ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 11630

А.Б.Пестов

ТЕОРИЯ МАГНИТНОГО ЗАРЯДА

1978

P2 - 11630

А.Б.Пестов

ТЕОРИЯ МАГНИТНОГО ЗАРЯДА

Направлено в ТМФ

Пестов А.Б. P2 - 11630

Теория магнитного заряда

Если к проблеме магнитного заряда подойти, взяв за основу идейное содержание гипотезы Ампера о молекулярных токах, то оказывается возможным установить, что представляют собой поле ненулевого магнитного заряда и уравнения этого поля. Основные выводы настоящей статьи заключаются в следующем: существует четыре рода магнитно-заряженных частиц, выступающих совместно и равноправно; каждая такая частица наряду с магнитным зарядом несет электрический заряд; в процессах с участием магнитно-заряженных частиц должно наблюдаться несохранение четности.

Обсуждается вопрос о магнитном заряде дейтрона.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Pestov A.B. P2 - 11630

Theory of Magnetic Charge

If the problém of magnetic charge is attempted to analyse within the framework of the Ampere hypothesis, then it can be established what is the field of nonzero magnetic charge and what are equations of this field. The main conclusions are as follows: there exist four independent types of particles with magnetic charge which compose an unique family; each of such particles has also an electric charge; in processes involving particles with magnetic charge the parity violation should be observed. The problem of the deuteron magnetic charge is discussed as well.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

ВВЕДЕНИЕ

В период становления теории электромагнетизма электрические и магнитные источники рассматривались равноправно. Положение дел коренным образом изменилось после того, как Ампер выдвинул гипотезу о молекулярных токах. По Амперу, магнетизм может быть полностью объяснен движением электрических зарядов. В дальнейшем гипотеза Ампера получила надежное экспериментальное и теоретическое обоснование.

После создания квантовой механики представление о магнитных зарядах было возрождено в известной работе Дирака 1931 года [1]. Хотя с тех пор появилось и продолжает появляться немало теоретических и экспериментальных работ, посвященных проблеме магнитного заряда, теория магнитного заряда еще далека от завершения [2]. Полное и систематическое изложение современного состояния проблемы магнитного заряда и связанного с ней круга вопросов дано в монографии [3].

Настоящая работа имеет цель указать на такую теорию магнитного заряда, идейное содержание которой составляет гипотеза Ампера. Подробнее это означает следующее. Постулируем, что магнитный заряд существует и представляет собой некоторую внутреннюю характеристику определенного класса физических объектов. Вопрос о природе магнитного заряда решаем в духе амперовской гипотезы. Магнитный заряд "возникает" в результате некоторого, пусть и весьма специфического, движения электрического заряда. Так как в максвелловской электродинамике нет магнитного заряда, то требуемое движение электрического заряда не может быть классическим. Поэтому следует рассмотреть возможности квантовой теории. В результате приходим к выводу, что наибольший интерес представляет прецессия двух спинов 1/2. Таким образом, модель магнитно-заряженной частицы - это связанная система из двух фермионов, спины которых прецессируют. Исходя из этой модели, можно составить вполне определенное представление о волновой функции магнитно-заряженных частиц. Действительно, применим квантовомеханический закон сложения моментов к системе из двух частиц, состояние которых характеризуется спином 1/2. В итоге получаем, что магнитно-заряженные частицы могут находиться в четырех различных спиновых состояниях. Так как в релятивистской теории число состояний удваивается, то волновая функция нашей частицы должна быть восьмикомпонентной. Чтобы установить трансформационную природу волновой функции, достаточно заметить, что в теории Дирака частице с массой и спином 1/2 соответствует четырехкомпонентный спинор. Таким образом, волновая функция магнитно-заряженной частицы должна преобразовываться так же, как кронекеровское произведение двух дираковских спиноров, и иметь восемь независимых компонент. В работе /4/ показано, что существуют два релятивистски инвариантных уравнения первого порядка для волновой функции, имеющей шестнадцать компонент и преобразующейся так же, как прямое произведение двух дираковских спиноров. Этот и другие полученные в /4/ результаты позволяют дать адекватную математическую формулировку обрисованной теории магнитного заряда, вывести фундаментальное уравнение для волновой функции магнитно-заряженных частиц.

1. МАГНИТНЫЙ ЗАРЯД

Поле F, преобразующееся как прямое произведение двух четырехкомпонентных спиноров и, следовательно, объединяющее в себе скалярное, векторное, бивекторное,

3-векторное и 4-векторное поля, удобно записать в виде

$$F = (f, f_\mu, f_{\mu\nu}, f_{\mu\nu\alpha}, f_{\mu\nu\alpha\beta}).$$

Естественным образом определяется умножение поля F на комплексное число λ и сложение двух полей:

$$\lambda F = (\lambda f, \lambda f_\mu, \lambda f_{\mu\nu}, \lambda f_{\mu\nu\alpha}, \lambda f_{\mu\nu\alpha\beta}),$$

$$F + H = (f + h, f_\mu + h_\mu, f_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, f_{\mu\nu\alpha} + h_{\mu\nu\alpha}, f_{\mu\nu\alpha\beta} + h_{\mu\nu\alpha\beta}).$$

В результате действия операторов δ, d, J на F получаются новые поля:

$$\delta F = (-\partial^\sigma f_\sigma, -\partial^\sigma f_{\sigma\mu}, -\partial^\sigma f_{\sigma\mu\nu}, -\partial^\sigma f_{\sigma\mu\nu\alpha}, 0),$$

$$dF = (0, \partial_\mu f, 2\partial_{[\mu} f_{\nu]}, 3\partial_{[\mu} f_{\nu\alpha]}, 4\partial_{[\mu} f_{\nu\alpha\beta]}),$$

$$JF = (\frac{1}{4!} e_{\mu\nu\alpha\beta} f^{\mu\nu\alpha\beta}, \frac{1}{3!} e_{\nu\alpha\beta\mu} f^{\nu\alpha\beta}, -\frac{1}{2} e_{\alpha\beta\mu\nu} f^{\alpha\beta},$$

$$-e_{\beta\mu\nu\alpha} f^\beta, e_{\mu\nu\alpha\beta} f),$$

где квадратные скобки обозначают альтернирование, $e_{\mu\nu\alpha\beta}$ - полностью антисимметричный псевдотензор с $e_{0123} = 1$. Метрический тензор $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$, $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1$, остальные компоненты равны нулю, $\partial^\sigma = g^{\sigma\nu}\partial_\nu = g^{\sigma\nu}\partial/\partial x^\nu$. В работе /4/ оператор J обозначен через $*_1$. Положим по определению

$$(F,H) = \bar{f}h + \bar{f}_\mu h^\mu + \frac{1}{2}\bar{f}_{\mu\nu} h^{\mu\nu} + \frac{1}{3!}\bar{f}_{\mu\nu\alpha} h^{\mu\nu\alpha} +$$

$$+ \frac{1}{4!}\bar{f}_{\mu\nu\alpha\beta} h^{\mu\nu\alpha\beta},$$

$$(F,H)_\mu = i(\bar{f}h_\mu - \bar{f}_\mu h) + i(\bar{f}^{\alpha}h_{\mu\alpha} - \bar{f}_{\mu\alpha}h^{\alpha}) +$$

$$+\frac{i}{2}(\bar{f}^{\alpha\beta}h_{\mu\alpha\beta} - \bar{f}_{\mu\alpha\beta}h^{\alpha\beta}) +$$

$$+\frac{i}{3!}(\bar{f}^{\alpha\beta\nu}h_{\mu\alpha\beta\nu} - \bar{f}_{\mu\alpha\beta\nu}h^{\alpha\beta\nu}),$$

где черта обозначает комплексное сопряжение. Очевидно, что

$$\overline{(F,H)} = (H,F),\ (\lambda F,H) = \bar{\lambda}(F,H),\ (F,\lambda H) = \lambda(F,H), \qquad /1/$$

$$\overline{(F,H)_\mu} = (H,F)_\mu,\ (\lambda F,H)_\mu = \bar{\lambda}(F,H)_\mu,\ (F,\lambda H)_\mu = \lambda(F,H)_\mu. \qquad /2/$$

Проделав соответствующие выкладки, получаем важные равенства

$$(JF,JH) = -(F,H), \qquad /3/$$

$$(JF,JH)_\mu = -(F,H)_\mu. \qquad /4/$$

Так как

$$J^2 = -1, \qquad /5/$$

то из /3/, /4/ следует, что

$$(JF,H) = (F,JH), \qquad /6/$$

$$(JF,H)_\mu = (F,JH)_\mu. \qquad /7/$$

Подчеркнем, что в силу /5/ оператор J не имеет собственных векторов в пространстве вещественных полей F. Смысл этого замечания будет ясен из дальнейшего.

Рассмотрим лагранжиан

$$\mathfrak{L}_0 = \frac{1}{2}(F,\delta F + dF) + \frac{1}{2}(\delta F + dF, F) - \frac{mc}{h}(F,F). \qquad /8/$$

Лагранжиан /8/ приводит к уравнению

$$\delta F + dF = \frac{mc}{h}F,$$

которое наряду с комплексными имеет и вещественные решения. Из двух уравнений, предложенных в [4], выбрано то, которое в ряде вопросов позволяет проще достичь цели и лучше оттеняет детали, обуславливающие введение комплексных чисел. Применяя /1/-/7/ и учитывая, что оператор J коммутирует с оператором $\delta + d$, находим, что лагранжиан /8/ инвариантен относительно преобразований

$$F \Rightarrow F\,\mathrm{ch}\beta + iJF\,\mathrm{sh}\beta. \qquad /9/$$

Инвариантность лагранжиана $\mathfrak{L}_0$ относительно градиентных преобразований первого рода

$$F = Fe^{i\alpha}$$

и преобразований /9/ непосредственно приводит к выражениям для сохраняющихся 4-векторов электрического и магнитного токов:

$$J_\mu = (F,F)_\mu, \qquad /10/$$

$$C_\mu = (F,JF)_\mu. \qquad /11/$$

Электрический заряд проявляет себя через существование векторного поля A_μ, подчиняющегося универсальной связи с сохраняющимся током, построенным из полей ненулевого электрического заряда. Предполагая, что и магнитный заряд проявляет себя так же, приходим к лагранжиану

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0 + \frac{e}{hc}A^\mu J_\mu + \frac{g}{hc}B^\mu C_\mu. \qquad /12/$$

Лагранжиан /12/ инвариантен относительно калибровочных преобразований

$$F \Rightarrow F e^{\frac{ie}{hc}\alpha}, \quad A_\mu \Rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha,$$

$$F \Rightarrow F \operatorname{ch}(\frac{g}{hc}\beta) + iJF \operatorname{sh}(\frac{g}{hc}\beta), \; B_\mu \Rightarrow B_\mu + \partial_\mu \beta.$$

Таким образом, векторные поля A_μ, B_μ можно ввести как компенсирующие. Следствие: токи J_μ, C_μ сохраняются и при наличии внешних полей A_μ, B_μ. Еще один важный момент. Токи J_μ, C_μ исчезают, если поле F вещественно. Вывод: физические объекты не могут быть носителями только магнитного заряда.

Располагая выражениями электрического и магнитного токов, выясним важный вопрос о преобразованиях сопряжения электрического и магнитного зарядов. По аналогии со случаем комплексного скалярного поля рассмотрим преобразование

$$F \Rightarrow \bar{F} = (\bar{f}, \bar{f}_\mu, \bar{f}_{\mu\nu}, \bar{f}_{\mu\nu\alpha}, \bar{f}_{\mu\nu\alpha\beta}). \qquad /13/$$

Преобразование /13/ меняет знак как у вектора электрического тока, так и у вектора магнитного тока.

Отсюда и из сказанного во введении напрашивается вывод, что поле F физически нереализуемо. В таком случае необходимо найти отличные от нуля проекции F на физически реализуемые состояния. Возвращаясь к преобразованиям /9/, замечаем, что их можно представить в виде

$$F \Rightarrow \Pi_{(+)} F e^{\beta} + \Pi_{(-)} F e^{-\beta},$$

где

$$\Pi_{(\pm)} = \frac{1}{2}(1 \pm iJ)$$

- проекционные операторы, так как

$$\Pi^2_{(\pm)} = \Pi_{(\pm)}, \; \Pi_{(+)}\Pi_{(-)} = \Pi_{(-)}\Pi_{(+)} = 0, \; \Pi_{(+)} + \Pi_{(-)} = 1.$$

Обозначая через K линейное пространство, которое образуют поля F, а через $K_\pm$ -подпространства пространства K, которые образуют поля

$$\Psi = \Pi_{(+)} F, \quad \Phi = \Pi_{(-)} F,$$

имеем

$$K = K_+ \oplus K_-, \quad K_+ \cap K_- = 0.$$

Таким образом, поле F имеет отличные от нуля проекции по крайней мере в двух разных подпространствах, что и доказывает его физическую нереализуемость. Предположим, что поля Ψ, Φ физически реализуемы. По определению Ψ и Φ:

$$F = \Psi + \Phi, \quad J\Psi = -i\Psi, \quad J\Phi = i\Phi,$$

$$(\Psi, \Psi) = (\Phi, \Phi) = 0,$$

$$(\Psi, \Psi)_\mu = (\Phi, \Phi)_\mu = 0.$$

Значит:

$$J_\mu = (\Psi, \Phi)_\mu + (\Phi, \Psi)_\mu, \qquad /14/$$

$$C_\mu = i(\Psi, \Phi)_\mu - i(\Phi, \Psi)_\mu. \qquad /15/$$

Отсюда усматриваем, что при преобразовании

$$M: \Psi \Rightarrow M\Psi = \Phi, \quad \Phi \Rightarrow M\Phi = \Psi$$

вектор магнитного тока меняет знак, а вектор электрического тока остается неизменным. Полагая

$$\psi = \frac{1}{2}(f + \frac{1}{4!} e_{\mu\nu\alpha\beta} f^{\mu\nu\alpha\beta}), \quad \psi_\mu = \frac{1}{2}(f_\mu + \frac{1}{3!} e_{\nu\alpha\beta\mu} f^{\nu\alpha\beta}),$$

$$\psi_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(f_{\mu\nu} - \frac{i}{2} e_{\alpha\beta\mu\nu} f^{\alpha\beta}), \quad \phi = \frac{1}{2}(f - \frac{1}{4!} e_{\mu\nu\alpha\beta} f^{\mu\nu\alpha\beta}),$$

$$\phi_\mu = \frac{1}{2}(f_\mu - \frac{1}{3!} e_{\nu\alpha\beta\mu} f^{\nu\alpha\beta}), \quad \phi_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(f_{\mu\nu} + \frac{1}{2} e_{\alpha\beta\mu\nu} f^{\alpha\beta}),$$

получаем

$$\Psi = (\psi, \psi_\mu, \psi_{\mu\nu}, -i e_{\beta\mu\nu\alpha} \psi^\beta, i e_{\mu\nu\alpha\beta} \psi), \qquad /16/$$

$$\Phi = (\phi, \phi_\mu, \phi_{\mu\nu}, i e_{\beta\mu\nu\alpha} \phi^\beta, -i e_{\mu\nu\alpha\beta} \phi). \qquad /17/$$

Поля Ψ и Φ имеют каждое по восемь линейно независимых компонент и обладают нужными трансформационными свойствами. Следовательно, поле Ψ можно взять за основу для описания магнитно-заряженных частиц. Рассматривая Ψ и Φ независимо от F, необходимо подчинить $\psi_{\mu\nu}$, $\phi_{\mu\nu}$ условиям дуальности

$$\bar{\psi}_{\mu\nu} = i\psi_{\mu\nu}, \quad \bar{\phi}_{\mu\nu} = -i\phi_{\mu\nu}, \qquad /18/$$

где

$$\bar{\psi}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} e_{\alpha\beta\mu\nu} \psi^{\alpha\beta}$$

бивектор дуальный $\psi_{\mu\nu}$. Преобразования /9/ сводятся к умножению Ψ и Φ на положительные численные множители

$$\Psi \Rightarrow e^\beta \Psi, \quad \Phi \Rightarrow e^{-\beta} \Phi.$$

Подставляя /16/, /17/ в /14/, /15/, получаем

$$J_\mu = 2i[(\psi_{\mu\alpha} - g_{\mu\alpha}\psi)\bar{\phi}^\alpha + (\phi_{\mu\alpha} - g_{\mu\alpha}\phi)\bar{\psi}^\alpha -$$

$$-(\bar{\psi}_{\mu\alpha} - g_{\mu\alpha}\bar{\psi})\phi^\alpha - (\bar{\phi}_{\mu\alpha} - g_{\mu\alpha}\bar{\phi})\psi^\alpha],$$

$$C_\mu = 2[(\psi_{\mu\alpha} - g_{\mu\alpha}\psi)\bar{\phi}^\alpha - (\phi_{\mu\alpha} - g_{\mu\alpha}\phi)\bar{\psi}^\alpha +$$

$$+(\bar{\psi}_{\mu\alpha} - g_{\mu\alpha}\bar{\psi})\phi^\alpha - (\bar{\phi}_{\mu\alpha} - g_{\mu\alpha}\bar{\phi})\psi^\alpha].$$

Теперь нетрудно проверить, что преобразование

$$C: \Psi \Rightarrow C\Psi = \bar{\Psi}, \quad \Phi \Rightarrow C\Phi = \bar{\Phi}$$

меняет знак у 4-вектора электрического тока, а 4-вектор магнитного тока оставляет неизменным. Таким образом, операции сопряжения электрического и магнитного зарядов найдены. В результате мы пришли к представлению о частицах четырех родов, выступающих совместно и равноправно, а именно частиц с зарядами (e^+, g^+), (e^+, g^-), (e^-, g^+), (e^-, g^-). Подчеркнем, что процедура проектирования на физически реализуемые состояния не инвариантна относительно пространственной инверсии. Это ведет к несохранению чатности в процессах с участием вышеобозначенных частиц.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В лагранжиане /12/ совершаем переход от F к Ψ и Φ и варьируем функции $\psi, \psi_\mu, \psi_{\mu\nu}$, ϕ, ϕ_μ, $\phi_{\mu\nu}$, учитывая условия дуальности /18/. В итоге получаем уравнения, которым подчиняются Ψ и Φ:

$$\nabla^\sigma \psi_\sigma = \frac{mc}{h}\psi,$$

$$\nabla_\mu \psi_\nu - \nabla_\nu \psi_\mu - i e_{\mu\nu\alpha\beta} \nabla^\alpha \psi^\beta = \frac{mc}{h}\psi_{\nu\mu},$$

$$\nabla^\sigma \psi_{\sigma\mu} - \nabla_\mu \psi = \frac{mc}{h}\psi_\mu, \qquad /19/$$

$$\nabla^\sigma \phi_\sigma = \frac{mc}{h}\phi,$$

$$\nabla_\mu \phi_\nu - \nabla_\nu \phi_\mu + i e_{\mu\nu\alpha\beta} \nabla^\alpha \phi^\beta = \frac{mc}{\hbar}\phi_{\nu\mu},$$

$$\nabla^\sigma \phi_{\sigma\mu} - \nabla_\mu \phi = \frac{mc}{h}\phi_\mu. \qquad /20/$$

Здесь через ∇_μ обозначены соответственно операторы

$$\partial_\mu - \frac{ie}{hc}A_\mu - \frac{g}{hc}B_\mu , \quad \partial_\mu - \frac{ie}{hc}A_\mu + \frac{g}{hc}B_\mu .$$

Уравнения /19/, /20/ и составляют основные уравнения предлагаемой теории магнитного заряда. Одно замечание. На первый взгляд кажется, что можно отождествить поле Φ с Ψ. Однако обнаруживается, что при этом исчезает не только магнитный ток C_μ, но и электрический ток J_μ. Уравнения для $\bar\Psi, \bar\Phi$ есть уравнения, комплексно сопряженные с /19/, /20/. Из второй группы уравнений /19/, /20/ следует

$$\tilde\psi_{\mu\nu} = i\psi_{\mu\nu} , \quad \tilde\phi_{\mu\nu} = -i\phi_{\mu\nu} .$$

Таким образом, уравнения поля совместны с условиями дуальности .

В рамках уравнений /19/, /20/ скаляр и бивектор составляют своеобразную геометрическую величину, имеющую четыре линейно независимые компоненты. Эта величина и 4-вектор ψ_μ входят в /19/ симметрично. Поэтому уравнения /19/, представляющие систему восьми дифференциальных уравнений первого порядка для восьми функций, позволяют исключить четыре функции и составить систему четырех уравнений второго порядка. Из этой системы можно затем путем предельного перехода $c \to \infty$ получить нерелятивистские уравнения для магнитно-заряженных частиц. При выводе уравнений второго порядка важную роль играют соотношения

$$\nabla_\mu\nabla_\nu - \nabla_\nu\nabla_\mu = -\frac{ie}{hc}H_{\mu\nu} - \frac{g}{hc}W_{\mu\nu} ,$$

$$\nabla_\mu\psi_{\nu\alpha} + \nabla_\nu\psi_{\alpha\mu} + \nabla_\alpha\psi_{\mu\nu} = ie_{\mu\nu\alpha\beta}\nabla_\sigma\psi^{\beta\sigma} ,$$

где

$$H_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu , \quad W_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu .$$

Исключая $\psi, \psi_{\mu\nu}$ из третьей группы уравнений /19/, получаем

$$(\nabla^\sigma\nabla_\sigma + \frac{m^2c^2}{h^2})\psi_\mu = \frac{ie}{hc}(H_{\mu\alpha} + i\tilde H_{\mu\alpha})\psi^\alpha + \frac{g}{hc}(W_{\mu\alpha} + i\tilde W_{\mu\alpha})\psi^\alpha . \qquad /21/$$

Исключая ψ_μ из первой и второй группы уравнений /19/, получаем

$$(\nabla^\sigma\nabla_\sigma + \frac{m^2c^2}{h^2})\psi = \frac{ie}{2hc}H_{\alpha\beta}\psi^{\alpha\beta} + \frac{g}{2hc}W_{\alpha\beta}\psi^{\alpha\beta} , \qquad /22/$$

$$(\nabla^\sigma\nabla_\sigma + \frac{m^2c^2}{h^2})\psi_{\mu\nu} = \frac{ie}{hc}(H_{\mu\alpha}\psi^\alpha_\nu - H_{\nu\alpha}\psi^\alpha_\mu) + \frac{g}{hc}(W_{\mu\alpha}\psi^\alpha_\nu - W_{\nu\alpha}\psi^\alpha_\mu) - \frac{ie}{hc}(H_{\mu\nu} - i\tilde H_{\mu\nu})\psi - \frac{g}{hc}(W_{\mu\nu} - i\tilde W_{\mu\nu})\psi . \qquad /23/$$

Из /21/ - /23/ следует, что при отсутствии A_μ, B_μ каждая компонента Ψ удовлетворяет уравнению Клейна-Фока. По тому, как векторные поля A_μ, B_μ входят в уравнения второго порядка, заключаем, что для них наиболее приемлем лагранжиан

$$\mathfrak{L}_a = \frac{1}{2}H_{\mu\nu}W^{\mu\nu} .$$

Таким образом, в лоренцевской калибровке A_μ, B_μ определяются из уравнений

$$\Box A_\mu = \frac{e}{\hbar c} J_\mu , \qquad \Box B_\mu = \frac{g}{\hbar c} C_\mu .$$

Уравнения /19/, в отсутствие внешних полей, имеют решения в виде плоских волн

$$\Psi(x) = e^{-\frac{i}{\hbar} px} \quad \Psi(p) ,$$

где $\Psi(p)$ удовлетворяет уравнениям

$$p^\mu \psi_\mu (p) = imc\psi(p) ,$$

$$p_\mu \psi_\nu (p) - p_\nu \psi_\mu (p) - ie_{\mu\nu\alpha\beta}\, p^\alpha \psi^\beta (p) = imc\psi_{\nu\mu}(p) ,$$

$$p^\sigma \psi_{\sigma\mu} (p) - p_\mu \psi(p) = imc\psi_\mu (p) . \qquad /24/$$

Система линейных однородных уравнений /24/ имеет нетривиальные решения только, когда $p^2 = m^2c^2$, т.е. $p_0 = \pm\sqrt{\vec p^2 + m^2c^2}$. Пусть $\Psi(\vec p)$ - решение, соответствующее $p_0 = \sqrt{\vec p^2 + m^2c^2}$. В импульсном пространстве выберем локальный ортонормированный базис $e^i_\mu(\vec p)$. Верхний, латинский, индекс нумерует векторы базиса и пробегает значения 0,1,2,3. Орт $e^0_\mu(\vec p)$ направим по p_μ:

$$e^0_\mu(\vec p) = p_\mu/mc. \qquad /25/$$

По определению базиса

$$e^i_\mu(\vec p)\, e^j_\nu(\vec p)\, g^{\mu\nu} = g^{ij}, \qquad /26/$$

условие полноты базиса:

$$e^i_\mu(\vec p)\, e^j_\nu(\vec p)\, g_{ij} = g_{\mu\nu} . \qquad /27/$$

Нам потребуется также соотношение

$$e^{\mu\nu\alpha\beta} \quad e^i_\mu(\vec p)\, e^j_\nu(\vec p)\, e^k_\alpha(\vec p)\, e^s_\beta(\vec p) = e^{ijks} , \qquad /28/$$

в справедливости которого проще всего убедиться, заметив, что вектор $d^\beta(\vec p) = e^{\mu\nu\alpha\beta}\, e^0_\mu(\vec p)\, e^1_\nu(\vec p)\, e^2_\alpha(\vec p)$ может отличаться от $e^3_\mu(\vec p)$ только знаком. Разложим $\psi_\mu(\vec p)$, $\psi_{\mu\nu}(\vec p)$ по базису $e^i_\mu(\vec p)$.

$$\psi_\mu(\vec p) = a_i(\vec p)\, e^i_\mu(\vec p) , \quad \psi_{\mu\nu}(\vec p) = a_{ij}(\vec p)\, e^i_\mu(\vec p)\, e^j_\nu(\vec p) . \qquad /29/$$

Амплитуды $a_{ij}(\vec p)$ в силу /18/, /26/-/28/ удовлетворяют соотношениям

$$a_{ij}(\vec p) = -a_{ji}(\vec p) , \quad \tilde a_{kj}(\vec p) = i a_{kj}(\vec p) ,$$

где $\tilde a_{kj}(\vec p) = \frac{1}{2} e_{iskj}\, a^{is}(\vec p)$. Подставляя /29/ в /24/ и учитывая /25/, получаем

$$a_0(\vec p) = i\psi(\vec p) , \; a_1(\vec p) = i a_{10}(\vec p) , \; a_2(\vec p) = i a_{20}(\vec p) , \; a_3(\vec p) = i a_{30}(\vec p) .$$

Таким образом, при каждом значении импульса $\vec p$ имеются четыре линейно независимых решения с положительной энергией. Полученный результат согласуется с идейными посылками работы, сформулированными во введении.

3. АНОМАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Из компонент полей Ψ, Φ составим действительные симметричные тензоры

$$S_{\mu\nu}(\psi) = g_{\mu\nu}\, (\bar\psi\psi - \bar\psi_\alpha \psi^\alpha) + \psi_\mu \bar\psi_\nu + \bar\psi_\mu \psi_\nu - \bar\psi_{\mu\alpha}\, \psi_\nu^{\ \alpha} .$$

$$S_{\mu\nu}(\phi) = g_{\mu\nu}(\bar{\phi}\phi - \bar{\phi}_{\alpha}\phi^{\alpha}) + \phi_{\mu}\bar{\phi}_{\nu} + \bar{\phi}_{\mu}\phi_{\nu} - \bar{\phi}_{\mu\alpha}\phi_{\nu}{}^{\alpha},$$

и действительные антисимметричные тензоры

$$E_{\mu\nu}(\psi) = \bar{\psi}\psi_{\mu\nu} + \psi\bar{\psi}_{\mu\nu} - ie_{\mu\nu\alpha\beta}\bar{\psi}^{\alpha}\psi^{\beta},$$

$$E_{\mu\nu}(\phi) = \bar{\phi}\phi_{\mu\nu} + \phi\bar{\phi}_{\mu\nu} + ie_{\mu\nu\alpha\beta}\bar{\phi}^{\alpha}\phi^{\beta}.$$

Обозначим через $\Pi_{\mu\nu}(\psi)$, $\Pi_{\mu\nu}(\phi)$ суммы

$$\Pi_{\mu\nu}(\psi) = S_{\mu\nu}(\psi) + E_{\mu\nu}(\psi), \quad \Pi_{\mu\nu}(\phi) = S_{\mu\nu}(\phi) + E_{\mu\nu}(\phi)$$

и образуем дивергенции $\partial^{\nu}\Pi_{\mu\nu}(\psi)$, $\partial^{\nu}\Pi_{\mu\nu}(\phi)$. Используя вытекающие из условий дуальности /18/ соотношения

$$\bar{\psi}_{\mu\nu}\psi^{\mu\nu} = 0, \quad \psi_{\mu\alpha}\bar{\psi}^{\nu\alpha} = \bar{\psi}_{\mu\alpha}\psi^{\nu\alpha},$$

$$\partial_{\mu}\psi_{\nu\alpha} + \partial_{\nu}\psi_{\alpha\mu} + \partial_{\alpha}\psi_{\mu\nu} = ie_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_{\sigma}\psi^{\beta\sigma}$$

для $\psi_{\mu\nu}$ и аналогичные соотношения для $\phi_{\mu\nu}$, получаем, что на решениях уравнений /19/, /20/

$$\partial^{\nu}\Pi_{\mu\nu}(\psi) = \frac{2g}{hc}B^{\nu}\Pi_{\mu\nu}(\psi), \qquad /30/$$

$$\partial^{\nu}\Pi_{\mu\nu}(\phi) = -\frac{2g}{hc}B^{\nu}\Pi_{\mu\nu}(\phi). \qquad /31/$$

Рассмотрим векторы $T_{\nu}(\psi) = k^{\mu}\Pi_{\mu\nu}(\psi)$, $T_{\nu}(\phi) = k^{\mu}\Pi_{\mu\nu}(\phi)$, где k_{μ} – некоторый, пока произвольный вектор. Так как

$\partial^{\nu}T_{\nu}(\psi) = k^{\mu}\partial^{\nu}\Pi_{\mu\nu}(\psi) + \Pi_{\mu\nu}(\psi)\partial^{\nu}k^{\mu}$, то в силу /30/, /31/ $\partial^{\nu}T_{\nu}(\psi) = \partial^{\nu}T_{\nu}(\phi) = 0$, если отсутствует поле B_{μ} а вектор k^{μ} удовлетворяет уравнениям

$$\partial^{\nu}k^{\mu} = 0. \qquad /32/$$

Пусть последние два условия выполнены. Тогда интегралы

$$I(\psi) = \int_{\Sigma} k^{\mu}\Pi_{\mu\nu}(\psi)\,d\sigma^{\nu}, \quad I(\phi) = \int_{\Sigma} k^{\mu}\Pi_{\mu\nu}(\phi)\,d\sigma^{\nu} \qquad /33/$$

не зависят от выбора трехмерной поверхности Σ. В плоском пространстве - времени уравнения /32/ имеют четыре линейно независимых решения, за которые можно выбрать единичные векторы, направленные по осям декартовых координат x^0, x^1, x^2, x^3. Подставляя эти векторы в /33/ и выбирая за поверхность Σ 3-плоскость $x^0 = \mathrm{const}$, получаем, что интегралы

$$W_0(\psi) = \int \Pi_{00}(\psi)\,d^3x, \qquad W_k(\psi) = \int \Pi_{k0}(\psi)\,d^3x,$$

$$W_0(\phi) = \int \Pi_{00}(\phi)\,d^3x, \qquad W_k(\phi) = \int \Pi_{k0}(\phi)\,d^3x$$

$$(k = 1, 2, 3)$$

определяют не зависящие от времени инварианты. Отметим, что величины $W_0(\psi)$, $W_0(\phi)$ существенно положительны, поскольку

$$\Pi_{00}(\psi) = \bar{\psi}\psi + \sum_{\alpha=0}^{3}(\bar{\psi}_{\alpha}\psi_{\alpha} + \bar{\psi}_{0\alpha}\psi_{0\alpha}),$$

$$\Pi_{00}(\phi) = \bar{\phi}\phi + \sum_{\alpha=0}^{3}(\bar{\phi}_{\alpha}\phi_{\alpha} + \bar{\phi}_{0\alpha}\phi_{0\alpha}).$$

Инварианты /34/ в высшей степени необычны. В самом деле, эти интегралы движения следуют из однородности пространства-времени, однако не имеют никакого отношения к тензору энергии-импульса, соответствующему уравнениям /19/, /20/; они существуют независимо от того, отсутствует или нет электромагнитное поле. Отсюда и название законов сохранения:

$$\partial^{\nu}\Pi_{\mu\nu}(\psi) = 0, \quad \partial^{\nu}\Pi_{\mu\nu}(\phi) = 0.$$

4. О МАГНИТНОМ ЗАРЯДЕ ДЕЙТРОНА

Хорошо известным примером связанной системы из двух фермионов служит дейтрон. Дейтрон состоит из протона и нейтрона. Небольшая энергия связи, наличие квадрупольного электрического момента, отличие магнитного момента дейтрона от суммы магнитных моментов протона и нейтрона указывают, на наш взгляд, на возможность отождествления магнитно-заряженной частицы и дейтрона. Какие эффекты можно наблюдать, обладай дейтрон магнитным зарядом? Прежде всего, это несохранение четности в процессах с участием дейтронов. Следует обратить внимание на возможность обнаружения несохранения четности в электромагнитных переходах в атомах дейтерия. Обладая магнитным зарядом, дейтроны во многом определяли бы свойства ядер. Поэтому обнаружение несохранения четности в электромагнитных переходах в атомах могло бы послужить косвенным подтверждением наличия у ядер этих атомов магнитного заряда. Более детальное обсуждение эксперимента по обнаружению магнитного заряда дейтрона выходит за рамки настоящей статьи, так как требует дальнейшего развития математического формализма.

Автор глубоко благодарен Н.А.Черникову, В.М.Сидорову, В.П.Зрелову за обсуждение работы и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dirac P.A. Proc.Roy. Soc., 1931, A113, p.60.
2. Монополь Дирака, "Мир", М., 1970.
3. Стражев В.И., Томильчик Л.М. Электродинамика с магнитным зарядом. "Наука и техника", Минск, 1975.
4. Пестов А.Б. ТМФ, 1978, 34, 1, с. 48; ОИЯИ, Р2-9642, Дубна, 1976.

Рукопись поступила в издательский отдел 2 июня 1978 года.