

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



18/IX-78

C 322.2

№ 696

3972/2-78

P2 - 11589

И.Е.Жидкова, И.П.Недялков, В.А.Ростовцев

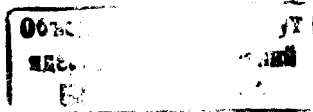
О ГРАНИЦАХ ПРИМЕНИМОСТИ
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО МЕТОДА ИССЛЕДОВАНИЯ
СИЛЬНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ

1978

P2 - 11589

И.Е.Жидкова, И.П.Недялков, В.А.Ростовцев

О ГРАНИЦАХ ПРИМЕНИМОСТИ
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО МЕТОДА ИССЛЕДОВАНИЯ
СИЛЬНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ



Жидкова И.Е., Недялков И.П., Ростовцев В.А.

P2 - 11589

О границах применимости экспериментального метода исследования сильных гравитационных полей

Исследуются приливные силы, действующие на зонд в поле Шварцшильда при воображаемом эксперименте по проверке теории сильных гравитационных полей. Цель работы - исследовать на какое расстояние от центра гравитационного поля можно приблизить экспериментальную установку с тем, чтобы она не была разорвана приливными силами. Показано, что зонд будет разорван, если радиус его орбиты меньше некоторого критического. Для нейтральной звезды с массой $M=1M_{\odot}$ этот критический радиус равен пяти ее шварцшильдовским радиусам.

Расчеты проводились в тетрадном формализме с применением системы аналитических преобразований на ЭВМ.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Zhidkova I.E., Nedyalkov I.P., Rostovtsev V.A.

P2 - 11589

On Applicability Limits of the Experimental Method for Investigating Strong Gravitational Fields

Mechanical effects of tidal forces on the physical apparatus exploring strong gravitational fields are investigated. The stresses in probes orbiting in circular orbits around neutron stars or black holes are calculated. It is shown that a probe of about 10 cm in dimension will be destroyed by tidal forces if the orbiting radius is 5 times less than the Schwarzschild radius of the star. The computer symbolic evaluation were used.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

§ I. Введение

В последнее время вопрос об экспериментальной проверке общей теории относительности (ОТО) становится все более актуальным. При жизни Эйнштейна его теория подтверждалась только тремя эффектами - красным смещением, отклонением лучей в гравитационном поле Солнца и смещением перигелия Меркурия. Все эти эффекты связаны со слабым гравитационным полем Солнца, причем о возможности проверки ОТО в условиях сильных гравитационных полей даже и не говорилось. Сейчас положение резко изменилось. Кроме нового, четвертого эффекта - замедления радиозаха от Меркурия - на повестке дня стоит большое число других экспериментов или эффектов для проверки ОТО в условиях слабого гравитационного поля. Кроме того, мы имеем уже проекты для проверки ОТО в условиях сильных полей косвенно, путем исследования пульсаров и при поиске черных дыр. Некоторый свет на возможности ОТО объяснить сильные гравитационные поля проливают исследования по космологии, например, изучение реликтового излучения, параметры которого согласуются с выводами ОТО о большом взрыве, при котором существенную роль играли сильные гравитационные поля. Но, как отмечено выше, эти способы проверки ОТО - косвенные. Между тем интересно обсудить принципиальные возможности проверки теории сильных гравитационных полей экспериментально, например, при помощи зонда, который движется в сильном поле Шварцшильда, вызванном либо нейтральной звездой, либо черной дырой.

Цель настоящей работы - исследовать, на какое расстояние от центра гравитационного поля можно приблизить экспериментальную установку с тем, чтобы она не была разорвана приливными силами, которые очень велики, а в некоторых точках могут принимать и бесконечное значение.

В работе будет показано, что лаборатория разорвется, если радиус ее орбиты меньше некоторого критического R_c — "радиуса доступности", который в типичных случаях равняется нескольким шварцшильдовским радиусам. Отметим, что на так называемых круговых фотонных орбитах с радиусом в полтора шварцшильдовских радиуса приливные силы становятся бесконечными.

При вычислении приливных сил понадобятся ротационные коэффициенты Риччи и тетрадные компоненты тензора Римана. Определение этих величин приводит к громоздким выкладкам, при которых вероятность допустить ошибку значительно увеличивается. Поэтому мы сочли целесообразным вычислить коэффициенты заново, независимо от того, что они получены другими авторами^{2,3/}. Мы выполнили вычисления на языке символического программирования REDUCE^{4/} и не обнаружили расхождений с результатами упомянутых выше авторов.

План работы таков: в § 2 выводятся формулы для компонент тетрадного поля, а в § 3 — уравнение девиации в подходящей форме. В § 4 рассчитаны приливные силы и оценены приливные натяжения для зонда, который движется по круговой орбите. На основании этих оценок приближенно определен радиус доступной для экспериментальных исследований области.

§ 2. Определение тетрадного поля

При определении тетрадного поля, которое соответствует решению Шварцшильда, будем использовать метрику в следующей форме:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -M^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -z^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix},$$

$$g^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} M^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -z^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -z^{-2} \sin^{-2} \theta \end{bmatrix}, \quad (I)$$

где $M = 1 - \frac{z_0}{z}$, z_0 — радиус Шварцшильда, $c = G = 1$.

Тетрадные векторы определим при помощи уравнений

$$\begin{aligned} e_\alpha^a e_\beta^b \eta_{ab} &= g_{\alpha\beta} \\ e_\alpha^a e_\beta^b g^{\alpha\beta} &= \eta^{ab} \end{aligned} \quad (2)$$

и дополнительных условий

$$e_1^{(0)} = e_2^{(0)} = e_3^{(1)} = e_3^{(2)} = e_1^{(2)} = 0. \quad (3)$$

Определенные из условий (I), (2) и (3) тетрады записываются в компактной форме следующим образом:

$$\begin{aligned} e_\alpha^0 &= (\varphi, 0, 0, M^{-1/2} f z \sin \theta), \\ e_\alpha^1 &= (0, M^{-1/2}, 0, 0), \\ e_\alpha^2 &= (0, 0, z, 0), \\ e_\alpha^3 &= (f, 0, 0, \varphi M^{-1/2} z \sin \theta). \end{aligned} \quad (4)$$

Для компонент дуальных векторов $e_\alpha^\alpha = ((e_\alpha^\alpha)^{-1})^T$ находим:

$$\begin{aligned} e_0^\alpha &= (\varphi M^{-1}, 0, 0, -M^{-1/2} f z^{-1} \sin^{-1} \theta), \\ e_1^\alpha &= (0, M^{1/2}, 0, 0), \\ e_2^\alpha &= (0, 0, z^{-1}, 0), \\ e_3^\alpha &= (-M^{-1} f, 0, 0, \varphi M^{-1/2} z^{-1} \sin^{-1} \theta). \end{aligned} \quad (5)$$

В (4) и (5) использованы обозначения:

$$\varphi = e_0^{(0)}, \quad \psi = e_3^{(3)}, \quad f = \pm \sqrt{\varphi^2 - M} \quad \text{и, кроме того, учтено, что}$$

$$\varphi^2 = M z^{-2} \sin^{-2} \theta \psi^2.$$

Как нетрудно понять, в формулах (4) и (5) осталась неопределенной одна функция — скалярное поле φ . Круговая орбита является геодезической — скалярную функцию φ определяем из уравнения для этой траектории:

$$\frac{\delta u^\beta}{ds} = \frac{dx^\alpha}{ds} \nabla_\alpha u^\beta = e_{(0)}^\alpha \nabla_\alpha e_{(0)}^\beta = 0. \quad (6)$$

Поскольку

$$\nabla_0 e_{(0)}^\beta = \frac{\partial e_{(0)}^\beta}{\partial t} + \Gamma_{0\sigma}^\beta e_{(0)}^\sigma,$$

последнее уравнение записывается в виде

$$e_{(0)}^\rho \Gamma_{0\sigma}^\rho e_{(0)}^\sigma + e_{(0)}^3 \Gamma_{3\sigma}^\beta e_{(0)}^\sigma = 0.$$

Положим $\beta=1$.

Тогда уравнение (6) принимает вид

$$e_{(0)}^\rho \Gamma_{0\rho}^1 e_{(0)}^\rho + e_{(0)}^3 \Gamma_{33}^1 e_{(0)}^3 = 0.$$

Подставляя $e_{(0)}^\rho$ и $e_{(0)}^3$ из (5) и обычные выражения для $\Gamma_{0\rho}^1$ и Γ_{33}^1 , находим

$$\varphi^2 M^{-2} \frac{1}{2} \frac{d}{dz} (1 - \frac{z}{z_0}) + M^{-1} f^2 z^{-2} (-z) = 0.$$

Т.к., согласно (5), $f = \pm \sqrt{\varphi^2 - M}$, то искомое выражение для неизвестной функции φ

$$\varphi^2 = \frac{z}{z_0} \frac{(z - z_0)^2}{2z - 3z_0}. \quad (7)$$

Для f^2 имеем

$$f^2 = \frac{z_0(z - z_0)}{z(2z - 3z_0)}. \quad (8)$$

§ 3. Уравнение девиации

Уравнение девиации дает информацию о движении данной пробной частицы по отношению к ближайшей к ней реперной частице. В нашем случае реперная частица — начало тетрадной координатной системы $z^1 0 z^2 z^3$, которая неизменно связана с зондом. Пробная частица — какая-нибудь точка орбитальной станции. Если обозначим координаты пробной частицы через z^α , $\alpha=1,2,3$, то уравнение девиации в данном случае будет таким:

$$\frac{\delta^2 z^\alpha}{\delta \tau^2} + R^\alpha_{\rho\gamma\delta} e_{(0)}^\beta z^\gamma e_{(0)}^\delta = 0. \quad (9)$$

Легко показать, что $\frac{\delta}{\delta \tau} = \nabla_{(0)}$. Тогда выражение (9) удобнее представить в виде

$$\nabla_{(0)}^2 z^\alpha + R^\alpha_{(0)\beta(\rho)} z^\beta = 0. \quad (10)$$

Так как

$$\nabla_{(0)}^2 z^\alpha = \frac{d^2 z^\alpha}{d\tau^2} + 2\Gamma^\alpha_{m(\rho)} \frac{dz^m}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{n(\rho)} \Gamma^n_{m(\rho)} z^m,$$

то в компактной записи (10) выглядит так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 z^{(1)}}{d\tau} + 2\Gamma^\alpha_{(3)(\rho)} \frac{dz^3}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{(3)(\rho)} \Gamma^\beta_{(1)(\rho)} z^{(1)} + \\ + R^\alpha_{(0)\beta(\rho)} z^\beta = 0, \\ \frac{d^2 z^{(2)}}{d\tau^2} + R^\alpha_{(0)\beta(\rho)} z^\beta = 0, \\ \frac{d^2 z^{(3)}}{d\tau^2} + 2\Gamma^\alpha_{(1)(\rho)} \frac{dz^{(1)}}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{(1)(\rho)} z^{(3)} + \\ + R^\alpha_{(0)\beta(\rho)} z^\beta = 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

§ 4. Определение закона изменения приливных сил при помощи символических расчетов

Уравнения (11) представляют собой систему дифференциальных уравнений для координат $z^1(\tau)$, $z^2(\tau)$ и $z^3(\tau)$ пробной частицы в координатной системе тетрады. Движущими силами являются приливные силы, поэтому из самого вида уравнений (11) можно извлечь законы изменения приливных сил. Для этой цели необходимо сначала найти явный вид тех объектов аффинной связи $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ и компонент тензора Римана $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$, которые входят в (11). Мы решим эту задачу при помощи формул:

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = -e^\alpha_{\rho;\beta} e^\rho_{\gamma} e^\rho_{\delta} \quad (12)$$

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = e^\alpha_{\rho} e^\rho_{\beta} e^\rho_{\gamma} e^\rho_{\delta} R^\alpha_{\rho\gamma\delta}, \quad (13)$$

где $R^\alpha_{\rho\gamma\delta}$ — компоненты обычного тензора Римана.

Вычисления по формулам (12), (13) элементарны, но чрезвычайно громоздки — отсюда не только большая потеря времени, но и возможность появления ошибок. Чтобы проверить эти формулы, мы использовали систему аналитического программирования REDUCE.

При ее помощи была подтверждена верность формул из ^{1,2,3/} для входящих в (II) коэффициентов Ричи $R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ и тетрадных компонент тензора Римана $R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$.

Исходя из (II), легко получить выражения для компонент ψ^{α} , удельных приливных сил, где ($\alpha=1,2,3$)

$$\psi^1 = K_1 \frac{\rho c^2 z^1}{z_0^2}, \quad (I4)$$

$$\psi^2 = K_2 \frac{\rho c^2 z^2}{z_0^2}, \quad (I5)$$

$$\psi^3 = 0, \quad (I6)$$

где ρ - удельная плотность и c - скорость света,

$$K_1 = \frac{3}{\lambda^3} \cdot \frac{\lambda-1}{2\lambda-3}, \quad K_2 = -\frac{1}{\lambda^2(2\lambda-3)} \quad \text{и} \quad \lambda = \frac{z}{z_0}.$$

При $\lambda \gg 1$ и $\lambda \approx 3/2$ эти формулы принимают следующий вид:

$$K_1 = \frac{3}{2\lambda^3}, \quad K_2 = -\frac{1}{2\lambda^3} \quad \text{при} \quad \lambda \gg 1 \quad \text{и}$$

$$K_1 \approx \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{\lambda^{-3/2}}, \quad K_2 \approx -\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{\lambda^{-3/2}} \quad \text{при} \quad \lambda \approx 3/2.$$

Формулы (I4)-(I6) выводились следующим образом из уравнений (II): пусть P - какая-нибудь частица зонда с объемом V , массой $m = \rho V$ и координатами z^1 , z^2 и z^3 . Умножим обе части уравнения (II) на массу $m = \rho V$. Пусть в данный момент $\tau = 0$ освободили P от ее связей (т.е. упругих сил взаимодействия с соседними частицами). Тогда частица будет двигаться под действием приливных сил и величина этих сил в (II) будет задаваться выражением $\rho \frac{d^2 z^{\alpha}}{c^2 dt^2}$, $\alpha = 1, 2, 3$ ($\tau = ct$), которое есть не что иное как масса \times ускорение. Следовательно, если учтем, что $\frac{dz^{\alpha}}{dt} = 0$, $\alpha = 1, 2, 3$, то остальные члены (II) будут соответствовать компонентам ψ^{α} удельных приливных сил, где $\alpha = 1, 2, 3$.

Оценим теперь упругие напряжения в зонде.

Будем рассматривать зонд как упругое тело с характерным размером 2ℓ . Проинтегрируем (I4) по z^1 в пределах от $z^1 = 0$ до $z^1 = \ell$, т.е. от центра тетрады, который выбран так, чтобы приливные силы в нем были равны нулю, до границы тела, где $z^1 = \ell$. Учитывая, что $\int_0^{\ell} \psi^1 dz = \sigma$ - напряжение, вызванное приливными силами, из (I4) получим

$$\sigma_1 = \frac{K_1}{2} \rho c^2 \frac{\ell^2}{z_0^2}, \quad (I8)$$

и, аналогично,

$$\sigma_2 = \frac{K_2}{2} \rho c^2 \frac{\ell^2}{z_0^2}. \quad (I9)$$

При расчете зонда на прочность следовало бы учитывать сложное напряженное состояние. Однако в рамках размерного анализа разумно вести расчеты весьма приближенно, например, на основе большего главного напряжения σ_1 . Тенденции в развитии технологии металлов позволяют надеяться, что в недалеком будущем мы будем располагать конструкционными сталями с прочностями порядка $1/2 \text{ T/mm}^2 \approx 5/$. Поэтому в (I8) положим $\sigma_1 = 500 \text{ кг/мм}^2$. Удельный вес стали $\gamma = \rho g$ как обычно, положим 7800 кг/м^3 . При этих значениях σ_1 и ρ находим, что для зонда с размером ℓ порядка 10 см, который движется по круговой орбите вокруг нейтронной звезды с массой $M \approx M_{\odot}$, минимальное допустимое значение λ - порядка пяти. Другими словами, если зонд попадет на круговую орбиту, радиус которой меньше пяти шварцшильдовских радиусов данной нейтронной звезды, то он разорвется под действием приливных сил. Близкое значение имеют критические радиусы орбит вокруг черных дыр с массами, сравнимыми с массой Солнца. Если масса черной дыры порядка 10^6 масс Солнца (что, вероятно, имеет место в квазарах), то для зондов с теми же значениями σ_1 , ρ и ℓ , значение λ очень близко к $3/2$, т.е. зонд может достаточно приблизиться к фотонной траектории черной дыры.

§ 5. Заключение

Оценка размеров, доступных для экспериментального исследования областей, которая была сделана в предыдущем параграфе, показывает следующее. Для нейтронных звезд и черных дыр с массой порядка одной солнечной массы зонд может приблизиться только на расстояние пяти шварцшильдовских радиусов. Поэтому, хотя измерения при помощи зонда и могут дать несравненно больше информации, чем наблюдение с Земли, исследование самых интересных областей поверхности нейтронной звезды и окрестности горизонта событий необходимо вести косвенно, например, при помощи электромагнитных полей. Если исследуются черные дыры с очень большой массой (черные дыры в шаровых скоплениях, в ядрах галактики, в квазарах), то зонд

может проникнуть глубже - до полутора шварцшильдовских радиусов. Однако такие объекты очень далеки, и для них вряд ли стоит обсуждать возможности экспериментального исследования. Наоборот, экспериментальное исследование окрестностей нейтронных звезд в настоящее время не относится уже к области научной фантастики. На такую мысль наводит нас проект Дедалус^{6/}. Согласно этому проекту, к концу текущего столетия будет запущена атомная ракета к звезде Барнарда, которая находится на расстоянии 6 световых лет от Земли. Двигаясь со скоростью 0,12 скорости света, ракета достигнет звезды за 50 лет. Далее в проекте предусматривается изучение околозвездного пространства, в котором, вероятно, существуют планеты. Эти исследования будут проводиться при помощи зондов. Полученная информация в течение 6-8 лет будет передаваться на Землю. Система Дедалус может действовать на расстоянии не более 10 световых лет. Главный лимитирующий фактор дальности полета - коррозия элементов системы. Поэтому возможное увеличение дальности полета в 10 раз - примерно до 100 световых лет - вряд ли будет неразрешимой технической задачей даже при жизни нашего поколения. Но на таком расстоянии уже находятся нейтронные звезды, поэтому проблема их экспериментального исследования становится актуальной.

Литература

1. Коношова Н.П., УФН, 123, вып.4, стр.537, 1977.
2. Fishbone L., Astrophys. J., 175, L155, 1972;
185, part1, 43, 1973;
195, part1, 499, 1975.
3. Манов С., Недялков И., Попов И., Годичник на Висшите учебни заведения, Техническа физика, 12, книга 2, стр.95, 1975.
4. Hearn A.C., REDUCE - 2 User's Manual, UCP-19, 1973, University of Utah, Salt Lake City.
5. Nutting Jand Kelly P., Mechanisms of the strengthening of steels in: Conference on high strength steels Harrogate, England, May 1962.
6. Daedalus Study Group, Project Daedalus, Spaceflight, 19, No.12, p. 419, 1977.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 мая 1978 года.