СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 11657

А.М.Червяков

БЕСКОНЕЧНАЯ СЕРИЯ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТРУНЫ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

1978

P2 - 11657

А.М.Червяков

БЕСКОНЕЧНАЯ СЕРИЯ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТРУНЫ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

Червяков А.М. Р2 - 11657

Бесконечная серия законов сохранения для релятивистской струны в трехмерном пространстве-времени

Релятивистская струна в трехмерном пространстве-времени, рассматриваемая в рамках так называемого геометрического подхода, описывается нелинейным уравнением Лиувилля, для которого получена бесконечная последовательность локальных сохраняющихся токов. Наличие бесконечной серии законов сохранения свидетельствует о существовании скрытой симметрии рассматриваемого уравнения. Найдено преобразование Беклунда, которое связывает два различных решения уравнения Лиувилля и позволяет исследовать его групповую структуру.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Chervyakov A.M. P2 - 11657

Infinite Series of Conservation Laws for the Relativistic String in Three Dimensional Space-Time

The relativistic string in three dimensional space-time, considered within the geometrical approach, is described by the nonlinear Liouville equation, for which an infinite sequence of local conserved currents has been obtained. The presence of infinite series of conservation laws points to the existence of latent symmetry of the considered equation. The Backlund transformation has been obtained that connects two different solutions of Liouville's equation and allows one to investigate its group structure.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

В ряде работ [1] было установлено, что релятивистская струна в трехмерном пространстве-времени /или скалярное поле Борна-Инфельда в двумерном пространстве-времени [2] /, рассматриваемая в так называемом геометрическом подходе, описывается нелинейным уравнением Лиувилля

$$\phi_{\tau\tau} - \phi_{\sigma\sigma} - Re^{\phi} = 0, \qquad /1/$$

где $\phi(\sigma,\tau) = -\ln \dot{\vec{x}}^2(\sigma,\tau)$, а вектор-функция $\vec{x}(\sigma,\tau)$ определяет мировую поверхность струны, на которой выбрана ортогональная система координат

$$(\dot{\vec{x}} \pm \vec{x}\,')^2 = 0. \qquad /2/$$

В переменных светового конуса $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau+\sigma)$, $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau-\sigma)$ уравнение /1/ принимает вид

$$\phi_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} Re^{\phi} = 0. \qquad /3/$$

В этой форме уравнение /3/ исследовалось методом обратной задачи теории рассеяния [3]. В частности, в работе [3] были найдены тождества следов оператора L, представляющие бесконечную последовательность сохраняющихся зарядов уравнения /3/ вида

$$Q_n = \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta\, f_n(\phi, \phi_\beta, \dots), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где f_n - полином от своих переменных. Отметим, что оператор M, используемый в этой работе, имеет интегральный вид, поэтому получить с помощью такой (L,M) - пары локальные законы сохранения не удается.

Для определения бесконечной серии сохраняющихся локальных токов уравнения /3/ в настоящей заметке вводится новая (L,M) -пара. Найдено преобразование Беклунда, оставляющее инвариантным рассматриваемое уравнение.

Локальные законы сохранения для релятивистской струны в четырехмерном пространстве-времени в калибровке $x_0=\tau$ были получены в работе [4].

Уравнение /3/ можно представить в виде

$$L_\alpha = [L, M], \qquad /4/$$

где операторы L и M выбираются следующим образом:

$$L = i\tau_3 \frac{d}{d\beta} - \frac{1}{2}\phi_\beta \tau_1, \qquad M = -\frac{R}{8k} e^{\phi}(i\tau_3 - \tau_1),$$

а τ_i, $i=0,1,2,3$, - матрицы Паули

$$\tau_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Из /4/ следует, что собственные функции оператора L

$$L\psi = k\psi, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \qquad /5/$$

меняются с изменением α, выполняющей в этой схеме роль эволюционной переменной, в соответствии с уравнением

$$\psi_\alpha + M\psi = 0. \qquad /6/$$

Уравнение /5/ связывает функцию $\phi(\alpha,\beta)$ с задачей рассеяния, а уравнение /6/ дает зависимость данных рассеяния от переменной α. Восстановление потенциала

$\phi(\alpha,\beta)$ по набору данных рассеяния достигается решением обратной задачи рассеяния для оператора L.

Найдем рекуррентные соотношения для бесконечного числа сохраняющихся локальных токов. Как обычно, введем функцию

$$\omega(\alpha,\beta) = \frac{\psi_2(\alpha,\beta)}{\psi_1(\alpha,\beta)}.$$

Из /5/ и /6/ следует, что она удовлетворяет уравнениям типа Риккати:

$$\partial_\beta \omega = 2ik\omega + \frac{i}{2}\phi_\beta + \frac{i}{2}\phi_\beta \omega^2,$$

$$\partial_\alpha \omega = -\frac{R}{8k} e^{\phi}(1 + 2i\omega - \omega^2),$$

которые легко переписать следующим образом:

$$(2ik)(2i\phi_\beta\omega) = \phi_\beta \partial_\beta \Big\{ \frac{1}{\phi_\beta}(2i\phi_\beta\omega) \Big\} + \phi_\beta^2 - \frac{1}{4}(2i\phi_\beta\omega)^2 \qquad /7/$$

$$\partial_\alpha (2i\phi_\beta\omega) = R\,\partial_\beta \Big\{ e^{\phi} \Big[\frac{1}{(2ik)} + \frac{1}{2(2ik)}\frac{1}{\phi_\beta}(2i\phi_\beta\omega) \Big] \Big\}. \qquad /8/$$

Решение уравнения /7/ относительно $(2i\phi_\beta\omega)$ можно представить в виде формального ряда по степеням k^{-1}:

$$(2i\phi_\beta\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(\alpha,\beta)}{(2ik)^n}, \qquad /9/$$

где коэффициенты $f_n(\alpha,\beta)$ вычисляются с помощью рекуррентной формулы

$$f_{n+1} = \phi_\beta^2 \delta_{n,0} + \phi_\beta \partial_\beta \Big(\frac{f_n}{\phi_\beta}\Big) - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} f_{n-k} f_k, \quad f_0 = 0. \qquad /10/$$

Подстановка разложения /9/ в уравнение /8/ дает бесконечную серию законов сохранения:

$$\partial_\alpha f_n = R\partial_\beta [e^{\phi}(\delta_{n,1} + \frac{1}{2\phi_\beta} f_{n-1})], \quad n = 1,2\dots \qquad /11/$$

Сохраняющиеся локальные по $\phi(\alpha,\beta)$ токи имеют вид

$$J_n^\alpha = f_n(\alpha,\beta), \quad J_n^\beta = -Re^{\phi}(\delta_{n,1} + \frac{f_{n-1}}{2\phi_\beta}). \qquad /12/$$

При переходе к переменным струны $\vec{x}(\alpha,\beta)$ в формуле /12/ следует воспользоваться условиями ортогональной калибровки /2/. Выражения для локальных токов в этих переменных имеют довольно сложный вид. Приведем, например, два первых тока из бесконечной серии /12/:

$$J_1^\alpha = \{ \frac{(\vec{x}_\alpha \vec{x}_\beta)_\beta}{(\vec{x}_\alpha \vec{x}_\beta)} \}^2, \quad J_1^\beta = -\frac{R}{(\vec{x}_\alpha \vec{x}_\beta)}, \qquad /13/$$

$$J_2^\alpha = \frac{1}{2}\partial_\beta (J_1^\alpha), \qquad J_2^\beta = \frac{1}{2}\partial_\beta (J_1^\beta).$$

Локальные законы сохранения /11/, по-видимому, указывают на существование некоторой симметрии уравнения /3/. Так, например, наличие бесконечной серии законов сохранения уравнения Sine–Gordon связано с инвариантностью этого уравнения относительно бесконечного числа однопараметрических групп, которые являются более общими, чем группы Ли /5/. Можно надеяться, что в исследовании групповой структуры уравнения /3/ окажется полезным преобразование Беклунда, связывающее два различных решения этого уравнения следующим образом:

$$\tilde{\phi}_\beta = \phi_\beta + \sqrt{2R}\ \lambda \exp \frac{1}{2}(\tilde{\phi} + \phi),$$
$$\tilde{\phi}_\alpha = -\phi_\alpha + \sqrt{2R}\ \frac{1}{\lambda} \operatorname{sh} \frac{1}{2}(\tilde{\phi} - \phi), \qquad /14/$$

где λ - произвольный параметр.

В заключение отметим, что уравнение /1/ может быть также исследовано методом обратной задачи теории рассеяния, если представить его в операторном виде:

$$L_\tau = [L, M],$$

где (L, M) - пара совпадает по форме с операторами L и M для уравнения Sine–Gordon /6/:

$$L = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} \tau_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{d}{d\sigma} + \begin{pmatrix} A & B \\ B & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} -\tau_0 & 0 \\ 0 & \tau_0 \end{pmatrix}\frac{d}{d\sigma} + \begin{pmatrix} 0 & C \\ D & 0 \end{pmatrix},$$

а матрицы A, B, C, D выражаются через решение $\phi(\sigma,\tau)$ и функцию $w(\sigma,\tau) = \phi_\sigma + \phi_\tau$ следующим образом:

$$A = \frac{1}{4} w \tau_1, \quad B = \frac{i}{2}\sqrt{\frac{R}{8}}\, e^{\phi/2} (\tau_0 + \tau_3), \quad C = \frac{2}{i}\tau_2 B,$$

$$D = \frac{2}{i} B \tau_2.$$

Автор благодарит Б.М.Барбашова и В.В.Нестеренко за постоянное внимание к работе, В.С.Герджикова и В.К.Мельникова за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Omnes R. Preprint Laboratorie de Physique Theorique et Hautes Energies Universite de Paris–Sud, 77/12,1977;*

Барбашов Б.М., Кошкаров А.Л. ОИЯИ, Р2-11430, Дубна, 1978;
Barbashov B.M., Nesterenko V.V., Chervjakov A.M. Preprint JINR, E2-11669, Dubna, 1978.

2. *Барбашов Б.М., Черников Н.А. ЖЭТФ, 1966, 50, с. 1296.*
3. *Андреев В.А. ТМФ, 1976, 29, с. 213.*
4. *Кулиш П.П. ТМФ, 1977, 33, с. 272.*
5. Kumei S. Journal of Math.Phys.,1975, 16, 2461.
6. *Захаров В.Е., Тахтаджян Л.А.,Фаддеев Л.Д.ДАН СССР 1974, 219, с. 1334; Тахтаджян Л.А.,Фаддеев Л.Д. ТМФ, 1974, 21, с. 160.*

Рукопись поступила в издательский отдел 13 июня 1978 года