

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



С34282
Б-817

P2 - 11634

А.Г.Бонч-Осмоловский, М.И.Подгорецкий

4465 / 2-78

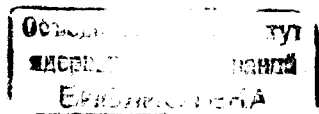
ВОЗМОЖНО ЛИ РАДИАЦИОННОЕ ОХЛАЖДЕНИЕ
КАНАЛИРУЮЩИХ ЧАСТИЦ?

1978

P2 - 11634

А.Г.Бонч-Осмоловский, М.И.Подгорецкий

ВОЗМОЖНО ЛИ РАДИАЦИОННОЕ ОХЛАЖДЕНИЕ
КАНАЛИРУЮЩИХ ЧАСТИЦ?



Возможно ли радиационное охлаждение каналирующих частиц?

Обсуждаются факторы, ограничивающие радиационное затухание поперечных колебаний каналирующих позитронов и электронов. Квантово-механические ограничения связаны с прекращением излучения после перехода частицы в основное состояние. Определяющую роль играют ограничения из-за многократного рассеяния. Их влияние уменьшается с ростом энергии, но даже при очень высоких энергиях ($\gamma \geq 10^4$) они приводят к тому, что поперечные колебания перестают затухать, и их амплитуда с течением времени возрастает.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Is Radiative Cooling of Channelling Particles Possible ?

The factors restricting the radiative damping of transverse vibrations of channelling positrons and electrons are considered. Quantum-mechanical restrictions are connected with radiation stoppage after the particle transition to the ground state. The main part is played by restrictions due to multiple scattering. Their influence decreases with the energy growth, however, even at extremely high energies ($\gamma \geq 10^4$) this results in stopping of transverse vibration damping, and their amplitude increases eventually.

The investigation has been performed at the Laboratory of High Energies, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

§1. В работах¹⁻⁴ рассмотрено радиационное затухание поперечных колебаний каналирующих позитронов и электронов. В основу была положена идеализированная картина, свободная от влияния деканалирующих факторов, причем в работах^{3,4} весь анализ проводился в рамках классических представлений без учета возможных квантовых ограничений. С квантовой точки зрения затухание связано с переходом из более высоких собственных состояний на более низкие, и после перехода в основное состояние дальнейшее затухание прекращается. Имеется, следовательно, некоторая минимальная амплитуда поперечных колебаний*, при приближении к которой классические формулы, приведенные в³, теряют смысл.

Влияние многократного кулоновского рассеяния также приводит к тому, что конечная величина амплитуды поперечных колебаний отлична от нуля. Действительно, каждый акт кулоновского рассеяния сопровождается возбуждением поперечных колебаний; прежде чем они успеют полностью затухнуть, происходит следующий акт рассеяния, затем - третий и т.д. В конце концов может установиться не зависящее от начальных условий стационарное состояние, причем величина равновесной амплитуды определяется соотношением между возбуждением поперечных колебаний и их затуханием**.

* См. также краткое замечание в^{1,2}; в работе¹ имеется опечатка, исправленная в П.ЖТФ, 3, 1100 /1977/.

** Роль кулоновского рассеяния в процессе каналирования неоднократно обсуждалась в литературе /см., напр.⁵/, а также⁶/ и ссылки, приведенные в⁶/. Однако, насколько нам известно, рассеяние рассматривалось вне связи с радиационным затуханием.

Цель настоящей статьи состоит в анализе указанных выше причин, ограничивающих радиационное затухание. В дальнейшем мы будем интересоваться каналированием только при очень больших энергиях $E > 1 \text{ ГэВ}$, когда оно сопровождается достаточно интенсивным электромагнитным излучением.

§2. Начнем с квантовомеханических ограничений. Ниже будет видно, что амплитуда колебаний, отвечающих основному квантовому состоянию, мала по сравнению с поперечными размерами каналов. В этих условиях можно считать, что в случае одномерного каналирования /плоскостное каналирование позитронов, каналирование электронов внутри "слоев", образованных тепловым движением атомов кристалла^{/3,7/} / усредненный поперечный потенциал имеет вид

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2 \quad /1/$$

Для двумерного каналирования /осевое каналирование позитронов, каналирование электронов внутри "трубок"^{/3,8,9/} в сходных условиях потенциал

$$U(x,y) = \frac{1}{2} k(x^2 + y^2), \quad /2/$$

где y - вторая поперечная координата. При таком потенциале движения в направлениях x и y независимы, и их можно рассматривать порознь.

Задача состоит в квантовании классического уравнения движения

$$m\gamma \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0, \quad /3/$$

в котором γ - лоренц-фактор каналирующей частицы. Как известно, для основного состояния осциллятора, описываемого уравнением /3/, имеет место равенство

$$\overline{x^2} = (\hbar^2 / 4k m \gamma)^{1/2}, \quad /4/$$

т.е. минимальная амплитуда характеризуется величиной

$$(\overline{x^2})^{1/2} = (\hbar^2 / 4k m \gamma)^{1/4}, \quad /5/$$

которая с ростом энергии уменьшается $\sim \gamma^{-1/4}$. Минимальный поперечный импульс q определяется для основного состояния соотношением

$$\overline{x^2} \cdot \overline{q^2} = \frac{1}{4} \hbar^2 \quad /6/$$

Минимальный угловой разброс каналирующей частицы

$$\overline{\theta^2} = q^2 / p^2, \quad /7/$$

где p - импульс продольного движения. Из сопоставления /4/, /6/ и /7/ следует

$$\overline{\theta^2} = \left(\frac{k \Delta^2}{4mc^2} \right)^{1/2} \cdot \gamma^{-3/2}, \quad /8/$$

где $\Delta = \frac{\hbar}{mc}$ - комптоновский радиус.

Одним из параметров, характеризующих каналирование, является т.н. критический угол

$$\theta_{кр} = (\gamma \tilde{\gamma})^{-1/2} \quad /9/$$

Здесь

$$\tilde{\gamma} = \frac{mc^2}{k A_{кр}^2}, \quad /10/$$

где $A_{кр}$ - максимально допустимая амплитуда поперечных колебаний, при которой каналирование еще не разрушается. Сопоставление /8/ и /9/ приводит к

$$\frac{\overline{\theta^2}}{\theta_{кр}^2} = \frac{\Delta}{2A_{кр}} \cdot \left(\frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} \right)^{1/2} \quad /11/$$

Соответственно, из /4/ также следует

$$\frac{\overline{x^2}}{A_{кр}^2} = \frac{\Delta}{2A_{кр}} \cdot \left(\frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} \right)^{1/2} \quad /11' /$$

Из /11/ и /11'/ видно, что с ростом энергии каналирующих частиц рассматриваемые квантовые ограничения ослабляются. В интересующей нас области высоких энергий $\gamma \approx \tilde{\gamma}$ или еще больше, и квантовые ограничения мало существенны. Например, при плоскостном каналировании позитронов вдоль плоскостей /110/ кремния

$$\left(\frac{x^2}{A_{кр}^2}\right)^{1/2} \leq 4 \cdot 10^{-2};$$

аналогичная величина при каналировании электронов внутри "трубок" или "слоев" свинца составляет примерно $8 \cdot 10^{-2}$. Полученные оценки оправдывают исходные предположения, сформулированные в начале настоящего параграфа.

§3. Перейдем теперь к анализу роли многократного кулоновского рассеяния, которая, как выяснится в дальнейшем, является определяющей. Для определенности ограничимся плоскостным каналированием положительных частиц /позитронов/. Принятое в теории каналирования представление о движении частицы в усредненном поле, создаваемом непрерывно "размазанными" зарядами, является всего лишь модельным описанием совокупного действия скоррелированных между собой последовательных актов кулоновского рассеяния на отдельных атомах кристалла. Следовательно, кулоновское рассеяние выступает "в двух лицах", оно обуславливает существование самого каналирования и оно же является основным деканализирующим фактором. Поэтому прежде всего следует выяснить, чем определяется соотношение между указанными двумя явлениями.

Здесь надо различать кулоновское рассеяние на атоме, как на едином целом, и рассеяние на отдельных электронах атома. В первом случае в акте рассеяния внутреннее состояние атома не изменяется. Если, к тому же, не изменяется и состояние его колебательного движения вблизи соответствующего узла кристаллической решетки, то совокупность последовательных актов такого рода приводит к каузальному движению, описываемому с помощью усредненного потенциала. Если же колебательное движение атома изменяется, совокупность таких актов описывается статистическим многократным рас-

сеянием, являющимся одной из причин деканализирования. Другим деканализирующим фактором является рассеяние на отдельных электронах атомов, когда в результате рассеяния электроны становятся свободными. Совокупность таких актов также приводит к многократному рассеянию, и в дальнейшем мы будем принимать во внимание только этот процесс, поскольку известно, что именно он является определяющим /по крайней мере для кристаллов, образованных легкими атомами/см., напр. /6,10,11/.

Для того, чтобы произошла ионизация атома /или его возбуждение/, надо передать одному из электронов импульс q , превышающий тот импульс, с которым электрон движется внутри атома; поскольку при каналировании положительных частиц речь идет, в основном, о внешних электронах, можно исходить из требования

$$q \geq \hbar/a, \quad /12/$$

где a - радиус атома. Если каналирующая частица пролетает мимо электрона, имея параметр удара ρ , она передает ему поперечный импульс

$$q = 2e^2/\rho c. \quad /13/$$

Тогда из /12/ следует

$$\rho/a \leq \frac{2e^2}{\hbar c} = 2a \approx 10^{-2}. \quad /14/$$

Положительная частица, каналирующая между кристаллическими рядами или плоскостями, пересекает периферические области атомных оболочек. Может показаться, что это приводит к асимметрии рассеяния, в результате которой частица отклоняется в направлении центральной части канала чаще, чем в противоположном направлении. Однако из /14/ следует, что интересующие нас электроны расположены не в любом месте атома, а только внутри цилиндра очень малого радиуса с осью, совпадающей с траекторией каналирующей частицы. Внутри этого цилиндра электроны расположены симметрично, и поэтому обуславливаемая асимметрия рассеяния на самом деле от-

сутствует. В результате мы приходим к простой картине многократного кулоновского рассеяния без каких-либо выделенных направлений.

Если ультрарелятивистская частица с энергией E пролетает мимо свободного электрона при параметре удара ρ , она рассеивается на угол

$$\eta = \frac{2e^2}{\rho E} \quad /15/$$

Ниже нам понадобится величина $\overline{\eta^2}$, усредненная по случайным значениям ρ . Для нее легко получаем

$$\overline{\eta^2} = \frac{4e^4}{\rho_{\max}^2 \cdot E^2} \cdot \ln(\rho_{\max} / \rho_{\min}), \quad /16/$$

где, в соответствии с /14/, $\rho_{\max} \approx 2aa$. Что касается величины ρ_{\min} , то она связана с "катастрофическими рассеяниями", выводящими частицу из режима каналирования в результате одного единственного акта. Иными словами, ρ_{\min} определяется формулой /15/, в которой $\eta \approx \theta_{\text{кр}}$, т.е.

$$\rho_{\min} \approx \frac{2e^2}{E \theta_{\text{кр}}} = 2 \left(\frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} \right)^{1/2} \cdot r_e, \quad /17/$$

где $r_e = \frac{e^2}{mc^2}$ - электромагнитный радиус электрона.

Теперь можно переписать /16/ в виде

$$\overline{\eta^2} = \frac{4e^4}{\rho_{\max}^2 \cdot E^2} \ln \left\{ \frac{aa}{r_e} \left(\frac{\gamma}{\tilde{\gamma}} \right)^{1/2} \right\}, \quad /16'/$$

§4. Дальнейшая задача состоит в анализе влияния случайных толчков, вызывающих многократное рассеяние каналирующих частиц, на их каузальное движение в усредненном электрическом поле. В работе /3/ было

показано, что поперечное движение каналирующих частиц описывается уравнением

$$\ddot{x} + \epsilon \dot{x} + \frac{k}{m\gamma} x = 0, \quad \epsilon = \frac{2ke^2}{3m^2c^3}. \quad /18/$$

Его решения при любых начальных условиях затухают за время $\tau \approx 1/\epsilon$. Поэтому через время $t \gg \tau$ после начала каналирования влияние начальных условий полностью исчезает, и установившийся режим поперечных колебаний определяется теми актами рассеяния, которые имели место в течение интервала времени $t \approx 1/\epsilon$, предшествующего рассматриваемому моменту.

Число таких актов рассеяния дается формулой

$$N \approx \pi n c \rho_{\max}^2 / \epsilon, \quad /19/$$

где n - плотность электронов в центральной области канала. Это очень большая величина, равная примерно $2 \cdot 10^5$. Поэтому интересующие нас стационарные распределения по θ и x описываются законами Гаусса, и требуется только определить параметры $\overline{\theta_{\text{СТ}}^2}$ и $\overline{x_{\text{СТ}}^2}$.

Ясно, что по порядку величины можно написать

$$\overline{x_{\text{СТ}}^2} \approx L^2 \cdot \overline{\theta_{\text{СТ}}^2}, \quad \overline{\theta_{\text{СТ}}^2} \approx N \overline{\eta^2}, \quad /20/$$

где $\overline{\eta^2}$ дается формулой /16'/, а $L = \left(\frac{\gamma mc^2}{k} \right)^{1/2}$ - простран-

ственный период поперечных колебаний. Подставляя в /20/ величины $\overline{\eta^2}$, N и ϵ , используя /9/ и /10/,

Получим

$$\left(\overline{\theta_{\text{СТ}}^2} / \theta_{\text{кр}}^2 \right) \approx \left(\frac{\overline{x_{\text{СТ}}^2}}{A_{\text{кр}}^2} \right) \approx \frac{6\pi ne^2}{k} \cdot \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} \ln \left\{ \frac{aa}{r_e} \left(\frac{\gamma}{\tilde{\gamma}} \right)^{1/2} \right\}, \quad /21/$$

Поскольку электрическое поле вблизи центральной плоскости канала определяется только плотностью n , величины n и k связаны между собой. Легко показать, что

$$k = 4\pi ne^2. \quad /22/$$

Поэтому /21/ можно также переписать в виде:

$$\left(\frac{\overline{\theta_{CT}^2}}{\theta_{кр}^2}\right) = \left(\frac{\overline{x_{CT}^2}}{A_{кр}^2}\right) = \frac{3}{2} \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} \ln \left\{ \frac{a a}{r_e} \left(\frac{\gamma}{\tilde{\gamma}}\right)^{1/2} \right\} \approx \frac{3}{2} \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} \ln \left(\frac{260 \gamma}{\tilde{\gamma}}\right). \quad /23/$$

При $\gamma \approx \tilde{\gamma}$ формула /23/ дает $\frac{\overline{\theta_{CT}^2}}{\theta_{кр}^2} \approx 8$. Следовательно,

даже при такой большой энергии стационарное состояние не устанавливается, радиационное затухание не может преодолеть раскочки, вызванной многократным рассеянием. Последнее приводит к постепенному возрастанию амплитуды поперечных колебаний и к деканализованию, которое происходит раньше, чем через время $\tau \approx 1/\epsilon$, т.е. на пути, меньшем $\Lambda = c/\epsilon$ /при каналировании вдоль плоскостей /100/ кремния $\Lambda \approx 6$ см, $\tilde{\gamma} \approx 4 \cdot 10^4$ /.

Еще один деканализующий фактор связан с вышеупомянутыми "катастрофическими рассеяниями". Соответствующая средняя длина

$$l = (\pi n \rho_{\min}^2)^{-1}, \quad /24/$$

а отношение

$$l / \Lambda \approx \frac{8}{3} \frac{\gamma}{\tilde{\gamma}}. \quad /25/$$

Таким образом, при $\gamma \approx \tilde{\gamma}$ каждая из рассматриваемых причин приводит к деканализованию на длине порядка Λ . Положение изменяется для значительно более высоких энергий. Например, при $\frac{\gamma}{\tilde{\gamma}} \geq 10$ многократное рассеяние уже не в силах преодолеть радиационного затухания и $(\frac{\overline{\theta_{CT}^2}}{\theta_{кр}^2}) \leq 1$. Это значит, что влияние соответствующего деканализующего фактора резко падает, а при еще больших энергиях - фактически исчезает; деканализование за счет "катастрофических рассеяний" в принципе оста-

ется, но происходит настолько редко, что с ним можно не считаться*.

Подчеркнем, что обсуждаемое установившееся состояние является стационарным только в том смысле, что его свойства никак не зависят от начальных условий. Поскольку параметры $\overline{\theta_{CT}^2}$ и $\overline{x_{CT}^2}$ отличны от нуля, имеют место радиационные потери энергии, лоренц-фактор постепенно уменьшается, а вместе с ним изменяются и сами

величины $\overline{\theta_{CT}^2}$ и $\overline{x_{CT}^2}$. Поэтому при $\frac{\overline{x_{CT}^2}}{A_{кр}^2} \ll 1$ имеет место

следующее любопытное явление: сначала амплитуда поперечных колебаний уменьшается, приближаясь к своему установившемуся значению, а затем, в соответствии с формулой /23/ и с уменьшением величины γ , она начинает увеличиваться, что приводит в конце концов к появлению интенсивного деканализования.

Количественный анализ указанного явления можно провести с помощью соответствующего кинетического уравнения. Для этого перепишем уравнение /18/ в виде системы

$$\dot{x} = c\theta, \quad \dot{\theta} = -(\epsilon\theta + \frac{k}{mc\gamma} \cdot x). \quad /26/$$

Из-за многократного рассеяния θ и x являются случайными величинами, и для описания поведения системы надо ввести функцию распределения $f(\theta, x, t)$. При составлении кинетического уравнения следует учесть, что в результате каждого акта рассеяния непосредственно изменяется только угол θ , причем θ переходит в $\theta + \eta$. В итоге приходим к кинетическому уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c\theta \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{kx}{mc\gamma} \frac{\partial f}{\partial \theta} - \epsilon \frac{\partial(\theta f)}{\partial \theta} = -n_0 f + n_0 \int f(\theta - \eta, x, t) p(\eta) d\eta, \quad /27/$$

* Следует, правда, иметь в виду, что при таких больших энергиях существенную роль может играть деканализование, связанное с мозаичной структурой кристалла.

В котором $n_0 = \pi n \rho_{\max}^2$ - среднее число актов рассеяния за единицу времени, а $p(\eta)$ - закон распределения η .

Исходя из /27/, с помощью стандартных процедур /умножение /27/ на усредняемую величину и интеграция по θ и x / легко получить дифференциальные уравнения для величин $\bar{\theta}$, \bar{x} , $\bar{\theta}^2$, \bar{x}^2 и $(\bar{\theta x})$. Уравнения для $\bar{\theta}$ и \bar{x} выписывать не стоит, поскольку ясно, что интересующие нас асимптотические значения $\bar{\theta}$ и \bar{x} равны нулю. Остальные уравнения имеют вид

$$\frac{d\bar{\theta}^2}{dt} = -\frac{2k}{mc\gamma} (\bar{\theta x}) - 2\epsilon \bar{\theta}^2 + n_0 \bar{\eta}^2$$

$$\frac{d(\bar{\theta x})}{dt} = c \bar{\theta}^2 - \epsilon (\bar{\theta x}) - \frac{k}{mc\gamma} \cdot \bar{x}^2 \quad /28/$$

$$\frac{d\bar{x}^2}{dt} = 2c(\bar{\theta x})$$

При выводе /28/ учтено, что в рассматриваемой задаче $\bar{\eta} = 0$. Строго говоря, величина γ также является случайной, и это можно было бы учесть введением дополнительного члена в /27/. Однако флуктуации γ ничтожно малы по сравнению с $\bar{\gamma}$, и мы будем ими пренебрегать. Тогда, как это показано в работе /3/, можно записать дополнительное уравнение

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{2k^2 e^2 \gamma^2}{3m^3 c^5} \cdot \bar{x}^2 \quad /29/$$

Совокупность уравнений /28/ и /29/ образует полную систему, достаточную для вычисления всех интересующих нас величин. Начальные значения для $\bar{\theta}^2$, \bar{x}^2 и $(\bar{\theta x})$ при $t \gg 1/\epsilon$ роли не играют, их можно выбрать любыми, например, - нулевыми. Полный анализ системы уравнений /28/ и /29/ требует специального рассмотрения. Заметим только, что приведенная выше формула /23/ получается, если в /28/ и /29/ все производные

положить равными нулю. Следует также иметь в виду, что проведенный в настоящей работе анализ справедлив только для параболического потенциала. Учет нелинейности колебаний в потенциальной яме другого типа может понизить границу, при которой наступает эффективное охлаждение пучка каналирующих частиц.

Авторы благодарны В.Г.Барышевскому и И.Д.Феранчуку за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барышевский В.Г., Дубовская И.Я. Письма в ЖТФ, 1977, 3, с. 500.
2. Baryshevsky V.G., Dubovskaya I.Ya. Phys.Lett., 1977, 62A, p.45.
3. Бонч-Осмоловский А.Г., Подгорецкий М.И. ОИЯИ, P2-11250, Дубна, 1978.
4. Батыгин Ю.В. и др. ЖТФ, 1978, 48, с. 642.
5. Линхард Й. УФН, 1969, 99, с. 249.
6. Кумахов М.А. УФН, 1975, 115, с. 427.
7. Подгорецкий М.И. ОИЯИ, P2-11140, Дубна, 1977.
8. Подгорецкий М.И. ОИЯИ, P2-10739, Дубна, 1977.
9. Подгорецкий М.И. ОИЯИ, P2-10986, Дубна, 1977.
10. Белошицкий В.В., Кумахов М.А. ДАН СССР, 1973, 212, с. 846.
11. Каган Ю., Кононец Ю.В. ЖЭТФ, 1973, 64, с. 1042.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 июня 1978 года.