ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

P2 - 11638

Б.Н.Валуев

О РЕАЛИЗАЦИИ ИНТЕГРАЛА ПО АНТИКОММУТИРУЮЩИМ ПЕРЕМЕННЫМ

1978

P2 - 11638

Б.Н.Валуев

О РЕАЛИЗАЦИИ ИНТЕГРАЛА ПО АНТИКОММУТИРУЮЩИМ ПЕРЕМЕННЫМ

Направлено в ТМФ

Валуев Б.Н. P2 - 11638

О реализации интеграла по антикоммутирующим переменным

Показано, что определенный Березиным интеграл по антикоммутирующим переменным можно реализовать в виде следа на алгебре Клиффорда. Фактически, эта реализация позволяет уточнить определение интеграла.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Valuev B.N. P2 - 11638

On Realization of Integral over Anticommuting Variables

It is shown that integral over anticommuting variables defined by Berezin may be realized as a trace on Clifford algebra. In fact this realization makes precise the definition of the integral.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

В работах последнего времени, в особенности посвященных суперсимметриям, нередко используется понятие интеграла по антикоммутирующим переменным, определение которого было дано Березиным /1-3/, см. также /4/. Аксиоматический характер определения требует указать какую-либо конкретную реализацию этой операции. В обзоре Огиевецкого и Мезинческу /5/ и книге Боголюбова и Ширкова /6/ отмечалось, что операция интегрирования по антикоммутирующим переменным эквивалентна операции дифференцирования, но это замечание делает неясной необходимость отдельного определения операции интегрирования.

В настоящей заметке обращается внимание на естественную возможность реализации интеграла как следа элементов, принадлежащих алгебре фермионных операторов /алгебре Клиффорда/. Такая реализация, отмеченная в лекции /7/, позволяет уяснить смысл формально определенной операции именно как операции суммирования. Чтобы реализация стала возможной, необходимо изменить определение интеграла, но это изменение, как будет показано, не меняет его свойств, полученных Березиным /1-3/.

В простейшем случае /см. /1// интеграл по антикоммутирующим переменным определяется на элементах $F(x)$ алгебры Грассмана с n образующими x^i:

$$\{x^i x^j\} = 0, \quad (x^i)^2 = 0, \quad i,j = 1,2 \dots n,$$

$$F(x) = a_0 + a_\alpha x^\alpha + a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta + \dots + a_{12\dots n} x^1 x^2 \dots x^n, \qquad /1/$$

$$\alpha < \beta < \dots .$$

Здесь и далее по греческим индексам подразумевается суммирование. Фигурные скобки обозначают антикоммутатор, коэффициенты a-произвольные комплексные числа. Интеграл обозначается символом

$$\int F(dx)\,, \quad (dx) = dx_n dx_{n-1} \dots dx_1 \qquad /2/$$

и на одночленах определяется как повторный, причем однократные интегралы по определению таковы:

$$\int dx_k = 0\,, \quad \int x^k dx_k = 1\,. \qquad /3/$$

Символы dx_k подчиняются соотношениям

$$\{dx_i dx_k\} = 0\,, \qquad /4/$$

$$\{x^i dx_k\} = 0\,. \qquad /5/$$

Условие линейности определяет интеграл для любых $F(x)$:

$$\int F(dx) = a_{12\dots n}\,. \qquad /6/$$

Отметим прежде всего, что сформулированные условия не позволяют дать разумную реализацию интеграла. Действительно, рассмотрим второй из интегралов /3/ и предположим, что x^k и dx_k представлены матрицами, удовлетворяющими соотношениям /4/ и /5/, т.е. матрицами, реализующими алгебру Грассмана с удвоенным числом образующих. Пусть существует такое отображение, которое матрице $x^k dx_k$ ставит в соответствие +1. Тогда, не нарушая соотношений /4/ и /5/, в качестве матрицы x^k можно взять матрицу dx_k и наоборот. В этом случае то же самое отображение даст -1. Это означает, что не существует отображения со свойством /3/, не зависящего от выбора представления для элементов алгебры. Поэтому хотя бы одно из требований /3/-/5/ должно быть изменено. Следует заметить, что при соответствующем истолковании повторного интегрирования можно опустить требование /5/, ибо символы дифференциалов всегда стоят справа, и, после замены

$x^n dx_n$ на единицу, можно аналогично проинтегрировать по остальным переменным, не используя /5/.

Заменим теперь условие /5/ условием

$$\{x^i dx_k\} = \delta^i_k\,, \quad dx = x^*\,, \qquad /5'/$$

где δ^i_k - обычный символ Кронекера. Таким образом, мы переходим от алгебры Грассмана к алгебре Клиффорда, в соответствии с чем изменяем обозначения для "дифференциалов". Покажем, что интеграл /2/ с условием /5'/ вместо /5/ можно реализовать в виде следа

$$\int F(dx) = 2^n \overline{Sp}[F(x)\, x^*_n x^*_{n-1} \dots x^*_1]\,. \qquad /7/$$

Здесь вместо абстрактных элементов подразумеваются представляющие их матрицы. Символ $\overline{Sp}$ обозначает след, деленный на порядок матриц представления. Реализация /7/ обладает всеми свойствами интеграла, указанными Березиным [1-3].

Действительно, из /7/ просто следует /6/, так как

$$\overline{Sp}(x^1 x^2 \dots x^{n-1} x^n x^*_n x^*_{n-1} \dots x^*_1) =$$

$$= \overline{Sp}(x^1 x^2 \dots x^{n-1} x^*_n x^n x^*_{n-1} \dots x^*_1) =$$

$$= \frac{1}{2}\overline{Sp}(x^1 x^2 \dots x^{n-1} x^*_{n-1} \dots x^*_1) = 2^{-n},$$

а следы остальных одночленов равны нулю.

Пусть $f(x)$ и $h(x)$ - соответственно нечетный и четный элементы алгебры Грассмана. Свойства производных /см. [1,2] / полностью воспроизводятся, если положить

$$\frac{\partial}{\partial x^k} f(x) = \{x^*_k f\}\,, \quad \frac{\partial}{\partial x^k} h(x) = \{x^*_k h\}_-\,.$$

Фигурные скобки с минусом обозначают коммутатор.

Отсюда для произвольных $F(x)$ и $G(x)$ получаем правило интегрирования по частям /1/:

$$\int F(\frac{\partial}{\partial x^k} G)(dx) = 2^n \overline{Sp}(F x^*_k G x^*_n x^*_{n-1} \ldots x^*_1) =$$

$$= \int (F \frac{\partial}{\partial x^k}) G(dx) . \qquad /8/$$

Рассмотрим далее преобразование интеграла /7/ при линейной замене образующих $y^k = L^k_\alpha x^\alpha$, $\det||L||\neq 0$. Потребуем, чтобы y^k и $y^*_\ell = M^\alpha_\ell x^*_\alpha$ также удовлетворяли соотношениям вида /5/. Тогда $||M|| = ||L||^{-1}$. Автоморфизм алгебры Клиффорда $x^k, x^*_\ell \to y^k, y^*_\ell$ определяет такую матрицу S, что $S x^k S^{-1} = y^k$, $S x^*_\ell S^{-1} = y^*_\ell$, причем в общем случае матрица S не унитарна. Теперь правило замены переменных элементарно следует из /7/:

$$\int F(x)(dx) = \int F(y)(dy) = \int F(y(x)) \det||M||(dx) =$$

$$= \int F(y(x)) \det||L||^{-1} (dx) . \qquad /9/$$

Наконец, обсудим преобразование интеграла при нелинейной замене $x^k \to y^k$:

$$y^k = f^k(x) = a^k_\alpha x^\alpha + f^k_3(x) + f^k_5(x) + \ldots , \qquad /1O/$$

где a^k_α - числа, f^k_m - нечетные элементы степени m. Чтобы такая замена порождала автоморфизм алгебры, необходимо и достаточно* выполнить условие $\det||a^k_\alpha||\neq 0$. В этом случае можно построить матрицу

$$S = \exp(g^\alpha x^*_\alpha), \qquad /11/$$

которая порождает преобразование /1O/, $S x^k S^{-1} = y^k$, здесь $g^\alpha(x)$ - нечетные элементы. Действительно, нетрудно найти такую матрицу S_1 вида /11/ с линейными функциями g^α, что $S_1 x^k S_1^{-1} = a^k_\alpha x^\alpha$. Тогда

$$S_1^{-1} y^k S_1 = x^k + \overset{(1)}{f}{}^k_3 + \overset{(1)}{f}{}^k_5 + \ldots .$$

Индекс (1) сверху указывает на то, что соответствующие члены получились в результате преобразования, порожденного S_1. Положим теперь $S_3 = \exp(\overset{(1)}{f}{}^\alpha_3 x^*_\alpha)$. Легко проверить, что

$$S_3^{-1} S_1^{-1} y^k S_1 S_3 = x^k + \overset{(3)}{f}{}^k_5 + \overset{(3)}{f}{}^k_7 + \ldots .$$

Продолжая эту процедуру, получим, что $S x^k S^{-1} = y^k$, $S = S_1 S_3 \ldots$, причем каждый из сомножителей имеет вид /11/. Отсюда с помощью формулы Кемпбелла-Хаусдорфа получаем, что S представляется в таком же виде. Преобразование /1O/ естественно включается в однопараметрическую группу преобразований, порождаемую элементом $S(t) = \exp(t g^\alpha x^*_\alpha)$, t - параметр. При этом

$$\frac{dy^k}{dt} = g^k(y(t)) . \qquad /12/$$

Теперь, следуя Березину /2/, введем выражение*

$$J(t) = \overline{Sp}[F(y(t)) \Delta^{-1} (\frac{y(t)}{x}) x^*_n x^*_{n-1} \ldots x^*_1],$$

$$\Delta(\frac{y}{x}) = \det||\frac{\partial f^k}{\partial x^\ell}|| .$$

Далее можно буквально повторить выкладки работы /2/ и показать, используя /12/, что производные $J(t)$ по t

---

*Необходимость следует из того, что $0 \neq f^1 f^2 \ldots f^n = \det||a|| x^1 \ldots x^n$. Достаточность вытекает из последующего построения.

*Здесь определитель Δ понимается как обычная знакопеременная сумма, т.е. является элементом алгебры.

при $t=0$ равны нулю, т.е. $J(t) = J(0)$, что и дает формулу замены переменных, обобщающую /9/:

$$\int F(x)\,(dx) = \int F(y(x))\,\Delta^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)(dx)\,. \qquad /13/$$

Отметим одно следствие из этой формулы. Пусть y^k определены равенством /10/ и $\frac{\partial y^k}{\partial x^r} = f^k_r$. Будем искать y^*_k в виде $\phi^a_k x^*_a$, где $\phi^a_k(x)$ - четные элементы. Тогда из сохранения перестановочных соотношений /5'/ следует, что $\phi^a_k f^l_a = \delta^l_k$, и можно показать, что найденные таким образом y^*_k удовлетворяют соотношениям вида /4/. Следовательно:

$$\int F(x)\,(dx) = \int F(y)(dy) = 2^n\,\overline{Sp}[F(y(x))\,\phi^a_n x^*_a \dots \phi^\sigma_1 x^*_\sigma].$$

Равенство /13/ означает, что все x^* под знаком следа можно переставить направо.

Таким образом, реализация /7/ позволяет уточнить определение интеграла и дает возможность получить его свойства. Как уже упоминалось /5,6/, интегрирование эквивалентно n-кратному дифференцированию. Это свойство и правило интегрирования по частям связаны с тем, что рассматривался лишь интеграл максимальной кратности. Определение /7/ естественно распространить на случай меньшей кратности, положив

$$\int F dx_n \dots dx_{k+1} = 2^{n-k}\,\overline{Sp}[F(x)\,x^*_n \dots x^*_{k+1}]\,.$$

Этот интеграл при $k>0$ уже не будет обладать свойством /8/, и, конечно, не совпадет с результатом дифференцирования. Видно, что он равен вакуумному среднему выражения в квадратных скобках. Отметим также, что представление интеграла в форме следа делает понятным его появление при решении модели Изинга /3,4/.

Автор благодарен за обсуждения В.И.Огиевецкому и М.И.Широкову, Б.М.Зупнику и И.Т.Тодорову.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Березин Ф.А. Метод вторичного квантования. "Наука", М., 1965.*
2. *Березин Ф.А. Математические заметки. 1967, 1, с. 269.*
3. *Березин Ф.А. УМН, 1969, 24, с. 3.*
4. *Попов В.Н. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. Атомиздат, М., 1976.*
5. *Огиевецкий В.И., Мезинческу Л. УФН, 1975, 117, с. 637.*
6. *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. "Наука", М., 1976.*
7. *Валуев Б.Н. Применение алгебры Клиффорда к решению задачи Изинга-Онсагера. ОИЯИ, Р17-11020, Дубна, 1977.*

Рукопись поступила в издательский отдел 6 июня 1978 года.