СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 11641

Х.Намсрай, Д.Цэрэн, Л.Сэрдамба

ГРУППА СТОХАСТИЧЕСКИХ ТРАНСЛЯЦИЙ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЕ К ФИЗИКЕ

1978

P2 - 11641

Х.Намсрай, Д.Цэрэн, Л.Сэрдамба

ГРУППА СТОХАСТИЧЕСКИХ ТРАНСЛЯЦИЙ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЕ К ФИЗИКЕ

Намсрай Х., Цэрэн Д., Сэрдамба Л. P2 - 11641

Группа стохастических трансляций и ее приложение к физике

В рамках стохастической трансляции получены уравнение броуновского движения частицы, а также уравнения Дирака и Клейна-Гордона. Замечено, что возможно существование нового уравнения, описывающего четыре состояния частицы с определенной энергией. Дается понятие о стохастической группе и ее представлении. Приводится конкретный пример такой группы и одно ее приложение. Получено уравнение вращательной диффузии на основе понятия стохастических вращений.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Namsraj Ch., Tseren D., Serdamba L. P2 - 11641

A Stohastic Displacement Group and Its Application in Physics

Within the stochastic desplacement the equation of the brownian motion and also the equations of Dirac and Klein-Gordon there are obtained. It is noted that the existence of a new equation describing four states with certain energy is possible. The notion of stochastic groups and its representations with illustrations in concrete examples and applications are given. The diffusion equation is obtained on the basis of the notion of stochastic rotation.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communicotion of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

I. Введение

Стохастическое пространство $\Gamma_4(\hat{x})$ Блохинцева[I] успешно применено к построению градиентно-инвариантной и конечной S -матрицы, квантовой электродинамики частиц со спином 0, I/2 и I [2] и четырехфермионной теории слабых взаимодействий[3]. Привлекательной стороной теории пространства $\Gamma_4(\hat{x})$ является то обстоятельство, что поле, усредненное в этом пространстве, оказывается нелокальным полем, исследованию которого посвящена монография Ефимова[4].

Координаты $\hat{x}$ пространства типа $\Gamma_4(\hat{x})$ определяются как стохастические сдвиги обычных координатных переменных x :

$$x_\mu \to \hat{x}_\mu = x_\mu + \delta x_\mu(\zeta, x) . \tag{I}$$

Величины δx_μ , в общем случае, являются операторами и могут зависеть от самих x , причем они необязательно должны быть коммутирующими. Здесь параметр ζ принимает случайные значения, распределение которых дается нормированной вероятностью

$$dW(\zeta) \geqslant 0, \quad \int dw(\zeta) = 1. \tag{2}$$

Способ введения стохастичности в теорию, в частности в пространство, может быть весьма различным и зависит от специфики решаемых задач. Например, стохастичность пространства может рассматриваться как пространство со случайной стохастической метрикой либо как некоторое соотношение (отображение) двух пространств. С физической точки зрения, эти два пути введения стохастичности в пространство существенно отличаются. Для целей физики важно псевдоевклидово пространство, но индефинитность метрики этого пространства в случае первого подхода приводит к ряду специфических трудностей, связанных с требованиями, предъявляемыми к инвариантности и к нормировке вероятности того или иного значения интервала. Таким образом, второй путь более приемлем в физике, и в этом случае стохастические свойства каких-либо величин вводятся явно посредством случайных параметров ζ , физический смысл которых может быть весьма различен. Этот путь имеет еще и то обоснование, что в физике стохастичность проявляется более естественно на стадии арифметизации, чем на стадии метрической (см. подробнее [5]).

Ранее нами[6] были введены стохастические сдвиги времени и координат на классическом уровне, в рамках которых были получены уравнения Шредингера и Фоккера-Планка. В данной работе рассматриваются различные возможные стохастические трансляции и группы с целью обобщения полученных в работе[6] результатов в различных случаях.

2. Стохастическая трансляция

Сначала дадим некоторое определение, заимствованное из работы Блохинцева[5]. Пусть $R_4(\xi)$ – пространство признаков. Вводя термин "пространство признаков", мы считаем важным, с точки зрения физики, подчеркнуть ту систему признаков реальных объектов, которая избирается для приведения в соответствие точек материального физического пространства точкам пространства геометрического. Далее рассмотрим множество элементов М, арифметизированное с помощью признака элемента ξ и координат этого элемента $\hat{x}$.

Допустим, что отображение признаков ξ на координаты $\hat{x}$ содержит параметр ζ , принимающий случайные значения:

$$\hat{x} = X(\xi/\zeta). \tag{3}$$

Предполагаем, что распределение возможных значений параметра ζ дается нормированной вероятностью (2). Среднее значение величины $\hat{x}$ можно определить по формуле:

$$x = \langle \hat{x} \rangle = \langle X(\xi/\zeta) \rangle = \int X(\xi/\zeta)\, dw(\zeta) \tag{4}$$

Пространство $R_4(\hat{x})$ переменных $\hat{x}$, определенное формулами (2)-(4), будем называть стохастическим пространством.

Будем предполагать дифференцируемость соотношения (3) и выполнимость условия

$$Det(\partial X_\alpha/\partial\xi_\beta) \neq 0,$$

т.е. разрешимость (3), относительно переменных ξ :

$$\xi = \xi(\hat{x}, \zeta). \tag{5}$$

Важный случай стохастического пространства реализуется тогда, когда отклонения координат $\hat{x}$ от их значений x невелики. В этом случае удобно записать (3) в виде

$$\hat{x}_\mu = x_\mu + \delta x_\mu(\xi, \zeta). \tag{6}$$

Используя (6) и (5), получим (I): $\hat{x}_\mu = x_\mu + \delta x_\mu(x, \zeta)$. Рассмотрим частный случай

$$\hat{x}_\mu = x_\mu + \delta_\mu \cdot \zeta, \tag{7}$$

где δ_μ – совершенно произвольные величины (они могут быть векторами, матрицами, комплексными числами и т.д.), ζ – амплитуда флуктуаций с распределением $W(\zeta/L)$, L – параметр размерности длины. Под параметром ζ можно подразумевать несколько случайных величин $\zeta^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots N$, или даже бесконечную их последовательность $/N \to \infty/$, или функцию $\{\zeta\}$.

Пространство S функций $f(x)$ при преобразованиях трансляции (I) и (7) отображается на пространство D_ζ функций $f(\hat{x})$ по формуле

$$f(\hat{x}) = exp\left(\delta_\mu \zeta \cdot \frac{\partial}{\partial x_\mu}\right) f(x). \tag{8}$$

Функция $\langle f(\hat{x}) \rangle$, усредненная по области случайных параметров ζ, вообще говоря, является функционалом. В частности, если $f(x)$ – бесконечно дифференцируемая функция, то в некотором случае можно построить нелокальный функционал. Например, если $\vec{\delta} \cdot const = 1$, $\delta^0 = i$, то в случае гауссова распределения

$$W(\zeta^{(i)}/L) = exp\{-\zeta^{(i)2}/L^2\}/\sqrt{\pi}\, L \qquad (i = 0, 1, 2, 3)$$

получим

$$\langle f(\hat{x}) \rangle = \int d^4x'\, K(x - x') f(x') = K(L^2\Box) f(x),$$

где $\mathcal{K}(x-x')=\mathcal{K}(l^2\Box)\delta^{4}(x-x')$ – есть нелокальная обобщенная функция. Здесь

$$\mathcal{K}(l^2\Box)=\exp\left(\frac{l^2}{4}\Box\right).$$

Таким образом, пространство $\langle\mathcal{D}_\xi\rangle$ является функционалом широкого класса, свойство которого в большой степени будет зависеть от типа пространства S основных функций $f(x)$ и распределения $W(\xi)$.

Однако в практических приложениях достаточно удержать несколько членов в разложении (8), поэтому нам часто придется иметь дело со следующей величиной:

$$f(\hat{x})=\Delta_\xi f(x), \tag{9}$$

где Δ_ξ – некоторый дифференциальный оператор конечного порядка. Это происходит оттого, что либо функция $f(\hat{x})$, описывающая некоторый стохастический процесс, полностью определяется несколькими моментами случайных переменных ξ, либо параметр типа L, входящий в среднее значение величины $f(\hat{x})$, будет бесконечно малым. Более того, сама функция $f(x)$ может обладать конечным числом производных.

Перейдем теперь к применению понятия стохастического сдвига в физических приложениях.

2.1. Классический случай

Пусть $y(t)$ – траектория частицы с массой m. Будем предполагать, что понятие стохастичности в классической теории связано с движением частицы. Таким образом, в данном случае системой признаков объекта является движение. Если нет движения, т.е. частица покоится, то понятие стохастичности отсутствует. Сопоставление движения (траектории частицы) точкам пространства геометрического содержит случайный параметр τ. Пусть $y(\hat{t})$ описывает стохастическое движение частицы. Допустим, что стохастическая переменная $\hat{t}$ принимает вид (7), т.е.

$$\hat{t}=t+\tau. \tag{10}$$

Рассмотрим следующее выражение

$$\mathcal{D}^n(y,t)=\left\langle\left[\frac{(y(\hat{t})-y(t))^n}{\tau}\right]\right\rangle_\tau.$$

Мы видим, что для того чтобы в нашей теории имела место дисперсия, необходимо $\mathcal{D}^2\neq 0$. Далее будем предполагать:

$$(i)\quad \mathcal{D}^2(y,t)=v\langle\tau^2\rangle F(t)/m, \tag{11}$$

где v – скорость частицы, $F(t)$ – некоторая случайная функция от t размерности силы, обусловливающая стохастичность движения частицы.

(ii) моменты всех высших порядков, обращающиеся в нуль.

Первое предположение соответствует тому, что, согласно высказанной нами гипотезе, стохастичность в классической механике связана с движением частицы, а второе – так называемому марковскому приближению.

С другой стороны, согласно (9) и (10) мы имеем

$$\mathcal{D}^2(y,t)=\dot{y}^2\langle\tau\rangle+\dot{y}\ddot{y}\langle\tau^2\rangle+O(\langle\tau^3\rangle).$$

Принимая во внимание (11), получим

$$\ddot{y}\langle\tau^2\rangle+\dot{y}\langle\tau\rangle=\langle\tau^2\rangle\frac{F(t)}{m},$$

или

$$m\frac{dv}{dt}=-f\cdot v+F(t),$$

где

$$f=m\langle\tau\rangle/\langle\tau^2\rangle. \tag{12}$$

Итак, если постоянную величину f отождествить с коэффициентом трения, то получим уравнение броуновского движения, исследованию которого посвящены классические работы Эйнштейна, Смолуховского, Уленбека и Орнстейна /7/. По соображению размерности $\langle\tau\rangle=\mathcal{E}(\tau)=T$ и $\langle\tau^2\rangle=\mathcal{D}(\tau)+\mathcal{E}^2(\tau)\sim T^2$ и, следовательно, из (12) вытекает, что $T\sim m/f$. Здесь T – характерное время системы, $\mathcal{E}(\tau)$ и $\mathcal{D}(\tau)$ – математическое ожидание и дисперсия случайной величины τ соответственно. Например, когда

$$W(\tau)=\exp\left\{-\frac{(\tau-T)^2}{2T^2}\right\}\Big/\sqrt{2\pi}\cdot T,$$

имеем $T=m/2f$, т.к. в данном случае $\mathcal{E}(\tau)=T$ и $\langle\tau^2\rangle=2T^2$. Таким образом, зная коэффициент трения среды, мы можем определить характерное время движущейся частицы с массой m для конкрентного вида $W(\tau)$.

Заметим, что непосредственно наблюдаемая величина – среднее квадратичное отклонение частицы в броуновском движении существенно зависит от характерного времени T. Когда $t \gg T$, справедлива известная формула Эйнштейна

$$\overline{S^2} = 2\kappa T_0 \cdot t/f\,, \tag{13}$$

где f – коэффициент трения, T_0 – абсолютная температура и κ – постоянная Больцмана. Обобщение (13) в случае любых времен t было получено Орнстейном и Фуртом независимо друг от друга. Их результат имеет вид

$$\overline{S^2} = \frac{2m\kappa T_0}{f^2}\left(\frac{f}{m}t - 1 + e^{-\frac{f\cdot t}{m}}\right).$$

Когда t становится большим по сравнению с m/f, эта формула переходит в (13).

2.2. Квантовый случай

Перейдем теперь к изучению комплексных значений функции $\psi(\hat{x})$ в стохастическом пространстве (7). Ранее нами [6] было показано, что если $\psi^*(\hat{x},\hat{t})$ и $\psi(\hat{x},\hat{t})$ удовлетворяют условию

$$\int d\vec{x} \langle \psi^*(\hat{\vec{x}},\hat{t})\rangle \langle \psi(\hat{\vec{x}},\hat{t})\rangle = \int d\vec{x}\, \psi^*(\vec{x},t)\,\psi(\vec{x},t),$$

то $\psi^*(\vec{x},t)$ и $\psi(\vec{x},t)$ подчиняются уравнениям Шредингера. Здесь переменные $\hat{x}$ и $\hat{t}$ определялись равенствами:

$$\hat{t} = t + \tau,$$

$$\hat{\vec{x}} = \vec{x} + \vec{b}\cdot a \qquad (b_1 = b_2 = b_3 = \sqrt{-i}),$$

τ и a – стохастические величины, распределения $w(\tau)$ и $w(a)$ которых подчинялись условиям:

$$\int d\tau\, w(\tau) = 1, \quad \int da\, w(a) = 1 \quad \text{и} \quad \int da\cdot a\cdot w(a) = 0.$$

Обобщая этот результат, мы предположим, что сохранение норм в пространствах S и $\langle \mathcal{D}_\xi \rangle$ является фундаментальным для стохастической теории, вследствие чего можно получить основные уравнения квантовой теории, такие как уравнения Дирака и Клейна–Гордона.

Сначала получим уравнение Клейна–Гордона. Пусть пространство типа (7) имеет вид

$$\hat{x}_\mu = x_\mu + c\cdot\xi\cdot\gamma_\mu\,, \tag{14}$$

где $c = \sqrt{2(1-i)}$, γ_μ – матрицы Дирака, а распределение $w(\xi)$ удовлетворяет условию

$$\int d\xi\cdot\xi\cdot w(\xi) = 0.$$

Рассмотрим комплексную функцию $\varphi(\hat{x})$, усредненную в этом пространстве. Разлагая ее по моментам случайных величин ξ, получим

$$\langle \varphi(\hat{x})\rangle = \varphi(x) + (1-i)\langle \xi^2\rangle \gamma_\mu\gamma_\nu \frac{\partial^2}{\partial x_\mu x_\nu}\varphi(x). \tag{15}$$

С учетом свойств γ -матриц выражение (15) приобретает вид

$$\langle \varphi(\hat{x})\rangle = \varphi(x) - (1-i)\langle \xi^2\rangle \Box\varphi(x),$$

а его комплексное сопряжение равно

$$\langle \varphi^*(\hat{x})\rangle = \varphi^*(x) - (1+i)\langle \xi^2\rangle \Box\varphi^*(x).$$

Тогда

$$\int dx \langle \varphi^*(\hat{x})\rangle \langle \varphi(\hat{x})\rangle = \int dx \Big\{\varphi^*(x)\varphi(x) + \langle\xi^2\rangle \frac{\partial}{\partial x_k} j_k(x) -$$

$$- \langle\xi^2\rangle\langle\xi^2\rangle \Big[\Box\varphi^*\Big(\frac{\varphi}{\langle\xi^2\rangle} - \Box\varphi\Big) + \Big(\frac{\varphi^*}{\langle\xi^2\rangle} - \Box\varphi^*\Big)\Box\varphi\Big]\Big\},$$

где

$$j_k(x) = i\Big(\varphi^*\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} - \frac{\partial\varphi^*}{\partial x_k}\varphi\Big).$$

Отсюда легко видеть, что если сохраняются нормы

$$\int dx \langle \varphi^*(\hat{x})\rangle \langle \varphi(\hat{x})\rangle = \int dx\, \varphi^*(x)\varphi(x),$$

то функции φ^* и φ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\varphi^*}{\langle\xi^2\rangle} - \Box\varphi^* = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\varphi}{\langle\xi^2\rangle} - \Box\varphi = 0. \tag{16}$$

Сохранение тока получается при этом автоматически, благодаря уравнениям полей. Если положить

$$\langle\xi^2\rangle = \frac{\hbar^2}{m^2c^2},$$

то из уравнений (16) получаем уравнения Клейна–Гордона.

Рассмотрим теперь другую реализацию пространства (I4)

$$\hat{x}_\mu = x_\mu + a\cdot\zeta\cdot\gamma_\mu , \qquad (I7)$$

где $a=\frac{1-i}{d}$; d – постоянное число, при этом $\int d\zeta\,\zeta\, w(\zeta)\neq 0$. Структура пространства (I7) существенно отличается от структуры пространства (I4). Математическое ожидание и дисперсия координат пространства (I7) обладают операторной структурой. В работах /8/ Блохинцева рассматривались следствия для кинематики и динамики кварков в этих пространствах.

Среднее поле в этом пространстве принимает вид

$$\langle\psi(\hat{x})\rangle = \psi(x) + \frac{(1-i)}{d}\langle\zeta\rangle\cdot\gamma_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} + O(\langle\zeta^2\rangle), \qquad (I8)$$

а поле $\bar\psi(\hat{x})=\psi^+\gamma_0$ равно

$$\langle\bar\psi(\hat{x})\rangle = \bar\psi(x) + \frac{1+i}{d}\langle\zeta\rangle\frac{\partial\bar\psi}{\partial x_\mu}\gamma_\mu + O(\langle\zeta^2\rangle).$$

Предположение о равенстве двух норм дает уравнение Дирака для $\psi(x)$ и $\bar\psi(x)$:

$$i\gamma_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} - m\psi = 0 \quad \text{и} \quad i\frac{\partial\bar\psi}{\partial x_\mu}\gamma_\mu + m\bar\psi = 0.$$

Здесь мы положили $d=1$ и $\langle\zeta\rangle=\frac{\hbar}{mc}$. Ток $j_\mu(x)=\bar\psi\gamma_\mu\psi$ сохраняется.

Рассмотрение следующего члена в разложении (I8) с учетом (I7) дает следующее выражение для нормы

$$\begin{aligned}\int d^4x\,\langle\bar\psi(\hat{x})\rangle\langle\psi(\hat{x})\rangle &= \int d^4x\Big\{\bar\psi(x)\psi(x) + \frac{\langle\zeta\rangle}{d}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\mathcal{J}_\mu(x) + \\ &+ i\langle\zeta\rangle\frac{\partial\bar\psi}{\partial x_\mu}\gamma_\mu\Big[\frac{\psi}{d} - i\frac{\langle\zeta\rangle}{d^2}\gamma_\nu\frac{\partial\psi}{\partial x_\nu} + \frac{\langle\zeta^2\rangle}{d^3}\Box\psi\Big] - \\ &- i\langle\zeta\rangle\Big[\bar\psi/d + i\frac{\langle\zeta\rangle}{d^2}\cdot\frac{\partial\bar\psi}{\partial x_\nu}\gamma_\nu + \frac{\langle\zeta^2\rangle}{d^3}\Box\bar\psi\Big]\gamma_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} - \\ &- \frac{\langle\zeta\rangle\langle\zeta^2\rangle}{d^3}\Big[\Box\bar\psi\gamma_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} + \frac{\partial\bar\psi}{\partial x_\nu}\gamma_\nu\Box\psi\Big]\Big\},\end{aligned} \qquad (I9)$$

где

$$\mathcal{J}_\mu(x) = \bar\psi\gamma_\mu\psi + i\frac{\langle\zeta^2\rangle}{\langle\zeta\rangle d}\Big(\bar\psi\frac{\partial\psi}{\partial x^k} - \frac{\partial\bar\psi}{\partial x^k}\cdot\psi\Big).$$

Отсюда мы видим, что нормы сохраняются, если функции $\bar\psi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют уравнениям вида

$$\bar\psi + i\frac{\langle\zeta\rangle}{d}\frac{\partial\bar\psi}{\partial x_\nu}\gamma_\nu + \frac{\langle\zeta^2\rangle}{d^2}\Box\bar\psi = 0 \quad \text{и} \quad \psi - i\frac{\langle\zeta\rangle}{d}\gamma_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} + \frac{\langle\zeta^2\rangle}{d^2}\Box\psi = 0. \qquad (20)$$

В самом деле, в силу этих уравнений, ток $\mathcal{J}_k(x)$ сохраняется, т.е. равенство

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\mathcal{J}_\mu(x) = 0$$

выполняется тождественно. Таким образом, второй член в выражении (I9) обращается в нуль, а последний член с учетом уравнений (20) приобретает вид

$$-\frac{\langle\zeta\rangle\langle\zeta^2\rangle}{d^3}\int d^4x\,[\Box\bar\psi\cdot\psi - \bar\psi\cdot\Box\psi].$$

Интегрируя это выражение по частям, находим, что оно обращается в нуль, если поле ψ и его производные равны нулю на бесконечности. Полагая $\langle\zeta\rangle=m^{-1}$ и $\langle\zeta^2\rangle=c\,m^{-2}$ (c – постоянное число), получим из (20) уравнения нового типа

$$\begin{aligned} &d^2\psi - i\frac{d}{m}\cdot\gamma_\nu\frac{\partial\psi}{\partial x_\nu} + \frac{c}{m^2}\cdot\Box\psi = 0, \\ &d^2\bar\psi + i\frac{d}{m}\cdot\frac{\partial\bar\psi}{\partial x_\mu}\gamma_\mu + \frac{c}{m^2}\Box\bar\psi = 0. \end{aligned} \qquad (2I)$$

Отметим, что уравнения (2I) фактически являются совершенно новыми уравнениями, т.к. удовлетворяющие им функции описывают четыре состояния с определенной энергией. Постоянная c определяется таким образом, чтобы среди этих состояний не присутствовали тахионные состояния. Определим теперь нужную область изменения величины C . Для этого вычислим корни уравнения четвертого порядка, определяющего энергии состояний. Возведя квадрат оператора

$$\mathcal{D} = d^2 - i\frac{d}{m}\gamma_\nu\frac{\partial}{\partial x_\nu} + \frac{c}{m^2}\Box$$

в импульсном представлении и приравнивая его к нулю, получим

$$\Big(d^2 - \frac{d}{m}\hat{p} + \frac{c}{m^2}p^2\Big)\Big(d^2 + \frac{c}{m^2}p^2 + \frac{d}{m}\hat{p}\Big) = 0$$

и

$$u^2 - 2u\Big(\vec{p}^2 + \frac{m^2d^2}{2c^2} - \frac{m^2d^2}{c}\Big) + \frac{m^2d^2}{c^2}(m^2d^2 - 2c\vec{p}^2 + \vec{p}^2) + \vec{p}^4, \quad u = p_0^2.$$

Корни этого уравнения равны

$$(P_0)_1=\sqrt{\vec{p}^2+\frac{m^2d^2}{2c^2}\left[1-2c+\sqrt{1-4c}\right]}=\omega_1,$$

$$(P_0)_2=-\omega_1,$$

$$(P_0)_3=\sqrt{\vec{p}^2+\frac{m^2d^2}{2c^2}\left[1-2c-\sqrt{1-4c}\right]}=\omega_2,$$

$$(P_0)_4=-\omega_2.$$

Легко видеть, что при значениях $c\ (0<c\leq 1/4)$ корни ω_1 и ω_2 будут действительными и положительными. Здесь d - произвольное положительное число, для простоты его можно положить равным I.

Таким образом, функции ψ и $\bar{\psi}$, входящие в уравнения (2I), вообще говоря, будут восьмикомпонентными, и представление матриц γ может быть выбрано следующими способами:

$$\gamma_0=\begin{pmatrix}\gamma_0' & 0\\ 0 & \gamma_0'\end{pmatrix},\quad \vec{\gamma}=\begin{pmatrix}0 & \vec{\gamma}'\\ \vec{\gamma}' & 0\end{pmatrix}\quad \text{и}\quad \gamma_5=\begin{pmatrix}0 & \gamma_5'\\ \gamma_5' & 0\end{pmatrix}.$$

где γ' - четырехрядные γ-матрицы Дирака.

3. Стохастические группы и их представления

Определение I

Пусть задано множество случайных различных элементов $\{\xi_i\}\in Z$ с распределением $W(\xi_i)$. Вообще говоря, эти элементы независимы друг от друга. Тогда стохастической группой будем называть множество различных элементов $\xi_i\ (i=1,2,..)$, которые удовлетворяют групповым постулатам, приведенным ниже.

I. Произведение (под произведением мы будем подразумевать некоторое правило композиции R, с помощью которого из любых двух элементов ζ и ξ образуется единственный элемент $\zeta R\xi$, который называется произведением стохастических элементов ζ и ξ и обычно обозначается через $\zeta\cdot\xi$) любых двух элементов или квадрат какого-либо элемента множества принадлежит к тому же множеству Z.

2. Для всех элементов множества Z выполняется сочетательный закон $\xi(\zeta\eta)=(\xi\zeta)\eta$.

3. В множестве Z существует элемент e, такой, что $\zeta e=e\zeta=\zeta$ для любого из элементов множества Z. Элемент e называется единичным.

4. Для каждого элемента ζ существует обратный элемент, принадлежащий к тому же множеству Z. Этот элемент обозначается символом ζ^{-1}.

Замечание.

Предполагается, что множество Z содержит в себе элементы 0 и I.

Определение 2

Назовем представлением группы Z непрерывную функцию $T(\zeta)$ на этой группе, принимающую значения в группе невырожденных непрерывных линейных преобразований линейного пространства Ξ и удовлетворяющую функциональному уравнению

$$T(\zeta_1\ \zeta_2)=T(\zeta_1)\ T(\zeta_2).$$

Из этого уравнения легко следует, что $T(\zeta^{-1})=T^{-1}(\zeta)$ и $T(e)=E$, где e - единичный элемент группы Z, а E - тождественный оператор в Ξ.

Определение 3

В стохатической теории преобразованием множества m называют взаимно однозначное отображение этого множества на множество m_ζ', содержащее случайные параметры ζ. Образ элемента x из m при отображении ζ будем обозначать через ζx. Пусть Z - некоторая группа. Говорят, что Z является группой преобразований множества m, если каждому элементу ζ этой группы поставлено в соответствие преобразование $x\to\zeta x$ в m_ζ', причем выполнены следующие условия:

I) Единичному элементу e из Z поставлено в соответствие тождественное преобразование множества m: $ex\equiv x$.

2) Для любых двух элементов ζ_1 и ζ_2 из Z выполнено равенство

$$(\zeta_1\zeta_2)x=\zeta_1(\zeta_2 x).$$

Таким образом, основные понятия и свойства обычных групп и их представлений сохраняются в случае стохастических групп.

Важно отметить, что существенные различия возникают в определениях физической величины $f(x)$, которая преобразуется на группе в виде

$$f(x) \Rightarrow f(x,\xi) = T(\xi)\, f(x)$$

и определяется средним значением, равным

$$\langle f(x,\xi)\rangle = \int d\xi\, w(\xi)\, T(\xi)\, f(x). \tag{22}$$

Здесь Z – группа преобразований множества $\mathcal{M}$, $f(x)\in Z$ и $x\in\mathcal{M}$. Во всех приложениях встречаются величины типа (22), представляющие определенный физический интерес.

Пример I

Обозначим через R_ξ группу, элементами которой являются стохастические вещественные числа, а групповой операцией – сложение чисел. Найдем неприводимые унитарные представления этой группы. Интересующие нас представления легко могут быть получены, если известны представления группы вещественных обычных чисел x_i. Для этого рассмотрим числа $\hat{x}_i$ вида $\hat{x}_i = x_i + \xi_i$, а для группы чисел x_i неприводимые унитарные представления имеют вид $exp(\alpha x)$, где α – чисто мнимое число. Нам надо найти непрерывные функции стохастического переменного, удовлетворяющие функциональному уравнению

$$f(\xi_1)\cdot f(\xi_2) = f(\xi_1+\xi_2) \tag{23}$$

и условию

$$|f(\xi)| = 1.$$

Рассмотрим выражение

$$f(\hat{x}_1)\, f(\hat{x}_2) = e^{\xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1}} f(x_1)\cdot e^{\xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2}} f(x_2) =$$

$$= exp\left[\xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right]\left[f(x_1)\cdot f(x_2)\right]. \tag{24}$$

Здесь мы полагали, что числа ξ_i и ξ_j коммутируют между собой, т.е. $[\xi_i,\xi_j]=0$. В противном случае равенство (24) несправедливо. Легко видеть, что если $f(x)$ удовлетворяет уравнению (23), то

$$f(\hat{x}_1)\, f(\hat{x}_2) = exp\left[\xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right] f(x_1+x_2) = f(x_1+\xi_1+x_2+\xi_2). \tag{25}$$

Если мы ограничиваемся непрерывными представлениями, то в выражении (25) можно положить равным нулю $x_1 = x_2 = 0$, в результате чего получим функциональное уравнение (23).

Итак, все одномерные непрерывные представления группы R_ξ имеют вид $f(\xi) = exp(b\xi)$, где b – некоторое, вообще говоря, комплексное число.

Приложение

Пусть $\psi(x)$ – волновая функция, описывающая заряженные частицы. Предполагается, что заряды частиц обладают стохастическим свойством: $e_0 \Rightarrow e(\xi) = e_0 + \xi$, сложение чисел $e_i(\xi)$ является групповой операцией. Постулируется, что волновая функция преобразуется с помощью неприводимого представления этой группы

$$\psi(x) = \psi(x,e_0) \Rightarrow \psi(x,e(\xi)) = e^{a\xi}\,\psi(x,e_0).$$

Нас интересует величина типа (22), имеющая смысл волновой функции частицы, т.е.

$$\langle \psi(x,e(\xi))\rangle = \int d\xi\, e^{a\xi}\, w(\xi)\, \psi(x,e_0).$$

Рассмотрим теперь, к чему приведет наш постулат для конкретных форм распределения $w(\xi)$. Например, пусть

$$w(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi b}}\, exp\left(-\frac{\xi^2}{2b}\right) & \text{– нормальное распределение,} \\ e^{-b}\frac{b^r}{r!} = P_r & \text{– распределение Пуассона,} \end{cases}$$

где b – постоянный параметр, зависящий от $\mathcal{E}(\xi)$ и $\mathcal{D}(\xi)$ случайной величины ξ.

Тогда

$$\langle \psi(x,e(\xi))\rangle = \psi(x) \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{a\xi} e^{-\frac{\xi^2}{2b}}\, d\xi = e^{\frac{a^2 b}{2}} \\ \sum_{r=0}^{\infty} e^{ar} P_r = e^{b(e^a - 1)}. \end{cases}$$

Полагая в первом случае $a = a_0 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$, а во втором $a = \ln a_0$, мы находим

$$\psi(x) = \langle\psi(x, e(\zeta))\rangle = \psi(x)\, e^{ib}. \tag{26}$$

Таким образом, в рамках нашего постулата о стохастическом свойстве электрического заряда можно объяснить появление фазового множителя у волновой функции частицы, тем самым можно дать физическую интерпретацию фазовых преобразований полевых функций.

Пример 2

Перейдем теперь к рассмотрению неприводимых унитарных представлений группы $SO(2,\zeta)$ стохастических вращений евклидовой плоскости вокруг начала координат. Как и в предыдущем случае, представления группы $SO(2,\zeta)$ легко могут быть получены из представлений группы $SO(2)$. Пусть вращение плоскости задается вещественным числом $\hat\varphi = \varphi + \zeta$ – углом поворота, причем матрица соответствующего линейного преобразования имеет вид

$$S(\varphi,\zeta) = e^{\zeta\frac{\partial}{\partial\varphi}} S(\varphi) = e^{\zeta\frac{\partial}{\partial\varphi}} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Если стохастические переменные ζ и ξ коммутируют между собой, и

$$S(\varphi)S(\psi) = S(\varphi+\psi),$$

то

$$S(\hat\varphi)S(\hat\psi) = S(\hat\varphi+\hat\psi).$$

В частности, когда $\varphi = \psi = 0$, получим

$$S(\zeta)\,S(\xi) = S(\zeta+\xi). \tag{27}$$

Любое конечномерное неприводимое представление группы унитарно, одномерно и имеет вид

$$f(\zeta) = exp\,(in\zeta),$$

где n – целое число.

В связи с изучением вращательного броуновского движения /9/ в последние годы придают большое значение разработке и применению аппарата теории представлений группы вращений, в том числе стохастических, в проблемах вращательной диффузии и случайных вращатель-

ных блужданий. Случайная ориентация частицы (молекулы), характеризуемая поворотом подвижной системы (x, y, z) относительно лабораторной системы (X, Y, Z), может быть задана:

I) эйлеровыми углами ζ, ξ, η,

2) матрицей поворота $g(\zeta,\xi,\eta)$,

$$g(\zeta,\xi,\eta) = \begin{pmatrix} \cos\zeta\cos\eta - \sin\zeta\cdot\sin\eta\cos\xi & -\sin\zeta\cos\xi\cos\eta - \cos\zeta\sin\eta & \sin\zeta\sin\xi \\ \sin\zeta\cos\eta + \cos\zeta\cdot\cos\xi\sin\eta & \cos\zeta\cos\xi\cos\eta - \sin\zeta\sin\eta\cdot\cos\zeta\sin\xi & \\ \sin\xi\sin\eta & \sin\xi\cos\eta & \cos\xi \end{pmatrix}$$

3) вектором поворота $\vec\Omega$ (модуль его $/\vec\Omega/$ равен углу поворота, а направление $\vec\Omega$ совпадает с направлением оси поворота).

Полученные нами /6/ ранее результаты легко могут быть перенесены в случае вращательного движения частицы. Вместо траектории частицы $\vec x(t)$ рассматривается вектор поворота $\vec\Omega(t)$, когда $t \to \hat t = t + \tau$, величина которого принимает вид

$$\vec\Omega(\hat t) = \vec\Omega(t) + \frac{d\vec\Omega}{dt}\cdot\tau + \frac{1}{2}\frac{d^2\vec\Omega}{dt^2}\tau^2 + \dots$$

По определению, угловая скорость вращения равна

$$\vec\omega_{tot} \overset{def}{=} \left\langle \left(\frac{\vec\Omega(\hat t) - \vec\Omega(t)}{\tau} \right) \right\rangle = \left\langle \frac{\delta\vec\Omega(t,\tau)}{\tau} \right\rangle = \vec\omega_0 + \vec\omega_s,$$

где $\vec\omega_0 = \frac{d\vec\Omega(t)}{dt}$ – обычная и $\vec\omega_s$ – стохастическая угловая скорость частицы соответственно. Тогда оператор $\mathcal{D}$, определенный в работе /6/, приобретает вид

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_c + \mathcal{D}_s + \frac{1}{2}\langle\tau\rangle\mathcal{D}_t,$$

где

$$\mathcal{D}_c = \frac{\partial}{\partial t} + \vec\omega_0\frac{\partial}{\partial\vec\Omega}, \quad \mathcal{D}_s = \vec\omega_s\frac{\partial}{\partial\vec\Omega} + d\,\frac{\partial^2}{\partial\vec\Omega^2},$$

$$\mathcal{D}_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \vec\omega_0\frac{\partial^2}{\partial\vec\Omega\partial t}, \quad d = \frac{1}{2}\left\langle \frac{\delta^2\vec\Omega(t,\tau)}{\tau} \right\rangle.$$

В данном случае уравнение типа Фоккера–Планка имеет вид

$$\frac{\partial\rho(\vec\Omega,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial\vec\Omega}\left(\vec\omega_{tot}\,\rho(\vec\Omega,t)\right) - d\,\frac{\partial^2}{\partial\vec\Omega^2}\rho(\vec\Omega,t) = 0, \tag{28}$$

где $\rho(\vec{\Omega},t)$ - плотность вероятностей, которая означает вероятность того, что ориентация частицы (молекулы) в момент времени t принадлежит инвариантному элементу объема/10/ $dV = \Gamma^{-1} d^3\Omega$, где

$$\Gamma^{-1} = 4 \cdot \sin^2\left(\frac{\Omega}{2}\right) / \Omega^2 .$$

Рассмотрим теперь вращательное броуновское движение частицы без внешнего поля. В этом случае не существует выделенного направления вращения в пространстве, а результирующая (полная) угловая скорость частицы равняется нулю, т.е. $\vec{\omega}_0 = -\vec{\omega}_s$.

Тогда уравнение (28) дает искомое уравнение вращательной диффузии

$$\frac{\partial \rho(\vec{\Omega},t)}{\partial t} = d \cdot \Delta \rho(\vec{\Omega},t),$$

если величину d положить равной коэффициенту диффузии. С помощью коэффициентов Ламэ для криволинейных координат легко можно получить конкретное выражение оператора Δ в различных случаях. Например, для сферических координат φ и Θ он равен

$$\Delta = \mathrm{div}\,\mathrm{grad} = \frac{\partial^2}{\partial\Theta^2} + \mathrm{ctg}\,\Theta \cdot \frac{\partial}{\partial\Theta} + \frac{1}{\sin^2\Theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2},$$

а для частицы с тремя вращательными степенями свободы (углы Эйлера Θ, ψ, φ) оператор Δ приобретает вид/11/:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\Theta^2} + \mathrm{ctg}\,\Theta\frac{\partial}{\partial\Theta} + \frac{1}{\sin^2\Theta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\psi^2} - 2\cos\Theta\frac{\partial^2}{\partial\psi\partial\varphi} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right).$$

Литература:

1. Блохинцев Д.И. ТМФ, 1973, 17, с.153.
2. Динейхан М., Намсрай Х. ТМФ, 1977, 33, с.32. Сообщение ОИЯИ, Р2-10963, Дубна,1977.
3. Динейхан М., Намсрай Х. Сообщение ОИЯИ, Р2-11474, Дубна, 1978.
4. Ефимов Г.В. Нелокальные взаимодействия квантованных полей. "Наука", М., 1977.
5. Блохинцев Д.И. ЭЧАЯ, 1974, 5, с.606.
6. Намсрай Х. Сообщение ОИЯИ, Р2-11144, Дубна, 1977.
7. Einstein A. Ann. d. Physik 17, p. 549, 1905; Investigations on the Theory of the Browian Motion, R. Furth Ed., Dover, New York 1976.

Smoluchowski M.V. Abhandlung Uber die Brownsche Bewegung und Verwandte Erscheinungen, Akademische Verlaggesellschaft, Leipzig 1923.
Uhlenbeck G.E. and Ornstein L.S. Phys.Rev.,36, p.823, 1930.

8. Блохинцев Д.И. ТМФ, 1977, 30, с.299; Препринт ОИЯИ, Е2-11297, Дубна, 1977.
9. Валиев К.А., Иванов Е.Н. УФН, 109, вып. 1, с.31, 1973.
10. Хамермеш М. Теория групп и ее применение к физическим проблемам, "Мир", М., 1965, глав. 9, §2.
11. Валиев К.А., Эскин Л.Д. Опт. и спектр., 1962, 12, с.758.

Рукопись поступила в издательский отдел
7 июня 1978 года.