следующим образом. В разделах 2, 3 формулируется почленно-инвариантная теория возмущений в формализме внешнего фонового поля. В разделе 4 доказана эквивалентность на массовой поверхности модифицированного производящего функционала петлевых диаграмм, введенного в разделах 2, 3, и стандартного выражения /3/. В разделе 6 строится гравитационный лагранжиан и полный набор инвариантов в терминах дифференциальных форм Картана группы афинных преобразований. При этом получены и существенно используются структурные уравнения афинной группы. Показано, что для определения ковариантной производной вместо дополнительного требования конформной симметрии /5/ можно пользоваться естественным условием тождественного равенства нулю ковариантной производной метрического тензора, что важно в связи с отсутствием конформно-инвариантной регуляризации /9/. Одновременно достигается более формальная аналогия с киральной динамикой.

2. Теория возмущений

Производящий функционал для петлевых диаграмм в методе фонового поля имеет вид

$$Z(\varphi) = N^{-1} \int \prod_{\nu \leq \mu, x} dh_{\mu\nu}(x) \prod_x \delta(f[\varphi + h]) \times \tag{I}$$

$$\times \Delta_f(\varphi + h) \exp\left\{ i \int d^4x \left(\mathcal{L}(\varphi + h) - \frac{\delta \mathcal{L}(\varphi)}{\delta \varphi_{\alpha\beta}} h_{\alpha\beta} - \mathcal{L}(\varphi) \right) \right\},$$

где $\varphi_{\mu\nu}$ – внешние (фоновые), а $h_{\mu\nu}$ – внутренние (квантовые) поля, N – нормировка, $f(\varphi + h) = 0$ – уравнение, фиксирующее калибровку, $\Delta_f(\varphi + h)$ – детерминант Фаддеева-Попова, $\mathcal{L}$ – эйнштейновский лагранжиан.

Производящий функционал (I) эквивалентен с точностью до древесных графов стандартному производящему функционалу для функций Грина /I0-I2/

$$Z(J) = N^{-1} \int \prod_{\mu \leq \nu, x} dh_{\mu\nu}(x) \prod_x \delta(f[h]) \Delta_f(h) \times \tag{2}$$

$$\times \exp\left\{ i \int d^4x \left(\mathcal{L}(h) + J^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} \right) \right\}$$

при условии, что внешние поля $\varphi_{\mu\nu}$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\delta \mathcal{L}(\varphi)}{\delta \varphi_{\alpha\beta}} = -J^{\alpha\beta}, \tag{3}$$

где $J^{\alpha\beta}$ – внешний источник. Соотношение (3) есть формальная связь между функциональными переменными $\varphi_{\alpha\beta}$ и $J^{\alpha\beta}$.

В работах/II,I2/ для чистой гравитации и чистого поля Янга-Миллса продемонстрирована независимость контрчленов, получающихся из (I), от калибровки (при некоторых дополнительных условиях на $\delta(f[h])$).

Для исследования ультрафиолетовых расходимостей достаточно найти контрчлены в лагранжиан. Контрчлены получаются разложением подынтегрального выражения (I) в ряд по $h_{\alpha\beta}$. В случае теории с линейной реализацией симметрии такой ряд является почленно инвариантным. Если же симметрия реализована нелинейно, то есть обеспечивается динамически за счет голдстоуновских полей, то почленная инвариантность ряда по $h_{\alpha\beta}$ и, соответственно, инвариантность теории возмущений в каждом порядке по числу петель нарушается. Это связано с тем, что в рассматриваемом случае пространство полей $h_{\alpha\beta}$ становится искривленным и операция $\frac{\delta^n}{\delta h^n_{\alpha\beta}}$ перестает быть ковариантной. Для построения почленно-инвариантного ряда нужно перейти к ковариантной вариационной производной $\frac{\mathcal{D}^n}{\mathcal{D} h^n_{\alpha\beta}}$ /I3/. Обозначим ряд Тейлора с ковариантными производными символом (+)

$$f(\varphi(+)h) = f(\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\mathcal{D}^n f(\varphi)}{\mathcal{D}\varphi^n} h^n. \tag{4}$$

Такое разложение соответствует переходу из точки φ в точку $\varphi+h$ в пространстве полей по геодезической. Справедливо соотношение /I3/

$$f(\varphi(+)h) = f(\xi(\tau))\Big|_{\tau=0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\delta f(\xi(\tau))}{\delta \tau^n}\Big|_{\tau=0}, \tag{5}$$

где $\xi(0) = \varphi$, $\xi(1) = \varphi+h$ и $\xi(\tau)$ удовлетворяет уравнению геодезической в пространстве полей

$$\frac{d^2\xi^i}{d\tau^2} + \Gamma^i_{k\ell} \frac{d\xi^k}{d\tau}\frac{d\xi^\ell}{d\tau} = 0.$$

Здесь $\Gamma^i_{k\ell}$ – символ Кристоффеля в пространстве полей, индексы i, k, ℓ пробегают значения $1, \ldots N$, где N – размерность пространства голдстоуновских полей (в случае гравитации N =I0).

Правые части (4) и (5) совпадают почленно /I3/.

Таким образом, практическое построение почленно инвариантного ряда (4) сводится к нахождению параметризации $f(\xi(\tau))$ с указанными свойствами. Эта задача решается при помощи дифференциальных форм Картана.

3. Дифференциальные формы Картана. Сложение на группе

Пусть G – $(k+2)$-параметрическая полупростая группа (симметрии лагранжиана), приводящая к вырождению вакуума и появлению голдстоуновских частиц, H – ее максимальная подгруппа, оставляющая инвариантным вакуум.

Формы Картана ω и θ определяются по конечным преобразованиям группы G равенством

$$G^{-1}(h)\partial_\mu G(h) = i\left[\omega^i_\mu(h) X_i + \theta^\alpha_\mu(h) Y_\alpha\right] \tag{6}$$

и начальными условиями

$$\omega^i_\mu(0) = 0, \quad \theta^\alpha_\mu(0) = 0,$$

где h – параметры группы, Y_α $(\alpha = 1, 2)$ – генераторы подгруппы H, а X_i $(i = 1, \ldots k)$ – генераторы фактор-пространства G/H, дополняющего H до группы G. Форма θ используется для построения ковариантной производной, а из форм ω и их ковариантных производных строится полный набор инвариантов группы G, в частности лагранжиан /8/. Полный набор инвариантов группы имеет вид

$$[\Delta^{n_1}\omega]^{n_2}[\omega]^{n_3},$$

где n_1, n_2, n_3 – положительные целые числа; все индексы свернуты.

С другой стороны, известно /7,8/, что форма $\omega(h)$ описывает переход из точки"нуль" в точку h в пространстве параметров, в частности в экспоненциальной параметризации элементов группы G, $G=\exp\{ih^\alpha X_\alpha\}$ форма $\omega(h)$ описывает переход по геодезической.

Произведя в (6) замену

$$G(h)\to G(\varphi)G(h) \tag{7}$$

и решая полученные уравнения на формы Картана с ненулевыми начальными условиями /I4/

$$\begin{aligned} \bar\omega(\varphi,0) &= \omega(\varphi) \\ \bar\theta(\varphi,0) &= \theta(\varphi) \end{aligned} \qquad , \tag{8}$$

получим "удлиненные" формы Картана $\bar\omega(\varphi,h)$ и $\bar\theta(\varphi,h)$. Форма $\bar\omega(\varphi,h)$ описывает переход из точки φ в точку $\varphi+h$ в пространстве полей, в частности в экспоненциальной параметризации – переход по геодезической. Замена (7) и,соответственно,переход от $\omega(h)$, $\theta(h)$ к $\bar\omega(\varphi,h)$, $\bar\theta(\varphi,h)$ называется сложением в фактор-пространстве.

После отождествления параметров фактор-пространства с полями голдстоуновских частиц /8/ сложение в фактор-пространстве совпадает с операцией (+), определенной согласно (4).

Для построения почленно-инвариантной теории возмущений необходимо выразить инварианты группы, в частности лагранжиан,в терминах форм Картана фактор-пространства и воспользоваться соотношением

$$\mathcal{L}(\varphi(+)h) = \mathcal{L}(\bar\omega(\varphi,h)).$$

Таким образом, производящий функционал почленно инвариантной теории возмущений имеет вид

$$Z(\varphi) = N^{-1}\int\prod_{\nu\leq\mu,x} dh_{\mu\nu}(x)\prod_x \delta(f[\varphi(+)h])\times$$
$$\times\Delta_f(\varphi(+)h)\exp\left\{i\int d^4x\left(\mathcal{L}(\varphi(+)h)-\frac{\partial\mathcal{L}(\varphi)}{\partial\varphi_{\alpha\beta}}h_{\alpha\beta}-\mathcal{L}(\varphi)\right)\right\}. \tag{9}$$

Прежде чем перейти к нахождению $\mathcal{L}(\bar\omega(\varphi,h))$, докажем эквивалентность на массовой поверхности производящего функционала (9) и стандартного выражения (2) с точностью до древесных графов.

4. Теорема эквивалентности

Выполним в производящем функционале для функций Грина (2) замену переменных

$$h\to f(\varphi,h) \equiv \varphi(+)h, \tag{10}$$

где φ – постоянное поле. С учетом того ,что детерминант преобразования (I0) равен единице /5/, а также равенства на массовой поверхности /I5/ $J(\varphi(+)h) = J\cdot\varphi + J h$, получим

$$Z(J,\varphi) = N^{-1}\exp\left\{i\int d^4x\, J(x)\varphi(x)\right\}\times$$
$$\times\int\prod_{\nu\leq\mu,x} dh_{\mu\nu}(x)\prod_x\delta(f[\varphi(+)h])\cdot\Delta_f(\varphi(+)h)\times \tag{11}$$
$$\times\exp\left\{i\int d^4x\left(\mathcal{L}(\varphi)+\frac{\partial\mathcal{L}(\varphi)}{\partial\varphi}\cdot h+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathcal{L}(\varphi)}{\partial\varphi^2}\cdot h^2+\ldots+J\cdot h\right)\right\}.$$

Вследствие уравнения (3) и того обстоятельства, что первая ковариантная производная от скаляра совпадает с обычной производной,члены $\frac{\partial\mathcal{L}(\varphi)}{\partial\varphi}\cdot h$ и $J\cdot h$ в (II) сокращаются и с точностью до древесных графов мы приходим к (9).

5. Гравитация в терминах форм Картана группы аффинных преобразований

Известно, что гравитационное поле есть калибровочное поле, обеспечивающее инвариантность теории тяготения Эйнштейна относительно группы общих преобразований координат. В этом проявляется глубокая аналогия между гравитационным полем и векторными полями Янга–Миллса – калибровочными полями для внутренних симметрий.

Имеется и другая глубокая аналогия – между гравитонами в теории тяготения и π-мезонами в киральной динамике $SU(2)\times SU(2)$, основанной на нелинейных реализациях киральной симметрии /5/.

Алгебра афинной группы $A(4) = P_4 \otimes L(4,R)$ состоит из генераторов группы Лоренца $L_{\mu\nu}$, генераторов собственно афинных преобразований $R_{\mu\nu}$ и генераторов трансляции P_μ :

$$\frac{1}{i}\left[L_{\mu\nu}, L_{\rho\tau}\right] = \delta_{\mu\rho}L_{\nu\tau} - \delta_{\mu\tau}L_{\nu\rho} - (\mu \leftrightarrow \nu),$$

$$\frac{1}{i}\left[L_{\mu\nu}, R_{\rho\tau}\right] = \delta_{\mu\rho}R_{\nu\tau} + \delta_{\mu\tau}R_{\nu\rho} - (\mu \leftrightarrow \nu),$$

$$\frac{1}{i}\left[R_{\mu\nu}, R_{\rho\tau}\right] = \delta_{\mu\rho}L_{\tau\nu} + \delta_{\mu\tau}L_{\rho\nu} + (\mu \leftrightarrow \nu),$$

$$\frac{1}{i}\left[L_{\mu\nu}, P_{\rho}\right] = \delta_{\mu\rho}P_{\nu} - \delta_{\nu\rho}P_{\mu},$$

$$\frac{1}{i}\left[R_{\mu\nu}, P_{\rho}\right] = \delta_{\mu\rho}P_{\nu} + \delta_{\nu\rho}P_{\mu}.$$

Рассмотрим нелинейные преобразования в фактор-пространстве $A(4)/L$, параметрами которого являются координаты x_μ и десять голдстоуновских полей $h_{\mu\nu}$ – гравитонов. Инварианты относитель-

но линейных преобразований с постоянными параметрами строятся с помощью форм Картана ω :

$$G^{-1}dG = i\left[\omega^P_\mu(d)P_\mu + \frac{1}{2}\omega^R_{\mu\nu}(d)R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\omega^L_{\mu\nu}(d)L_{\mu\nu}\right], \qquad (I2)$$

$$G = \exp\{iP_\mu x_\mu\}\exp\{\frac{i}{2}h_{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}\}.$$

Форма ω^R определяет ковариантный дифференциал голдстоуновских полей h, а формы ω^P и ω^L используются для определения ковариантного дифференцирования внешних полей Ψ, преобразующихся по представлениям группы Лоренца с генераторами $L^\Psi_{\mu\nu}$:

$$\nabla_\lambda \Psi = D\Psi / \omega^P_\lambda,$$

$$D\Psi = \left(d + \frac{i}{2}\omega^L_{\mu\nu}(d)L^\Psi_{\mu\nu}\right)\Psi. \qquad (I3)$$

Формы Картана в экспоненциальной параметризации, соответствующей выбору нормальных координат в десятимерном пространстве $h_{\mu\nu}$, имеют вид /5/

$$\omega^P_\mu(d) = z_{\mu\nu}dx_\nu, \quad \omega_{\mu\nu}(d) = z^{-1}_{\mu\sigma}dz_{\sigma\nu},$$

$$\omega^R_{\mu\nu}(d) = \frac{1}{2}\left(\omega_{\mu\nu}(d) + \omega_{\nu\mu}(d)\right) \equiv \omega_{(\mu\nu)},$$

$$\omega^L_{\mu\nu}(d) = \frac{1}{2}\left(\omega_{\mu\nu}(d) - \omega_{\nu\mu}(d)\right) \equiv \omega_{[\mu\nu]}, \qquad (I4)$$

$$z_{\mu\nu} = (e^h)_{\mu\nu}, \quad z^{-1}_{\mu\nu} = (e^{-h})_{\mu\nu}.$$

Инвариантные элементы длины и объема строятся с помощью форм ω^P /5/:

$$(ds)^2 = \omega^P_\lambda \omega^P_\lambda = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad g_{\mu\nu} = z_{\mu\sigma}z_{\sigma\nu},$$

$$dV = \sqrt{-g}\,d^4x = -i\,\omega^P_1(d)\cdot\omega^P_2(d)\cdot\omega^P_3(d)\cdot\omega^P_4(d).$$

Требование минимальности по числу производных не фиксирует однозначно теорию, так как трансформационные свойства ковариантной производной (I3) не изменяются, если к ней добавить ряд членов того же порядка по производной с произвольными коэффициентами c_1, c_2, c_3:

$$\bar{\nabla}_\lambda \Psi = \mathcal{D}_\lambda \Psi + \frac{i}{2} V_{\mu\nu,\lambda}(c_1, c_2, c_3) L^{\Psi}_{\mu\nu} \Psi, \quad \mathcal{D}_\lambda = z^{-1}_{\lambda\gamma} \partial_\gamma,$$

$$\begin{aligned} V_{\mu\nu,\lambda} = {} & \omega_{[\mu\nu],\lambda} + c_1 [\omega_{(\nu\lambda),\mu} - \omega_{(\mu\lambda),\nu}] \\ & + c_2 [\delta_{\mu\lambda} \omega_{(\sigma\sigma),\nu} - \delta_{\nu\lambda} \omega_{(\sigma\sigma),\mu}] + c_3 [\delta_{\mu\lambda} \omega_{(\nu\sigma),\sigma} - \delta_{\nu\lambda} \omega_{(\mu\sigma),\sigma}], \end{aligned} \tag{I6}$$

$$\omega_{\mu\nu,\gamma} = z^{-1}_{\mu\sigma} \mathcal{D}_\gamma z_{\sigma\nu}.$$

Как показано в работе /5/, параметры c_1, c_2, c_3 однозначно определяются из требования, чтобы теория одновременно соответствовала нелинейной реализации конформной группы

$$c_1 = -1, \quad c_2 = c_3 = 0 \tag{I7}$$

Это требование привоит к теории тензорного поля, уравнения которой совпадают с уравнениями Эйнштейна.

Существует другая возможность. К значениям параметров (I7) приводит естественное требование тождественного равенства нулю ковариантной производной метрического тензора:

$$\bar{\bar{\nabla}}_\lambda g_{\mu\nu} = 0, \tag{I8}$$

где $\bar{\bar{\nabla}}_\lambda$ определено согласно (I6).

Ковариантное выражение для самих голдстоуновских полей $h_{\mu\nu}$ можно получить, рассмотрев коммутатор ковариантных производных внешнего поля Ψ:

$$(\bar{\nabla}_\lambda \bar{\nabla}_\rho - \bar{\nabla}_\rho \bar{\nabla}_\lambda)\Psi = \frac{i}{2} R_{\mu\nu,\lambda\rho} L^{\Psi}_{\mu\nu} \Psi,$$

где $$R_{\mu\nu,\lambda\rho} = \mathcal{D}_\lambda V_{\mu\nu,\rho} + V_{\mu\nu,\gamma} V_{\rho\gamma,\lambda} + V_{\mu\gamma,\rho} V_{\nu\gamma,\lambda} - (\lambda \leftrightarrow \rho). \tag{I9}$$

Величина $R_{\mu\nu,\lambda\rho}$ связана с тензорами Римана $R_{\mu\nu\lambda\rho}$, Риччи $R_{\mu\lambda}$ и скалярной кривизной R следующим образом /5/:

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} = z_{\mu\bar{\mu}} z_{\nu\bar{\nu}} z_{\lambda\bar{\lambda}} z_{\rho\bar{\rho}} R_{\bar{\mu}\bar{\nu},\bar{\lambda}\bar{\rho}},$$

$$R_{\mu\lambda} = z_{\mu\bar{\mu}} z_{\lambda\bar{\lambda}} R_{\bar{\mu}\nu,\bar{\lambda}\nu},$$

$$R = R_{\mu\nu,\mu\nu}.$$

Величина $R_{\mu\nu,\lambda\rho}$ и ее свертки выражены как через формы Картана фактор-пространства – ω^R, так и формы Картана подгруппы стабильности вакуума – ω^L. Как было выяснено в разделе 3, для разложения в почленно-инвариантный ряд Тейлора гравитационный лагранжиан $R\sqrt{-g}$ необходимо выразить через формы Картана (и их ковариантные производные) только фактор-пространства $A(4)/L$.

Полный набор инвариантов афинной группы согласно общей теории имеет вид

$$[\nabla^{n_1} \omega^R]^{n_2} [\omega^R]^{n_3} [\nabla^{n_4} \omega^P]^{n_5} [\omega^P]^{n_6}, \tag{20}$$

где ∇ – афинная ковариантная производная (I3), $n_1, \ldots n_6$ – положительные целые числа. Если в (I9) не все индексы немые, то соответствующее выражение является ковариантом (преобразуется по представлениям афинной группы).

Из соображений размерности ясно, что $R_{\mu\nu,\lambda\rho}$ имеет вид

$$R_{\mu\nu,\lambda\rho} = \left(c_\alpha [\nabla \omega^R]_\alpha + c_\beta [\omega^R]^2_\beta \right)_{\mu\nu,\lambda\rho}. \tag{2I}$$

Здесь c_α, c_β – численные коэффициенты, которые необходимо определить. Индексы α, β означают, что членов типа $\nabla\omega^R$ и $[\omega^R]^2$ может быть несколько (различные способы свертки).

Покажем, что с учетом соотношений между формами Картана, выражаемых структурными уравнениями Картана /7/, все лишние члены $(\omega^L, \partial\omega^L)$ в (19) выпадают и $R_{\mu\nu,\lambda\rho}$ может быть сведено к виду (21).

Структурные уравнения афинной группы

Структурные уравнения отражают тот факт, что при действии на скаляр (афинной группы) два малых элемента группы коммутируют. В рассматриваемом случае имеем

$$(\delta_\lambda\delta_\rho - \delta_\rho\delta_\lambda)f = 0 \qquad , \tag{22}$$

$$\delta_\rho = i\left[\omega^P_{\mu,\rho}P_\mu + \tfrac{1}{2}\omega^R_{\mu\nu,\rho}R_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}\omega^L_{\mu\nu,\rho}L_{\mu\nu}\right] . \tag{23}$$

Подставляя (23) в (22), после довольно громоздких вычислений получаем структурные уравнения афинной группы:

$$\begin{aligned}
(\omega^P_\mu)'_{\lambda\rho} &= [\omega^P_\xi, \omega^R_{\xi\mu}]_{\lambda\rho} + [\omega^P_\xi, \omega^L_{\xi\mu}]_{\lambda\rho} \quad ,\\
(\omega^R_{\mu\nu})'_{\lambda\rho} &= 2[\omega^R_{\xi\nu}, \omega^L_{\xi\mu}]_{\lambda\rho} \quad ,\\
(\omega^L_{\mu\nu})'_{\lambda\rho} &= [\omega^R_{\xi\mu}, \omega^R_{\xi\nu}]_{\lambda\rho} + [\omega^L_{\xi\nu}, \omega^L_{\xi\mu}]_{\lambda\rho} \quad ,
\end{aligned} \tag{24}$$

где
$$(\omega^L_{\mu\nu})'_{\lambda\rho} = \delta_\lambda\omega^L_{\mu\nu}(\delta_\rho) - \delta_\rho\omega^L_{\mu\nu}(\delta_\lambda) \quad ,$$

$$[\omega^L_{\xi\nu}, \omega^L_{\xi\mu}]_{\lambda\rho} = \omega^L_{\xi\nu,\rho}\,\omega^L_{\xi\mu,\lambda} - \omega^L_{\xi\nu,\lambda}\,\omega^L_{\xi\mu,\rho} \quad ,$$

то же самое для ω^P и ω^R.

Подставляя соотношение (24) в выражение для $R_{\mu\nu,\lambda\rho}$ (19), находим

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu,\lambda\rho} = {} & \nabla_\lambda\omega^R_{\rho\mu,\nu} - \nabla_\lambda\omega^R_{\rho\nu,\mu} + \\
& + \omega^R_{\gamma\nu,\mu}\omega^R_{\lambda\gamma,\rho} - \omega^R_{\gamma\mu,\nu}\omega^R_{\lambda\gamma,\rho} + \\
& + \omega^R_{\rho\gamma,\mu}\omega^R_{\lambda\gamma,\nu} - \omega^R_{\rho\gamma,\mu}\omega^R_{\lambda\nu,\gamma} + \\
& + \omega^R_{\rho\mu,\gamma}\omega^R_{\lambda\nu,\gamma} - \omega^R_{\rho\mu,\gamma}\omega^R_{\lambda\gamma,\nu} - \\
& - (\lambda \leftrightarrow \rho) .
\end{aligned}$$

Для скалярной кривизны имеем

$$\begin{aligned}
R = R_{\mu\nu,\mu\nu} = {} & 2[\nabla_\mu\omega^R_{\nu\mu,\nu} - \nabla_\mu\omega^R_{\nu\nu,\mu}] + \\
& + 2[\omega^R_{\mu\gamma,\mu}\omega^R_{\nu\nu,\gamma} + \omega^R_{\mu\gamma,\nu}\omega^R_{\mu\nu,\gamma} - \omega^R_{\mu\gamma,\mu}\omega^R_{\nu\gamma,\nu}] - \\
& - 2[\omega^R_{\mu\gamma,\nu}\omega^R_{\mu\gamma,\nu} + \omega^R_{\mu\mu,\gamma}\omega^R_{\nu\nu,\gamma}] .\ ^{*)}
\end{aligned} \tag{25}$$

---

*) Найденные значения коэффициентов c_α, c_β можно получить и из требования конформной инвариантности выражения (21).

"Удлиненные" формы Картана, найденные из уравнения (I2) с $G = G(\varphi)G(h)$ и ненулевыми начальными условиями (I4), имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}^{p}_{\mu}(\varphi,h) &= [e^{h} e^{\varphi}]_{\mu\nu}\, dx_{\nu} \quad , \\ \bar{\omega}_{\mu\nu,\gamma}(\varphi,h) &= [e^{-h} e^{-\varphi}]_{\mu\sigma} [e^{-h} e^{-\varphi}]_{\gamma\alpha}\, \partial_{\alpha} [e^{\varphi} e^{h}]_{\sigma\nu} \quad , \end{aligned} \tag{26}$$

где $[AB]_{\mu\nu} \equiv A_{\mu\sigma} B_{\sigma\nu}$

Как видно из формул (26), (I5), (25), в формах Картана, а следовательно, и в лагранжиане происходит разделение переменных.

Заключение

Исследование аналогии между гравитацией и киральной динамикой, впервые отмеченной в /5/, позволяет записать эйнштейновский лагранжиан в терминах дифференциальных форм Картана группы афинных преобразований. Сформулирована почленно-инвариантная теория возмущений в модифицированном формализме внешнего фонового поля, и доказана ее эквивалентность на массовой поверхности обычному подходу.

В киральных теориях использование в перенормировочной процедуре форм Картана группы симметрии лагранжиана позволяет заметить два обстоятельства:

I) диаграммная техника в формализме внешнего фонового поля содержит конечное число типов внешних линий (функций классического поля), что позволяет обсуждать n -петлевое приближение ;

2) не все инварианты группы входят в контрчлены.

Подобной ситуации можно ожидать и в гравитации. Этот вопрос исследуется.

Авторам приятно поблагодарить Д.И.Блохинцева, А.А.Владимирова, Д.И.Казакова, Р.Каллош, В.И.Огиевецкого, И.В.Тютина, Е.С.Фрадкина и Д.В.Ширкова за полезные обсуждения и стимулирующую критику.

Литература:

I. G.t'Hooft, M.Veltman. Ann. H.Poincare 20, 69 (1974).
2. R.E.Kallosh, O.V.Tarasov, I.V.Tyutin. Preprint FIAN 185 (1977).
3. Л.Д.Фаддеев, В.Н.Попов. УФН, III, 427 (1973).
4. B.S.De Witt. Phys.Rev. 162, 1195; 1239 (1967).
5. А.Б.Борисов, В.И.Огиевецкий. ТМФ, 2I, 329, (1974).
6. Д.И.Казаков, В.Н.Первушин, С.В.Пушкин.
   а) ТМФ, 3I, I69 (1977);
   б) Препринт ОИЯИ, Р2-I0729 (1977).
7. Э.Картан. Геометрия римановых пространств, ОНТИ (1936).
8. Д.В.Волков. ЭЧАЯ, 4, 3 (1973).
9. M.J.Duff. Nucl.Phys. B125, 334 (1977).
I0. G. t'Hooft. Nucl.Phys., B62, 444 (1973).
II. M.T.Grisaru, P. van Niewenhuizen, C.C.Wu. Phys.Rev., D12, 3203 (1975).
I2. R.E.Kallosh. Nucl.Phys. B78, 293 (1974).
I3. J.Honerkamp. Nucl.Phys., B36, 130 (1972).
I4. В.Н.Первушин. ТМФ, 22, 20I (1975); 27, I6 (1976).
I5. R.Kallosh. Nucl.Phys., B78, 293 (1974).

Рукопись поступила в издательский отдел
I3 июня 1978 года.