СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 11552

В.Н.Стрельцов

ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА ОТНОСИТЕЛЬНО ϵ-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

1978

Р2 - 11552

В.Н.Стрельцов

ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА ОТНОСИТЕЛЬНО ϵ-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Стрельцов В.Н. Р2 - 11552

Об инвариантности уравнения Дирака относительно ϵ -преобразований

Полученные на основе явного учета конвенционального характера определения одновременности разноместных событий преобразования для координат (обобщенные ϵ -преобразования Лоренца) применяются к уравнению Дирака. Показано, что относительно отмеченных преобразований инвариантно видоизмененное уравнение Дирака.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Strel'tsov V.N. P2 - 11552

On Invariance of the Dirac Equation Under ϵ -Transformation

Obtained on the basis of an explicit account of the conventional character of the simultaneity definition for place difference events the transformation for coordinates (the generalized Lorentz ϵ -transformation) was applied to the Dirac equation. It is shown that under this transformation the modified Dirac equation is invariant.

The investigation has been performed at the Laboratory of High Energyes, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, в специальной теории относительности для определения понятия одновременности разноместных событий обычно полагается, что скорость света в любых двух противоположных направлениях одинакова. Зависимость определения одновременности от соглашения о величине скорости света в различных направлениях обусловлена тем, что процедура синхронизации удаленных часов основывается именно на посылке световых сигналов.

По-видимому, Пуанкаре первый обратил внимание на то, что синхронизация удаленных часов является фундаментальной проблемой. При этом он указал /1/, что положение о постоянстве скорости света в различных направлениях является постулатом, без которого нельзя провести измерение этой скорости, и что этот постулат никогда не может быть проверен прямо экспериментом.

Высказывание о том, что скорость света принципиально невозможно измерить без произвольных допущений, а поэтому мы имеем право делать произвольные предположения о скорости света /в противоположных направлениях/, можно найти и у Эйнштейна /2/.

Детально условный, конвенциональный характер понятия одновременности разбирается в лекциях Л.И.Мандельштама /3/.

Упомянем также, что роль соглашения в синхронизации часов особенно подчеркивали философы Рейхенбах /4/ и Грюнбаум /5/.

Мы намеренно коснулись только нескольких работ, затрагивающих проблему определения одновременности, поскольку подробному обсуждению указанной проблемы посвящен целый ряд публикаций /см., например, /6-8/ /.

Здесь мы также хотим заметить следующее. Казалось бы, проблема определения времени в удаленной от данного наблюдателя точке может быть просто решена перенесением часов с бесконечно малой скоростью в указанную точку. Однако очевидно, что введение понятия скорости уже предполагает решенной проблему определения времени /одновременности/ в различных точках пространства. Иными словами, отмеченная процедура не может считаться независимой по отношению к процедуре синхронизации удаленных часов посредством световых сигналов.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОДНОВРЕМЕННОСТИ. ϵ -ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Итак, понятие одновременности в специальной теории относительности определяется с помощью следующего опыта. Наблюдатель /находящийся в некоторой точке A/ посылает в удаленную от него точку B в момент времени t_1 световой сигнал; сигнал отражается в указанной точке B и возвращается назад в A в момент времени t_2. При этом обычно моменту отражения сигнала приписывается время

$$t_B = t_1 + \epsilon(t_2 - t_1), \qquad /I/$$

где $\epsilon = 1/2$. Это значение ϵ соответствует, очевидно, предположению о равенстве скоростей света в противоположных направлениях. В этом заключается простота и удобство традиционного определения одновременности. Однако поскольку непосредственным результатом рассматриваемого опыта являются величины t_1 и t_2, то, казалось бы, мы не можем выделить какое-либо конкретное значение ϵ среди $0<\epsilon<1$ как соответствующее объективной одновременности. Поэтому необходимо выяснить, существуют ли какие-либо причины, исключающие возможность выбора $\epsilon \neq 1/2$.

Как кажется, наиболее естественный путь для решения поставленного вопроса состоит в выводе преобразований для координат /заменяющих преобразования Лоренца/ при условии, что в /I/ ϵ заранее не фиксируется, а может принимать любые значения в указанном интервале $0 < \epsilon < 1$. Применение этих преобразований и должно дать непосредственный ответ на поставленный вопрос.

Указанные преобразования /так называемые обобщенные ϵ - преобразования Лоренца/ рассматривались в ряде работ [9–14]. В простейшем случае движения вдоль оси 0X /со скоростью $v_x = \beta c$ / и при условии, что для всех систем отсчета ϵ одно и то же, они имеют вид:

$$x' = \{[1 + (2\epsilon - 1)\beta]x - \beta ct\}\gamma, \quad y' = y, \quad z' = z,$$
$$t' = \{[1 - (2\epsilon - 1)\beta]t - 4\epsilon(1-\epsilon)(\beta/c)x\}\gamma, \qquad /1/$$

где $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$. /Нетрудно видеть, что для $\epsilon = 1/2$ формулы /1/, действительно, переходят в обычные специальные преобразования Лоренца/.

Как было показано ранее [11], в полном соответствии с утверждением относительно условности понятия одновременности, связанной с возможностью выбора $\epsilon \neq 1/2$ в /I/, уравнения Максвелла, описывающие, в частности, распространение электромагнитных волн - световых сигналов, действительно, инвариантны относительно ϵ - преобразований.

В качестве следующего шага ниже мы применим указанные преобразования к уравнению Дирака. Но прежде мы хотим заметить следующее.

Вообще говоря, рассматриваемый выше опыт может быть использован также /в соответствии с радиолокационным методом измерения расстояний/ для определения расстояния от A до B на основе выражения

$$X_{AB} = c\epsilon_1(t_2 - t_1), \qquad /II/$$

где обычно $\epsilon_1 = 1/2$. Казалось бы, по аналогии с вышеизложенным следует допустить, что в данном выражении /2/ ϵ_1 также не обязательно равно 1/2. Оказывается, однако [15], что в этом случае, соответствующем предположению о возможной анизотропии пространства при $\epsilon_1 \neq 1/2$, нельзя получить преобразований, подобных /1/.

3. ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА ОТНОСИТЕЛЬНО ϵ-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Рассмотрим уравнение Дирака

$$(i\gamma^k \frac{\partial}{\partial x^k} - m)\psi(x) = 0, \qquad /2/$$

где $\hbar = c = 1$; $k = 0,1,2,3$; $x^k = (x^0, x) = (t, x)$; $\psi(x)$ - четырехкомпонентная функция, а

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&-1&0\\ 0&0&0&-1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\ 0&0&1&0\\ 0&-1&0&0\\ -1&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&-i\\ 0&0&i&0\\ 0&i&0&0\\ -i&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 0&0&0&-1\\ -1&0&0&0\\ 0&1&0&0 \end{pmatrix}. \qquad /3/$$

Как было отмечено ранее [15], для того чтобы получить формулы /1/ /для контравариантных величин/, в специальных преобразованиях Лоренца необходимо произвести следующую замену:

$$t_л \to t - \delta x, \qquad /4/$$

где $\delta = 2\epsilon - 1$.

В соответствии с этим в уравнении /2/ ковариантная производная $\partial_1 = \partial/\partial x^1$ должна быть заменена на величину

$$\partial_1 \to \partial_1 + \delta\partial_0 . \qquad /5/$$

С другой стороны, можно сохранить прежнюю форму уравнения /2/, но для матрицы γ^0 использовать следующее выражение:

$$\gamma_\epsilon^0 = \begin{pmatrix} 1&0&0&\delta\\ 0&1&\delta&0\\ 0&-\delta&-1&0\\ -\delta&0&0&-1 \end{pmatrix}. \qquad /6/$$

При непосредственном применении формул /1/ с учетом известных формул преобразований для компонент ψ:

$$\psi'_{1,4} = \gamma_+\psi_{1,4} - \gamma_-\psi_{4,1}, \quad \psi'_{2,3} = \gamma_+\psi_{2,3} - \gamma_-\psi_{3,2},$$

где $\gamma_\pm = [(\gamma \pm 1)/2]^{1/2}$, легко убедиться, что видоизмененное таким образом уравнение Дирака будет, действительно, инвариантно относительно специальных ϵ-преобразований.

В рамках спинорного анализа для уравнения Дирака будем иметь /см., например, [16]/ следующие два выражения:

$$D^{\alpha\dot\beta}\eta_{\dot\beta} = m\xi^\alpha, \qquad /7/$$
$$D^{\dot\alpha\beta}\xi_\beta = m\eta^{\dot\alpha}.$$

Здесь α, $\dot\alpha$, β, $\dot\beta = 1,2$, ξ и η - непунктирный и пунктирный спиноры,

$$\begin{Vmatrix} D^{1\dot1} & D^{1\dot2}\\ D^{2\dot1} & D^{2\dot2} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \partial_0 + \partial_3 & \delta\partial_0 + \partial_1 + i\partial_2\\ \delta\partial_0 + \partial_1 - i\partial_2 & \partial_0 - \partial_3 \end{Vmatrix} \qquad /8/$$

в соответствии с /5/.

Связь ковариантных спиноров $\xi_\alpha, \eta_{\dot\alpha}$ с компонентами волновой функции ψ в /2/ определяется следующими выражениями:

$$\xi_1 = \psi_1 + \psi_3, \quad \xi_2 = \psi_2 + \psi_4, \qquad /9/$$
$$\eta_{\dot1} = i(\psi_4 - \psi_2), \quad \eta_{\dot2} = i(\psi_1 - \psi_3).$$

При этом, например, переход от контравариантных составляющих к ковариантным осуществляется с помощью кососимметричного спинтензора $\epsilon_{\alpha\beta}(\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}})$, у которого

$$\epsilon_{12} = 1 \, (\epsilon_{\dot{1}\dot{2}} = 1) \, . \qquad /10/$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Конвенциональный характер определения одновременности разноместных событий позволяет в формуле /1/, определяющей указанное понятие, не ограничиваться только значением $\epsilon = 1/2$. Соответствующие такому подходу преобразования для координат /обобщенные ϵ-преобразования Лоренца/ переходят при традиционном выборе $\epsilon = 1/2$ в обычные преобразования Лоренца.

Ранее было показано, что уравнения Максвелла-Лоренца инвариантны относительно ϵ-преобразований. Выше мы показали, что отмеченному требованию инвариантности удовлетворяет также видоизмененное уравнение Дирака, переходящее в обычное уравнение Дирака при $\epsilon = 1/2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пуанкаре А. Избранные труды, т. Ш, М., "Наука", 1974, стр. 419.*
2. *Эйнштейн А. Собр. научных трудов, т. 1, М., "Наука", 1965, стр. 175.*
3. *Мандельштам Л.И. Полное собр. научных трудов, т. У, изд. АН СССР, 1950, лекции 8 и 9.*
4. *Рейхенбах Г. Направление времени, М., ИИЛ, 1962, стр. 62.*
5. *Грюнбаум А. Философские проблемы пространства и времени, М., "Прогресс", 1969, стр. 436-465, 527-552.*
6. *Тяпкин А.А. УФН, 1972, 106, стр. 617.*
7. *Mansouri R., Sexl R.U. Gen.Rel.Grav., 1977, 8, p.497.*
8. *Молчанов Ю.Б. Уч. записки Тартуского гос. ун-та, вып. 417, Тарту, 1977, стр. 70.*

9. *Edwards W.F. Amer. J.Phys., 1963, 31, p.482.*
10. *Winnie J.A. Phil.Sci., 1970, 37, p.81 and 223.*
11. *Стрельцов В.Н. ОИЯИ, Р2-6968, Р2-7328, Дубна, 1973.*
12. *Petryszyn H. Prace Nauk. Inst. Mat. Fiz. Teor. Polit. Wrocl., 1973, Nr. 8, p.47.*
13. *Болтянский В.Г. Дифференциальные уравнения, 1974, 10, стр. 2101.*
14. *Beauregard L.A. Found. Phys., 1977, 7, p.769.*
15. *Стрельцов В.Н. ОИЯИ, Р2-11084, Дубна, 1977.*
16. *Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ, ГИТТЛ, М., 1953.*

*Рукопись поступила в издательский отдел
5 мая 1978 года.*