СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 11547

В.П.Гердт, О.В.Тарасов, Д.В.Ширков

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ НА ЭВМ В ФИЗИКЕ И МАТЕМАТИКЕ

1978

P2 - 11547

В.П.Гердт, О.В.Тарасов, Д.В.Ширков

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ НА ЭВМ В ФИЗИКЕ И МАТЕМАТИКЕ

Гердт В.П., Тарасов О.В., Ширков Д.В. Р2 - 11547

Аналитические вычисления на ЭВМ в физике и математике

Дан обзор современного состояния аналитических вычислений на ЭВМ. Рассмотрен ряд программных систем для аналитических вычислений. Наиболее подробно обсуждаются свойства систем SCHOONSCHIP, CLAM, REDUCE-2, SYMBAL, CAMAL, АВТО-АНАЛИТИК, которые внедрены, либо будут внедряться в ОИЯИ, а также системы MACSYMA, являющейся одной из наиболее развитых программных систем для аналитических вычислений. На основе анализа математических операций, реализованных в этих системах, показано, что с их помощью можно решать широкий класс задач физики и математики, и, в частности, задачи квантовой теории поля, небесной механики, общей теории относительности, физики плазмы и т.д. Отдельно рассмотрены задачи, решенные в ОИЯИ с помощью программных систем для аналитических вычислений.

Обзор предназначен для специалистов самых различных областей теоретической физики и математики.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики и Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Gerdt V.P., Tarasov O.V., Shirkov D.V. P2 - 11547

Analytical Calculations Computer in Physics and Mathematics

The review of present status of analytical calculations by computer is given. Some programming systems for analytical computations are considered. Such systems as SCHOONSCHIP, CLAM, REDUCE-2, SYMBAL, CAMAL, АВТО-АНАЛИТИК which are implemented or will be implemented in JINR, and MACSYMA - one of the most developed systems - are discussed. It is shown on the basis of mathematical operations, realized in these systems, that they are appropriated for different problems of theoretical physics and mathematics, for example, for problems of quantum field theory, celestial mechanics, general relativity and so on. One section of this paper is devoted to problems solved in JINR.

The review is intended for specialists in different fields of theoretical physics and mathematics.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics and Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

Введение

Первые успешные попытки реализации на ЭВМ аналитической (не численной) операции – дифференцирования – были предприняты еще четверть века назад [1,2]. Следующий важный шаг в этом направлении – реализация полиномиальной алгебры – потребовал более 10 лет интенсивного развития вычислительной техники, разработки новых нечисленных алгоритмов [3] и создания алгоритмических языков. К последним относятся хорошо известные АЛГОЛ, ФОРТРАН и др., а также менее известные, но более пригодные для аналитических вычислений языки ЛИСП [4] и РЕФАЛ [5]. Начиная с середины шестидесятых годов, был разработан целый ряд программных систем для аналитических вычислений (САВ), предназначенных для решения широкого класса задач физики и математики.

Тем не менее, когда речь заходит о том, что ЭВМ способна производить не только численные, но и аналитические выкладки, многим это кажется крайне удивительным. Такое удивление обусловлено, с одной стороны, привычкой рассматривать ЭВМ как инструмент сугубо численных расчетов, а с другой – отсутствием необходимой информации в нашей литературе.

Хорошо известно, что в алгоритмических языках численного программирования, таких, например, как АЛГОЛ и ФОРТРАН, все используемые символы служат для обозначения некоторых чисел, и результат вычисления также является числом.

В то же время САВ позволяют аналитически выполнять такие операции, как дифференцирование, упрощение выражений (приведение подобных членов), подставлять вместо символа или выражения другое выражение и т.д. В итоге (и это особенно важно!) результат вычисления представляет собой некоторое аналитическое выражение, например, функцию с явной зависимостью ее от аргументов, заданных определенными символами.

Разумеется, ЭВМ может помочь только тогда, когда процедура нахождения решения достаточно ясна, т.е. известен четкий алгоритм построения нужного решения. По существу, САВ можно рассматривать как мощный и практически единственный инструмент решения следующих двух типов задач:

1) требующих непомерно больших затрат ручного труда,

2) очень чувствительных к потере точности при численном решении.

К задачам первого типа относится, например, задача обращения матриц достаточно высокого порядка, элементы которой являются символами или алгебраическими выражениями.

Важный пример задачи второго типа привел в своем обзоре Херн /6/. Условие стабильности плазмы в установке типа "Токамак" сводится к условию существования нуля некоторой функции в заданной области. Положение этого нуля очень чувствительно к потере точности в промежуточных вычислениях. Поэтому затрата нескольких часов машинного времени на самых мощных современных ЭВМ дает лишь минимально необходимую степень уверенности в правильности полученного результата. В то же время с помощью САВ проблема полностью решается за несколько минут.

Общие характеристики САВ

В отличие от численных программ, САВ требуют значительно большего объема центральной памяти ЭВМ (десятки, а то и сотни тысяч машинных слов). Это обусловлено характером используемых нечисленных алгоритмов и необходимостью сохранять в памяти все промежуточные результаты, которые, как правило, сильно

"разбухают" в процессе счета. Поэтому наиболее мощные САВ реализованы на больших ЭВМ, таких как IBM - 360/370, CDC-6000/7000, PDP-10 и др. Как пример САВ, реализованной на малой ЭВМ, можно привести систему АНАЛИТИК /7/ для машин серии "Мир", разработанную в СССР. Несмотря на гибкость и применимость системы АНАЛИТИК к самым разным задачам, ее возможности ограничиваются сравнительно небольшими по объему выкладок задачами.

Все имеющиеся САВ можно условно разделить на две большие группы:

1) Специализированные - ориентированные на определенную область применения. Для таких систем характерно сравнительно небольшое число встроенных операций, высокое быстродействие и относительно небольшие требования к объему центральной памяти ЭВМ.

2) Универсальные - с большим числом встроенных возможностей и поэтому, как правило, требующие большого объема центральной памяти и высоких временных затрат по сравнению со специализированными САВ.

Следует подчеркнуть, что многие из специализированных САВ написаны на языке низшего уровня (язык Ассемблера), представляющего собой символьную форму машинных команд, что и обеспечивает, во многом, их компактность и быстродействие.

В то же время самые мощные из универсальных САВ написаны на языке ЛИСП. Это не только обусловливает их широкие возможности, но, что особенно важно, позволяет пользователю расширять их в случае необходимости.

ЛИСП, однако, требует сравнительно большого машинного времени на выполнение отдельных операций, что приводит к относительной "медленности" счета с помощью универсальных систем, написанных на ЛИСПе.

К специализированным САВ можно отнести, например, системы: SCHOONSCHIP /8/ и ASHMEDAI /9/ - предназначенные для выполнения стандартных выкладок в квантовой теории поля; CAMAL /10/ - для небесной механики и общей теории относительности (ОТО); CLAM /11/ и SHEEP /12/ - для вычислений в ОТО; АВТО-АНАЛИТИК /13/ -

для решения некоторых задач математической физики, разработанная в НИИ прикладной математики и механики при Томском государственном университете и реализована на ЭВМ БЭСМ-6.

Наиболее яркими представителями универсальных систем являются написанные на ЛИСПе системы REDUCE-2 /14/, MACSYMA /15/ и SCRATCHPAD /16/, причем две последние являются самыми развитыми и мощными из существующих САВ. К универсальным САВ можно, пожалуй, отнести и некоторые другие системы, например, SYMBAL /17/, ALTRAN /18/ и АНАЛИТИК /7/, имеющие относительно небольшое, но применимое к широкому классу задач число встроенных возможностей.

Важно подчеркнуть, что рассмотренная выше классификация САВ основана именно на встроенных в них возможностях. При некоторых усилиях со стороны пользователя специализированные САВ могут в ряде случаев с успехом применяться для решения задач, лежащих далеко вне области их специализации. Это возможно, главным образом, благодаря мощному аппарату подстановок, присущему всем САВ. В качестве простейшего примера приведем подстановку

$$x^N \to Nx^{N-1},$$

позволяющую продифференцировать любой полином по x. Прекрасной иллюстрацией этого важного свойства САВ могут служить также примеры использования системы SCHOONSCHIP в ОИЯИ, содержащиеся в заключительном разделе настоящей статьи.

Некоторые применения САВ

Анализу САВ и их применениям в различных областях физики и математики посвящено немало обзорных работ /6, 19–26/. Поэтому ниже мы выделим лишь наиболее яркие результаты.

Исторически сложилось так, что три области применения привлекли наибольшее внимание разработчиков САВ: небесная механика, общая теория относительности

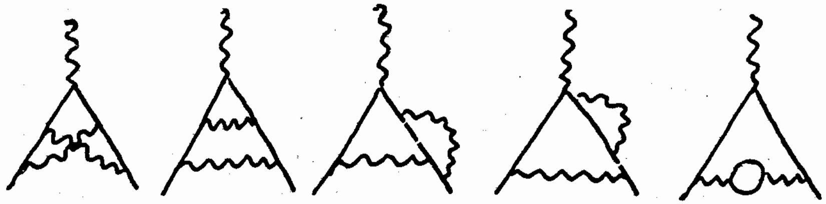
и квантовая теория поля (квантовая электродинамика). Такой интерес был обусловлен структурой аналитических выкладок в этих важных областях физики, которые сочетают исключительную громоздкость выкладок со сравнительно небольшим количеством требуемых аналитических операций. Интерес к небесной механике подогревался также желанием проверить результаты, полученные еще в середине прошлого столетия в монументальной работе Делонэ /27/. Автор этой работы вычислил координаты движения Луны в седьмом порядке по малым величинам, таким, как эксцентриситеты ϵ и ϵ' лунной и земной орбит, отношение a/a' средних расстояний Земли до Луны и до Солнца и т.д. Сам Делонэ потратил на это 20 лет, причем, по оценкам двадцатилетней давности /28/, необходимо было затратить 200 человеко-лет программирования для воспроизведения его результатов на ЭВМ. К счастью, эти пессимистические прогнозы оказались явно несостоятельными, и в 1970 году группа авторов /29/, состоящая всего лишь из трех человек, в течение года воспроизвела результаты Делонэ с помощью САВ, разработанной одним из этих авторов – Ромом /30/. Примечательно, что в труде Делонэ /27/, содержащем около 40 тыс. итоговых формул, обнаружена всего одна (!) ошибка.

Другим примером плодотворности применения САВ явились вычисления в квантовой электродинамике такой важной физической величины, как аномальный момент электрона в шестом порядке теории возмущений /31/:

$$a_2 = a_2^{(2)}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right) + a_2^{(4)}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + a_2^{(6)}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 + \dots .$$

Величина $a_2^{(2)}$, определяемая одной диаграммой Фейнмана

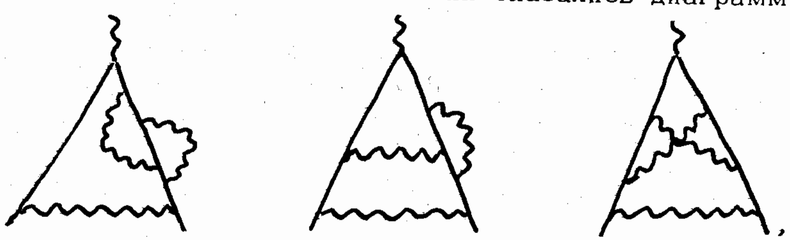
равна $a_2^{(2)} = 1/2$ и была вычислена в 1947 году Швингером /32/. Для вычисления следующего порядка теории возмущений потребовался учет пяти различных диаграмм



Полный их вклад в a_2 был вычислен спустя десять лет после Швингера Петерманом[33] и Зоммерфельдом[34]

$$a_2^{(4)} = \frac{197}{144} + \frac{\pi^2}{12} - \pi^2 \ln 2 + \frac{3}{4}\zeta(3),$$

где $\zeta(3) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$. Аналитическое вычисление $a_2^{(6)}$ практически уже невозможно выполнить вручную из-за непомерно длинных вычислений. Прогресс в этом направлении был достигнут лишь в последние годы благодаря применению САВ и, в первую очередь, ASHMEDAI[8]. В результате на сегодняшний день из 40 различных диаграмм, определяющих $a_2^{(6)}$, удалось до конца вычислить аналитически вклад от 27 диаграмм. Причем наиболее сложными из них для вычислений оказались диаграммы



которые в промежуточной стадии расчета содержали до 24 000 слагаемых[35] и потребовали каждая около 150 мин. счетного времени на ЭВМ UNIVAC-1108.

Для остальных 13 диаграмм, дающих вклад в $a_2^{(6)}$, часть выкладок была восполнена с помощью САВ, а оставшаяся часть вычислений (интегрирование) выполнялась обычным численным образом.

В результате[31] полный вклад в a_2 оказался в блестящем согласии с недавними прецизионными измерениями[36] аномального магнитного момента электрона, точность которых $0{,}2 \cdot 10^{-9}$.

Как иллюстрацию возможностей САВ в общей теории относительности рассмотрим вычисление на основе системы CLAM стандартных величин $g^{\mu\nu}$, $\Gamma^{\mu}_{\cdot\nu\sigma}$, $R_{\mu\nu\sigma\rho}$, $R_{\mu\nu}$, $T_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$ для метрики

$$ds^2 = (V\frac{e^{2\beta}}{r} - U^2 r^2 e^{2\gamma})\, du^2 + 2e^{2\beta} du\, dr +$$

$$+ 2Ur^2 e^{2\gamma} du\, d\theta - r^2 (e^{2\gamma} d\theta^2 + e^{-2\gamma} \sin^2\theta\, d\phi^2),$$

где U, V, β и γ – функции переменных u, r и θ. Данная метрика была предложена в работе Бонди и др.[37] при анализе гравитационного излучения вращающейся звезды и была использована в работе[24] для сравнения возможностей ряда САВ.

Вычисление всех указанных величин для метрики Бонди требует всего 32 с. на ЭВМ CDC-6500 при чрезвычайно компактной программе вычислений (см. <u>Приложение</u>) в системе CLAM.

Конечно, сферы применения САВ далеко не исчерпываются рассмотренными выше областями теоретической физики. К настоящему времени опубликовано несколько сот работ по применению ЭВМ для аналитических вычислений в самых различных областях естествознания. В дополнение к материалу обзорных работ[6,19–26] отметим, например, применение САВ в физике плазмы[38], теории атомного ядра[39], гидродинамике[40], геофизике[41], кристаллофизике[42], нелинейной оптике[43], аэродинамике[44] и т.д.

Разумеется, САВ являются мощным инструментом решения и чисто математических задач. Выделим, в частности, применение этих систем для решения дифференциальных[45], интегральных[46] и разностных[47] уравнений, теории коммутативных колец[48], а также многочисленные приложения в теории групп[49].

Хорошее представление о других областях применения САВ может дать знакомство с материалами ссылок[49–50].

В заключение данного раздела подчеркнем, что даже при отсутствии аналитических методов решения какойлибо задачи, аналитические выкладки могут оказаться крайне полезными в совокупности с обычными численными методами. В качестве примера приведем работу [51],где рассматривалось решение линейных дифференциальных уравнений в частных производных типа уравнения теплопроводности.

САВ в ОИЯИ

Первой САВ в ОИЯИ стала система SCHOONSCHIP, внедренная в конце 1975 года. В 1977 году была внедрена система CLAM. В настоящее время внедряется REDUCE-2 и в ближайшем будущем предполагается внедрение систем SYMBAL, CAMAL и АВТО-АНАЛИТИК. Наиболее общие свойства этих систем, а также встроенные (реализованные в них) математические объекты и операции над ними суммированы в табл. 1 и 2. Для сравнения в последней колонке каждой таблицы приведены соответствующие параметры системы MACSYMA [15], являющейся, наряду с системой SCRATCHPAD [16], самой мощной из существующих САВ. Из общих свойств (см. табл. 1) выделим имеющийся в системах SCHOONSCHIP и REDUCE-2 диалоговый (интерактивный) режим работы. Работая в таком режиме, пользователь может контролировать промежуточные результаты и тем самым резко повысить эффективность решения широкого класса задач. Среди встроенных возможностей САВ (табл. 2) нами не указаны:

1. Полиномиальная алгебра.
2. Упрощение выражений (приведение подобных членов).
3. Аппарат подстановок,

присущие всем современным системам. При этом, как уже отмечалось выше, подстановки позволяют в отдельных случаях существенно расширить возможности системы по отношению к встроенным операциям.

Из отдельных операций, приведенных в табл. 2, выделим имеющуюся в системах REDUCE-2 и MACSYMA процедуру нахождения наибольшего общего делителя двух полиномов, позволяющую производить упрощение дробно-

рациональных выражений. Еще более важной проблемой является аналитическое интегрирование с помощью САВ. В классе элементарных функций данная проблема решена, например, в системе MACSYMA [52а]. Решение опирается на фундаментальную работу Риша [52б], в которой предложен универсальный алгоритм интегрирования. Алгоритм Риша, во-первых, дает ответ на вопрос, выражается ли интеграл через элементарные функции, и, во-вторых, при положительном ответе позволяет взять данный интеграл. Другой привлекательной особенностью алгоритма Риша является возможность его реализации на современных ЭВМ, что и сделано в системах MACSYMA и SCRATCHPAD. Вообще же содержащаяся в табл. 2 информация далеко не исчерпывает всех возможностей системы MACSYMA, в которую встроена процедура вычисления широкого класса определенных интегралов, ряд специальных функций, прямое и обратное преобразования Лапласа и многое другое [15,50].

Из шести систем, составляющих ближайшую перспективу использования САВ в ОИЯИ, наиболее развитой является, несомненно, REDUCE-2. Обладая богатыми исходными возможностями (табл. 2), REDUCE-2, позволяет пользователю средствами внешнего языка определять новые объекты и (или) новые математические операции. Это особенно привлекательное свойство системы REDUCE-2 служит источником ее постоянного развития. Главным же ее недостатком является сравнительно низкое быстродействие. Поэтому для громоздких выкладок целесообразно использовать, если это возможно, более "быстрые системы", такие, как SCHOONSCHIP, SYMBAL и др.

Важно отметить, что лежащая в основе системы REDUCE-2 версия языка ЛИСП [53] может служить независимым инструментом для аналитических вычислений. Яркой иллюстрацией этому могут служить написанные непосредственно на ЛИСПе программы генерации диаграмм Фейнмана в квантовой электродинамике [54] и кинематического анализа процесса взаимодействия любого числа частиц с произвольным спином [55].

Таблица I

Общие свойства программных систем для аналитических вычислений

САВ:	SCHOON-SCHIP	CLAM	REDUCE-2	SYMBAL	CAMAL	АВТО-АНАЛИТИК	MACSYMA
ЭВМ	CDC-6500	CDC-6500	CDC-6500 ЕС-I040	CDC-6500	ЕС-I040	БЭСМ-6	PDP-10
Внедрение в ОИЯИ	внедрена	внедрена	внедряется	будет внедрена	будет внедряться	будет внедряться	
Язык реализации	Ассемблер	Ассемблер	ЛИСП	Ассемблер	Ассемблер	Машинный код	ЛИСП
Тип внешнего языка	xx	ЛИСП	АЛГОЛ	АЛГОЛ	xx	xx	АЛГОЛ
Диалоговый режим	есть	нет	есть	нет	нет	нет	есть
Область основных применений	КТП[x]	ОТО[x]	Унив.[x]	Унив.	НМ[x] и ОТО	МФ[x]	Унив.

[x] КТП - квантовая теория поля; ОТО - общая теория относительности; НМ - небесная механика; МФ - математическая физика; Унив. - универсальная.

[xx] Специальный язык данной системы.

Таблица 2

Встроенные математические объекты и операции над ними в различных САВ

САВ:	SCHOON-SCHIP	CLAM	REDUCE-2	SYMBAL	CAMAL	АВТО-АНАЛИТИК	MACSYMA
Элементарные функции	нет	большинство	некоторые	нет	большинство	большинство	все
Дробно-рациональные выражения	нет	есть	есть	есть	есть	нет	есть
Поиск наибольшего общего делителя	нет	нет	есть	нет	в простых случаях	нет	есть
Дифференцирование	нет	есть	есть	есть	есть	есть	есть
Интегрирование	нет	нет	нет	в простых случаях	в простых случаях	в простых случаях	есть
Комплексные величины	есть	нет	есть	есть	есть	нет	есть
Рациональные числа	есть	есть	есть	есть	есть	нет	есть
Арифметика чисел с плавающей запятой	очень быстрая	нет	медленная	нет	очень быстрая	быстрая	быстрая
Работа с отрезками степенных рядов	нет	нет	неплохая	отличная	хорошая	нет	отличная
Работа с отрезками рядов Фурье	нет	нет	нет	нет	отличная	нет	хорошая
Алгебра векторов и тензоров	неплохая	специального вида	хорошая	неплохая	неплохая	нет	отличная
Метричная алгебра	нет	нет	хорошая	неплохая	нет	неплохая	отличная
Алгебра γ-матриц и спиноров	отличная	нет	хорошая	нет	нет	нет	нет
Некоммутативная алгебра	хорошая	нет	неплохая	нет	нет	неплохая	отличная

Применение САВ в ОИЯИ для решения задач теоретической физики

В ОИЯИ использование ЭВМ для аналитических выкладок началось с 1976 года, после внедрения системы SCHOONSCHIP. За два года был решен целый ряд задач, в основном из области квантовой теории поля и ядерной физики. Самые громоздкие были связаны с вычислением фейнмановских диаграмм. Был проведен расчет двухпетлевых диаграмм в теории поля Янга-Миллса[56], однопетлевых диаграмм в гравитации[57] и радиационных поправок низшего порядка к процессам рассеяния точечных частиц со спинами 0 и 1/2[58].

При расчете диаграмм в теории поля Янга-Миллса машине задавались правила Фейнмана и диаграмма в виде произведения вершин и пропагаторов. Далее ЭВМ перемножала пропагаторы и вершины, производила свертки по лоренцовым индексам, приводила подобные члены, и полученное выражение преобразовывала к виду, удобному для интегрирования. Интегрирование проводилось с помощью подстановок по заданным формулам. Полученный результат, выраженный через Γ -функции Эйлера, разлагался в ряд Лорана по малому параметру. Подынтегральные выражения, соответствующие фейнмановским диаграммам, получались довольно громоздкими: несколько десятков тысяч членов. После приведения подобных членов выражения значительно упрощались. Число различных интегралов, получившихся после этого, было около 200. Для их счета использовалось шесть общих формул. Для расчета всех 33 диаграмм потребовалось 84 мин. счетного времени на ЭВМ CDC-6400.

В однопетлевых расчетах в гравитации[57] ЭВМ выполняла в основном те же операции, что и при расчете янг-миллсовских диаграмм. Различие состояло в получении выражения для гравитационной вершины и использовании символов Кристоффеля. Все вычисления потребовали около 10 мин. счетного времени. Программирование однопетлевых расчетов заняло около 3 дней, тогда как составление программ для двухпетлевых расчетов в теории поля Янга-Миллса - полтора месяца.

При вычислении радиационных поправок низшего порядка к процессам рассеяния частиц со спинами 0 и 1/2[58] операции, производимые ЭВМ, были почти такие же, как и в рассмотренных выше примерах. Дополнительно к ним, после перемножения пропагаторов и вершин ЭВМ разлагала произведения матриц Дирака по полной системе из 16 матриц и брала шпуры от произведений этих матриц. На расчеты было затрачено 5 мин. счетного времени ЭВМ CDC-6400.

Одной из самых громоздких задач квантовой теории поля является построение конечных интегралов, соответствующих диаграммам, т.е. выполнение R-операции[59]. Для скалярных теорий была составлена программа[60], которая строит перенормированные коэффициентные функции в виде интегралов по фейнмановским параметрам. На входе программы задается диаграмма в виде произведения вершин и соединяющих их линий. Затем производится выявление расходящихся подграфов и построение подынтегральных выражений как для самого графа, так и для графов, получающихся после устранения расходящихся подграфов. Эта программа может быть использована для вычисления диаграмм вплоть до 9-го порядка включительно. Кроме перечисленных выше, был решен еще целый ряд довольно громоздких задач вспомогательного характера: расчет определителей 8-го порядка с аналитическими элементами, разложения произведений σ матриц по полной системе и взятие шпуров, нахождение коэффициентов разложения решения уравнения Шредингера с заданным потенциалом по синусам и косинусам и т.д. Все указанные задачи были решены с помощью системы SCHOONSCHIP. Совсем недавно решена задача по нахождению приливных сил в поле тяготения черной дыры[61]. При решении этой задачи была использована система REDUCE-2.

Мы привели далеко не полный список уже решенных задач, тем не менее, видно, насколько широк диапазон применения имеющихся у нас САВ.

В заключение авторы выражают благодарность Н.Н.Говоруну, В.А.Мещерякову, В.А.Ростовцеву, Р.Н.Фе-

доровой и В.П.Ширикову за полезные обсуждения и ценные замечания, а также С.Ю.Славянову за консультации по системе SYMBAL.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Примеры программ и распечатки результатов вычислений для некоторых САВ

1. Полный текст программы и распечатка некоторых символов Кристоффеля $\Gamma^{\mu}_{\cdot\nu\sigma}$, а также одной из компонент тензора кривизны $R_{\mu\nu\sigma\rho}$ для метрики Бонди и др. /37/ (см. стр. 9) в системе CLAM.

```
BONDIS METRIC
VARIABLES (T R E P)
FUNCTION (U (T R E))
FUNCTION (V (T R E))
FUNCTION (B (T R E))
FUNCTION (G (T R E))
METRIC (((+ (* V (** R (- (1 1))) (EXP (* (2 1) B))) (- (* (** U (2 1))
(** R (2 1)) (EXP (* (2 1) G))))) (EXP (* (2 1) B)) (* U (** R (2 1))
(EXP (* (2 1) G))) 0 0 0 0 (- (* (** R (2 1)) (EXP (* (2 1) G)))) 0
(- (* (** R (2 1)) (EXP (- (* (2 1) G))) (** (SIN E) (2 1)))))
STOP)))))
```

$$GAM^{0}{}_{22} = R^{2}E^{2G-2B}G_{1} + RE^{2G-2B}$$

$$GAM^{0}{}_{23} = 0$$

$$GAM^{0}{}_{33} = RSIN^{2}(E)\,E^{-2B-2G} - R^{2}\,SIN^{2}(E)\,E^{-2B-2G}G_{1}$$

$$R_{1212} = 2RE^{2G}G_{1} + R^{2}G_{1}^{2}E^{2G} + R^{2}E^{2G}G_{11} - 2RE^{2G}B_{1} - 2R^{2}E^{2G}B_{1}G_{1}$$

Исходная метрика $g_{\mu\nu}$ задается в инструкции METRIC, которая одновременно является командой для вычисления и распечатки величин $g^{\mu\nu}$, $\Gamma^{\mu}_{\cdot\nu\sigma}$, $R_{\mu\nu\sigma\rho}$, $R_{\mu\nu}$, $T_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu}$.

2. Вычисление определителя 3-го порядка с помощью системы "SCHOONSCHIP". Вычисление ведется по формуле:

$$\det = a_{1i}\, a_{2j}\, a_{3k} \cdot \epsilon_{ijk}$$

(ϵ_{ijk} – полностью антисимметричный тензор).

```
PRINT NLIST
PRINT NSTAT
F A
Z DET3=DS(J,1,3,(DS(K,1,3,(DS(L,1,3,(A(1,J)*A(2,K)*
  A(3,L)*DP(J,K,L)))))))
*END
```

```
DET3 =
 + A(1,1)*A(2,2)*A(3,3)

 - A(1,1)*A(2,3)*A(3,2)

 - A(1,2)*A(2,1)*A(3,3)

 + A(1,2)*A(2,3)*A(3,1)

 + A(1,3)*A(2,1)*A(3,2)

 - A(1,3)*A(2,2)*A(3,1)  + 0.
```

3. Вычисление полиномов Лежандра с помощью системы REDUCE-2. Для вычислений использована формула

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$$

```
ARRAY P(3);

FOR I%=1%3 DO BEGIN P(I)%=(X**2-1)**I;
FOR J%=1%I DO P(I)%=DF(P(I),X)/(2*J);
WRITE P(,I,) = ,P(I) END;

P(1) = X

P(2) = (3*X^2 -1)/2

P(3) = (X*(5*X^2 - 3))/2

END;
```

ЛИТЕРАТУРА

1. Kahrimanian H.G. Analytical Differentiation by a Digital Computer, M.A.Diss, Temple Univ., Philadelphia, MA, 1953.
2. Nolan J. Analytical Differentiation on a Digital Computer, M.A.Diss, MIT, Cambridge, MA, 1953.
3. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ, т.2, "Мир", М., 1977.
4. Маурер У. Введение в программирование на языке ЛИСП. "Мир", М., 1976.
5. Турчин В.Ф. "Кибернетика", 1968, 4, с.45; Красовский А.Г. и др. РЕФАЛ, ч.1, Описание языка и приемы программирования.Уч.пособие,Изд. МИФИ,М.,1977.
6. Hearn A.C. Algebraic Manipulation by Computer: В трудах межд. совещ. по программированию и математическим методам решения физических задач. (Дубна, 20-23 сент., 1977 г.).ОИЯИ, Д10,11-11264, Дубна, 1978.
7. Глушков В.М. и др. Кибернетика, 1971, 3, с.102; Korpela J. SIGSAM Bulletin, ACM, New York, No. 39, 30, 1976.
8. Strubbe H. Comp. Phys.Comm., 1974, 8, p.1.
9. Perisho R.C. ASHMEDAI User's Guide, U.S.A.E.C. Rep. No. COO-3066-44, 1975.
10. Fitch J. CAMAL User's Manual. Univ. of Cambridge, Computer Laboratory, 1975.
11. D'Inverno R.A., Russel-Clark R.A. The CLAM Programmer's Manual. Part 1, King's College, London,1971; Part 2, Univ. of Cambridge Computer Laboratory, 1972.
12. Frick I. SHEEP User's guide. USIP Report 77-15, Univ. of Stockholm, 1977.
13. Арайс Е.А., Сибиряков Г.В. АВТО-АНАЛИТИК. Новосибирск, изд-во НГУ, 1973.
14. Hearn A.C. REDUCE User's Manual. Second Edition, Univ. of Utah, 1973.
15. Bogen R. e.a. MACSYMA Reference Manual: Project MAC, MIT, Cambridge, MA, 1975.
16. Griesmer J.H. e.a. SCRATCHPAD User's Manual. IBM Research Report RA-70, 1975.
17. Engeli M. SIGSAM Bulletin, ACM, New York, No. 36, 21, 1975.
18. Brown W.S. ALTRAN User's Manual. Third Edition, Bell Lab., 1973.
19. Barton D., Fitch J.P. Rep.Prog.Phys., 1972, 35, p.235.
20. Hearn A.C. Computer Solution of Symbolic Problems in Theoretical Physics. In: Computing as a Language of Physics, IAEA, Vienna, 1972, p.567.
21. Sundblad Y. A User's Review of Algebraic Systems. In: Proc. of the Third International Colloquim on Advanced Computing Methods in Theor.Phys., Marseille, June 25-29, 1973, v.1.
22. Campbell J.A. Acta Phys. Austriaca Suppl., 1974, XIII, p.595.
23. Sundblad Y. SIGSAM Bulletin, ACM, New York, 1974, No. 31, p.1.
24. Cohen H.I. e.a. Gen.Rel.Grav., 1976, 7, p.269.
25. Hearn A.C. Symbolic Computation. In: Proc. of the 1976 CERN School of Computing, La Grande Motte, France, 12-25 September, 1976, p.201.

26. Гердт В.П. О применении систем аналитических преобразований на ЭВМ для вычисления интегралов Фейнмана (обзор). В Трудах межд. совещ. по программированию и математическим методам решения физических задач. Дубна, 20-23 сент., 1977; ОИЯИ, Д10,11-11264, Дубна, 1978.
27. Delaynay C. Theorie du Mouvement de la Lune (Extraits des Mem. Acad. Sci.), Mallet-Bachelier, Paris, 1860.
28. Davis M.S. Astr. J., 1958, 63, p. 462.
29. Deprit A. e.a. Science, 1970, 168, p.1569.
30. Rom A. Celestial Mech., 1969, 1, p.301.
31. Levine M.J. e.a. g_e-2: The Current Status. Talk presented at the Fourth International Colloquim on Advanced Computing Methods in Theor.Phys., St. Maximin, France, March 21-23, 1977.
32. Schwinger J. Phys.Rev., 1948, 73, p.416; Phys.Rev., 1949, 76, p.790.
33. Peterman A. Helv. Phys.Acta, 1957, 30, p.407.
34. Sommerfield C. Ann.Phys. (N.Y.), 1958, 5, p.26.
35. Levine M.J. e.a. Phys.Rev., 1976, D13, p.997.
36. Van Dyck R.S. e.a. Phys.Rev.Lett., 1977, 38, p.310.
37. Bondi H. e.a. Proc. R.Soc., 1962, A269, p.21.
38. Kulp J.L. e.a. New Capabilities for Symbolic Computation in Plasma Physics, In: Proc. of the Sixth Conf. on Numerical Simulation of Plasmas, Univ. of California at Berkeley, 1973.
39. Rudnicki-Bujnowski G. Comp.Phys.Comm., 1975, 10, p.245.
40. Atherton R.W., Homsy G.M. J.Comp.Phys., 1973, 13, p.45.
41. Hanson J.N. J.Geoph.Research, 1973, 70, p.3260.
42. Head R. Projective Representations for Energy Band Calculations: in Ref. 49.
43. Kong J.A. Optics of Bianisotropic Media, In: Proc. of Optical Society of America, Washington, DC,April, 1974.

44. Howard J.C. The Transformation of Aerodynamic Stability Derivatives by Symbolic Mathematical Computation. The Aeronautical Quartely, vol.XXVI, May, 1975.
45. Norman A.C. Comp.J., 1975, 19, No. 1, p.63.
46. Stoutemyer D.R. ACM Trans. on Math.Software, 1977, 3, No.2, p.128.
47. Ivie J. Some MACSYMA Programs for Solving Difference Equations: in Ref. 50.
48. Spear D.A. A Constructive Approach to Commutative Ring Theory: in Ref. 50.
49. Proc. of the 1976 ACM Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. Yorktown Heights, New York, August 10-12, 1976.
50. Proc. of the 1977 MACSYMA User's Conference. Univ. of California, Berkeley, California, July 27-29, 1977.
51. Ulery D.L., Khalil H.M. Symbolic/Numeric Algorithms for Partial Differential Equations: in Ref. 49.
52. a. Moses J. Comm.ACM, 1971, 14, p.548.
b. Risch R. Trans.Amer.Math.Soc., 1969, 139, p.167.
53. Ростовцев В.А. Система программирования LISP на CDC-6500. В Трудах Межд.совещания по программированию и математическим методам решения физ. задач. Дубна, 20-23 сент., 1977. ОИЯИ, Д10,11-11264, Дубна, 1978.
54. Sasaki T. J.Comp.Phys., 1976, 22, p.189.
55. Frick I. ELKIN, a Computer Program for Kinematic Calculation of Interactions among Arbitrary Number of Particles with Arbitrary Spin. USIP Report 77-13, Univ. of Stockholm, 1977.
56. Владимиров А.А.,Тарасов О.В. ЯФ,1977,25,с.1104.
57. Kallosch R.E., Tarasov O.V., Tyutin I.V. Lebedev Phys.Int. Prepr. No. 185, 1977.
58. Бардин Д.Ю., Федоренко О.М., Шумейко Н.М. ОИЯИ, Р2-10114, Дубна, 1976.
59. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. "Наука", М., 1976.

60. Тарасов О.В. ОИЯИ, Е2-11573, Дубна, 1978.
61. Жидкова И.Е., Недялков И.П., Ростовцев В.А. ОИЯИ, Р2-11589, Дубна, 1978.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 мая 1978 года.