СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 11623

Н.В.Махалдиани

# СПЕКТР МАСС В СКАЛЯРНЫХ ТЕОРИЯХ ПОЛЯ

1978

Р2 - 11623

Н.В.Махалдиани

# СПЕКТР МАСС В СКАЛЯРНЫХ ТЕОРИЯХ ПОЛЯ

Махалдиани Н.В. P2 - 11623

Спектр масс в скалярных теориях поля

Показано, что скалярные модели с самодействием $g\phi^{2N}$ могут быть эквивалентны свободным моделям с перенормированным на величину

$$\frac{\Gamma(1/2N)}{\Gamma(3/2N)} \sqrt[N]{g_R} \; .$$

квадратом массы.

Приведены аргументы в пользу наличия нуля $\beta$-функции для моделей $\phi^4$ и $\phi^6$ соответственно в четырех- и в трехмерном пространстве-времени.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Makhaldiani N.V. P2 - 11623

The Spectrum of Mass in Scalar Field Theories

The equivalence of scalar field theories with self interaction $g\phi^{2N}$ to free theories but shifted by quantity

$$\frac{\Gamma(1/2N)}{\Gamma(3/2N)} \sqrt[N]{g_R}$$

square mass is considered.

The existence of a stable ultraviolet fixed point of $\beta$-function for $\phi^4$ and $\phi^6$ models, correspondingly, in four and three dimensions is argued.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978



Рассмотрим скалярные модели

$$L = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 - g\phi^{2N} \; . \qquad /1/$$

Ниже будет показана эквивалентность /1/ со слабой затравочной константой модели

$$L = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2}\left(m^2 + \frac{\Gamma(1/2N)}{\Gamma(3/2N)} \sqrt[N]{g_R}\right)\phi^2 . \qquad /2/$$

Рассмотрим производящий функционал для /1/ [1], причем для простоты будем действовать в эвклидовом пространстве [2]

$$S(J) = \int \delta\phi \, e^{-\int dx\left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi + \frac{m^2}{2}\phi^2 + g\phi^{2N} + J(x)\phi(x)\right)} \; . \qquad /3/$$

Представим /3/ в виде:

$$S(J) = e^{-\frac{1}{2}\int dx \frac{\delta}{\delta J(x)}(\Box + m^2)\frac{\delta}{\delta J(x)}} Z(J), \qquad /4/$$

где

$$Z(J) = \int \delta\phi \, e^{-\int (g\phi^{2N} + J\phi)dx} \; . \qquad /5/$$

Модели с производящим функционалом $Z(J)$ /5/ рассматривались ранее [3].

Функциональную квадратуру /5/ будем понимать как предел многомерного интеграла на пространственновременной решетке. Для конкретности рассмотрим случай с $N=4$

$$Z(J)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{\int\delta\phi\, e^{-\Delta\sum_i (g\phi_i^4+J_i\phi_i)}}{\int\delta\phi\, e^{-\Delta\sum_i g\phi_i^4}}, \qquad /6/$$

где $\Delta$ - объем элементарной ячейки, $J_i=J(x_i)$ и $\phi_i=\phi(x_i)$ - значения источника и поля в ячейке с номером $i$.

Разлагая правую часть /6/ по степеням $J$ с учетом симметрии по отношению к замене $\phi_i\to-\phi_i$, имеем

$$Z(J,\Delta)=1+\frac{1}{2}\Delta^2\sum_i J_i^2\frac{\int\delta\phi\,\phi_i^2 e^{-\Delta g\phi_i^4}}{\int\delta\phi\, e^{-\Delta g\phi_i^4}} + \frac{1}{4!}\Delta^4\sum_i J_i^4\frac{\int\delta\phi\,\phi_i^4 e^{-\Delta g\phi_i^4}}{\int\delta\phi\, e^{-\Delta g\phi_i^4}}+\ldots \qquad /7/$$

В выражении /7/ явно не выписаны несвязанные члены, например:

$$\sum_i J_i^2\frac{\int\delta\phi\,\phi_i^2 e^{-\Delta g\phi_i^4}}{\int\delta\phi\, e^{-\Delta g\phi_i^4}}\times\sum_j J_j^2\frac{\int\delta\phi\,\phi_j^2 e^{-\Delta g\phi_j^4}}{\int\delta\phi\, e^{-\Delta g\phi_j^4}},$$

которые автоматически учитываются путем подстановки в экспоненту связанных членов [1,2].

Уже имея одномерные интегралы * в /7/, получим:

$$Z(J,\Delta)=1+\frac{1}{2}\Delta^2\sum_i J_i^2\left(\frac{1}{\Delta g}\right)^{1/2}\frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)}$$

$$+\frac{1}{4!}\Delta^4\sum_i J_i^4\frac{1}{\Delta g}\cdot\frac{\Gamma(5/4)}{\Gamma(1/4)}$$

$$+\frac{1}{6!}\Delta^6\sum_i J_i^6\left(\frac{1}{\Delta g}\right)^{3/2}\frac{\Gamma(7/4)}{\Gamma(1/4)}+\ldots$$

$$=1+\frac{1}{2}\frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)}\Delta^{1/2}\left(\frac{1}{g}\right)^{1/2}\left(\Delta\sum_i J_i^2\right)$$

$$+\frac{1}{4!}\frac{\Gamma(5/4)}{\Gamma(1/4)}\Delta^2\cdot\frac{1}{g}\cdot\left(\Delta\sum_i J_i^4\right) \qquad /8/$$

$$+\frac{1}{6!}\frac{\Gamma(7/4)}{\Gamma(1/4)}\Delta^{7/2}\left(\frac{1}{g}\right)^{3/2}\left(\Delta\sum_i J_i^6\right)+\ldots$$

Переходя в /8/ к пределу $\Delta\to 0$ при фиксированном $g$, получим тривиальный результат:

$Z(J,0)=1$

и, следовательно, из /4/

$S(J)=1$.

Разумной возможностью обойти эту трудность представляется "упрятать" малость в исходных "голых" параметрах теории, в духе процедуры перенормировки [1]. Для этого введем ренормированный заряд, который будет стремиться к постоянному пределу

$$g_R=g/\Delta. \qquad /9/$$

Конечно, $g_R$ является безразмерной. На самом деле мы должны были ввести некоторый параметр, например, $M$,

$$\Delta^{1/2}\frac{1}{\sqrt{g}}=M^{-2}\frac{1}{\sqrt{g/\Delta\cdot M^4}},$$

который соблюдает правильную размерность, но ясно, что от величины $M$ зависимости нет, поэтому мы полагаем $M=1$. Тогда /8/ примет вид:

$$Z(J,\Delta)=1+\frac{1}{2}\frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)}\left(\frac{1}{g_R}\right)^{1/2}\left(\Delta\sum_i J_i^2\right)$$

---

* Можно вывести элементарную формулу

$$\frac{\int\delta\phi\, e^{-\int\left(\frac{m^2}{2}\phi^2+J\phi\right)dx}}{\int\delta\phi\, e^{-\int\frac{m^2}{2}\phi^2\,dx}}=e^{\frac{1}{2m^2}\int J^2(x)\,dx},$$

разлагая левую часть по степеням $J$ и переходя к пределам на решетку.

$$+\frac{1}{4!}\frac{\Gamma(5/4)}{\Gamma(1/4)}\cdot\Delta\cdot\frac{1}{g_R}\cdot(\Delta\sum_i J_i^4)$$

$$+\frac{1}{6!}\frac{\Gamma(7/4)}{\Gamma(1/4)}\cdot\Delta^2\cdot(\frac{1}{g_R})^{3/2}(\Delta\sum_i J_i^6)+\ldots$$

В пределе $\Delta\to 0$

$$Z(J,0)=1+\frac{1}{2}\frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)}(\frac{1}{g_R})^{1/2}\int J^2(x)dx+\ldots, \qquad /10/$$

так как остальные члены содержат дополнительную малость, и в пределе мы их отбросим.

Заметим, что соотношение /9/ означает при фиксированных $g_R$ малость голого заряда $g$ и, наоборот, при фиксированном $g$– силу ренормированного заряда $g_R$. Для $\beta$-функции ренормгруппы [1] имеем:

$$-\Lambda\frac{\partial}{\partial\Lambda}g_R\equiv\beta(g_R)=-4g_R\ , \qquad /11/$$

где $\Lambda$ - импульсное обрезание, соответствующее пространственному $\Delta$.

Линейное падение по $g_R$ $\beta$-функции рассматривалось также в работе [4].

Для $Z(J,0)$ имеем

$$Z(J,0)=e^{\frac{1}{2}\frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)}\frac{1}{\sqrt{g_R}}\int J^2(x)dx}$$

или

$$Z(J,0)=\int\delta\phi\, e^{-\int(\frac{1}{2}\frac{\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)}\sqrt{g_R}\cdot\phi^2(x)+J\phi)dx}.$$

Окончательно из формулы /4/ получаем

$$S(J)=\int\delta\phi\, e^{-\int\{\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2+\frac{1}{2}(m^2+\frac{\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)}\sqrt{g_R})\phi^2+J\phi\}dx}. \qquad /12/$$

Аналогичное рассмотрение можно провести для произвольного $N$ и размерности пространства-времени.



Для общего полиномиального взаимодействия $P_{2N}(\phi)=\sum_{n=2}^{N}g_{no}\phi^{2n}$ с помощью ренормировки $g_{no}/\Delta^{n-1}=g_n$ приходим к свободной модели с массой

$$m^2=m_0^2+\sum_{n=2}^{N}\frac{\Gamma(1/2n)}{\Gamma(3/2n)}\sqrt[n]{g_R}\ .$$

Также возможно, по мере надобности, "вносить" в массу любой член с положительной константой и четной степенью, при условии, что в оставшемся полиноме старшая нелинейность четная и имеет положительную константу, в противном случае "одетые" частицы будут неустойчивы.

Пример:

$$L_{int}=g\phi^3-h\phi^4\ .$$

Внося $h\phi^4$ член в массу, получаем

$$L=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2-\frac{1}{2}(m_0^2+\frac{\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)}\sqrt{h_R})\phi^2+g\phi^3\ ,$$

но $g\phi^3$ "не имеет нижнего состояния" - наблюдается неустойчивость, тогда как исходная модель устойчива.

Просто напросто частицы с массой $m^2=m_0^2+\frac{\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)}\sqrt{h_R}$ будут неустойчивы.

Окончательно проведенные наблюдения сформулируем в виде теоремы о редукции.

В полиномиальных скалярных теориях мономы с четной нелинейностью и положительной константой можно вносить в массу.

Заметим, что в формулах /3/, /12/ мы явно не указываем на несущественные, с точки зрения функции Грина, нормировочные множители.

**Определение ренормированной константы /9/ и,** следовательно, поведение $\beta$-функции при больших $g_R$ /11/ с учетом поведения при малых $g_R$, $\beta(g_R)=\beta_1 g_R^2$, $\beta_1>0$ [1,5] означает наличие нуля $\beta$-функции для моделей $\phi^4$ и $\phi^6$ в четырех- и трехмерном пространстве-времени соответственно.

Приятно поблагодарить В.Г.Маханькова и Д.В.Ширкова за поддержку и интерес к работе, А.А.Владимирова, Л.Г.Заставенко, В.А.Матвеева, А.А.Мигдала и В.К.Федянина за обсуждения и полезные замечания.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. Издание третье, "Наука", М., 1976.*
2. *Васильев А.Н. Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике. Изд. ЛГУ, Л., 1976.*
3. *Klauder J.R. Phys.Rev., 1976, D14, p.1952.*
4. *Castoldi P., Schomblond C. Phys.Lett.,1977, 70B,p.209.*
5. *Kazakov D.I. e.a. JINR, E2-8085, Dubna, 1974.*

*Рукопись поступила в издательский отдел
31 мая 1978 года.*