ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P2 - 11524

Р.Бартель, Д.Робашик

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЕЗЕРА-ГИЛЬБЕРТА-СУДАРШАНА

1978

P2 - 11524

Р.Бартель, Д.Робашик

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЕЗЕРА-ГИЛЬБЕРТА-СУДАРШАНА

Направлено в ТМФ

Бартель Р., Робашик Д. P2 - 11524

О существовании представления Дезера-Гильберта-Сударшана

На основе представления Йоста-Лемана для одночастичного матричного элемента коммутатора токов $\langle p|[j(x), j(0)]|p\rangle = \epsilon(x_0)\hat{C}(x^2, x_0)$ изучается существование представления Дезера-Гильберта-Сударшана (ДГС). При использовании аналитических и функциональных свойств этого матричного элемента доказывается, что спектральная функция для представления ДГС существует в обычном смысле тогда и только тогда, когда $\hat{C}(x^2, x_0) \in S'(\bar{R}_+ \times R)$. В общем случае спектральная функция является элементом более сложного пространства $\Phi'_{I_0 B}$. Важным свойством при этом является расширение носителя спектральной функции. Дать простое описание пространства $\Phi'_{I_0 B}$ не удается.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Bartel R., Robaschik D. P2 - 11524

On the Existence of the Deser-Gilbert-Sudarshan Representation

Starting from the Jost-Lehman representation for the special one particle matrix element $\langle p|[j(x), j(0)]|p\rangle = \epsilon(x_0^0)\hat{C}(x^2, x_0)$ the existence of the Deser-Gilbert-Sudarshan representation is investigated. Exploiting analytic and functional properties of this matrix element it is shown, that the DGS-spectral function exists in the usual sense if and only if $\hat{C}(x^2, x_0) \in S'(\bar{R}_+ \times R)$. In general this spectral function belongs to a more complicated space $\Phi'_{I_0 B}$. An important feature of this spectral functions is an extension of the support to negative values of λ^2. An outstanding problem is a simple and direct description of the space $\Phi_{I_0 B}$.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

1. ВВЕДЕНИЕ

Цель настоящей работы - исследовать представление Дезера-Гильберта-Сударшана /ДГС/ /1/, которое доказано в приближении теории возмущений /2/, в рамках общих принципов квантовой теории поля. Для простоты ограничимся рассмотрением представления ДГС для матричного элемента

$$C(x) = \langle p|[j(\frac{x}{2}), j(-\frac{x}{2})]|p\rangle, \qquad /1.1/$$

где $j(x)$ - скалярный оператор тока и $|p\rangle$ - одночастичное состояние с четырехимпульсом $p = (1,\vec{0})$. Из общих принципов квантовой теории поля - релятивистской инвариантности, существования полной системы состояний с положительной энергией, микропричинности - и из предположения умеренного роста функций $C(x)$ вытекает следующее определение.

Определение 1. Обобщенная функция $C(x)$ называется допустимым матричным элементом, если

$$C(x) = -C(-x), \qquad C(x) \in S'(R^4),$$

$$C(x) = 0 \quad \text{при} \quad x^2 < 0,$$

$$\tilde{C}(q) = F[C(x)](q) = \int d^4x\, e^{iqx}\, C(x) = 0 \quad \text{при} \quad |q_0| < |\vec{q}| - 1,$$

$C(x_0,\vec{x})$ - радиально-симметрична по $\vec{x}$. Используя для всех допустимых матричных элементов существование единственного представления Йоста-Лемана-Дайсона /ЙЛД/

$$\tilde{C}(q) = \epsilon(q_0)\int d\lambda^2\, d^3u\,\delta(q_0^2 - (\vec{q}-\vec{u})^2 - \lambda^2)\,\psi(\lambda^2,\vec{u}), \quad /1.2/$$

$$\psi(\lambda^2,\vec{u}) \in S'(\bar{R}_+ \times R^3), \quad /1.3/$$

$$\mathrm{supp}\,\psi(\lambda^2,\vec{u}) \subset \{\lambda^2,\vec{u}: \lambda \geq 0,\ |\vec{u}| \leq 1\}, \quad /1.4/$$

$\Psi(\lambda^2,\vec{u})$ - радиально-симметрично по $\vec{u}$, найдем в следующем параграфе более компактное описание допустимых матричных элементов в терминах симметричных частей $\bar{C}(x^2,\vec{x})$. В третьем параграфе докажем, что представление ДГС, принимающее для /1.1/ вид

$$\tilde{C}(q) = \int d\lambda^2\, d\alpha\,\epsilon(q_0-\alpha)\,\delta((q_0-\alpha)^2 - \vec{q}^{\,2} - \lambda^2)\,\rho(\lambda^2,\alpha), \quad /1.5/$$

$$\rho(\lambda^2,\alpha) = \rho(\lambda^2,-\alpha), \quad \rho(\lambda^2,\alpha) \in S'(\bar{R}_+ \times R), \quad /1.6/$$

$$\mathrm{supp}\,\rho(\lambda^2,\alpha) \subset \{\lambda^2,\alpha: \lambda^2 \geq 0,\ |\alpha| \leq 1\}, \quad /1.7/$$

не является общим. Включение /1.6/ справедливо тогда и только тогда, когда допустимый матричный элемент удовлетворяет добавочному условию /3.1/. В последнем параграфе покажем, что представление /1.5/ справедливо для всех допустимых матричных элементов, причем спектральные функции $\rho(\lambda^2, \alpha)$ нужно выбирать из более широкого функционального пространства. В приложении приводятся два примера вычисления спектральных функций $\rho(\lambda^2,\alpha)$.

2. *О СТРУКТУРЕ МАТРИЧНОГО ЭЛЕМЕНТА*

Рассмотрим фурье-образ представления ЙЛД:

$$C(x) = \frac{\epsilon(x_0)}{(2\pi)^2 i}\int_0^\infty d\lambda^2 \frac{\partial}{\partial x^2}[\theta(x^2) J_0(\sqrt{x^2\lambda^2})\int d^3\vec{u}\, e^{i\vec{u}\vec{x}}\,\psi(\lambda^2,\vec{u}). \quad /2.1/$$

Здесь $J_0(z)$ - функция Бесселя нулевого порядка. Используя /1.3/, /2.1/ и известные свойства преобразования Фурье и B-преобразования *, получим

$$C(x) = \epsilon(x_0)\,\bar{C}(x_0^2 - \vec{x}^2, \vec{x}), \quad /2.2/$$

$$\bar{C}(x^2,\vec{x}) = \frac{2\pi}{i} B_{\lambda^2} F^{-1}_{\vec{u}}[\psi(\lambda^2,\vec{u})](x^2,\vec{x}). \quad /2.3/$$

$\bar{C}(x^2,\vec{x})$ называется симметричной частью матричного элемента /1.1/, $\bar{C}(x^2,x) \in S'(\bar{R}_+ \times R^3)$ и радиально-симметрична по $\vec{x}$. Представление /2.2/ однозначно. Спектральная функция $\psi(\lambda^2,u)$ определяется по $\bar{C}(x^2, \vec{x})$ уравнением, обратным к /2.3/:

$$\psi(\lambda^2,\vec{u}) = \frac{i}{2\pi} B_{x^2} F_{\vec{x}}\,[\bar{C}(x^2,\vec{x})](\lambda^2,\vec{u}).$$

Учитывая /1.4/, получим согласно теореме о преобразовании Фурье финитных обобщенных функций и обратной

---

* B-преобразование основных функций $\phi(x^2) \in S(\bar{R}_+)$ имеет вид

$$B[\phi(x^2)](\lambda^2) = -\int_0^\infty dx^2 J_0(\sqrt{x^2\lambda^2})\frac{d}{dx^2}\phi(x^2) \equiv \phi_B(\lambda^2)$$

и осуществляет непрерывное отображение пространства $S(\bar{R}_+)$ в себя, при этом $B[\phi_B(\lambda^2)](x^2) = \phi(x^2)$. B-образ обобщенных функций $f(x^2) \in S'(\bar{R}_+)$ определяется уравнением $(f_B(\lambda^2), \phi_B(\lambda^2)) = (f(x^2), \phi(x^2))$

и имеет вид $B[f(x^2)](\lambda^2) = f_B(\lambda^2) =$

$$= \int_0^\infty dx\ f(x^2)\frac{\partial}{\partial \lambda^2}[\theta(\lambda^2) J_0(\sqrt{x^2\lambda^2})].$$

Теория B-преобразования изложена в работе [4].

к ней теореме Пэли-Винера-Шварца /см., напр., [5] / следующую лемму.

Лемма 1. Для того, чтобы обобщенная функция $C(x)$ была допустимым матричным элементом, необходимо и достаточно, чтобы она могла быть представлена в виде /2.2/, причем функция $\bar{C}(x^2,\vec{x})$ должна удовлетворять следующему условию:

$$\bar{C}(x^2,\vec{x}) \equiv \bar{C}(x^2,|\vec{x}|) \in S'(\bar{R}_+ \times R^3), \qquad /2.4/$$

и по переменной $|\vec{x}|$ быть четной целой аналитической функцией, порядок и тип которой не превосходят единицы. Точнее, для любой функции $\phi(x^2) \in S(R_+)$ функция

$$C_\phi(|x|) = \int_0^\infty dx^2\, \bar{C}(x^2,\vec{x})\phi(x^2) \qquad /2.5/$$

должна быть четной целой аналитической функцией, допускающей для любого $\delta>0$ оценку

$$|C_\phi| \le C_{\delta,\phi}(1+(\mathrm{Re}\, z)^2)^p\, e^{(1+\delta)|\mathrm{Im}\, z|}, \quad z\in C, \qquad /2.6/$$

где $C_{\delta,\phi} = \mathrm{const}$, p - некоторое натуральное число.

Для исследования представления ДГС запишем симметричную часть матричного элемента в переменных x^2 и x_0. Переход к новым переменным осуществляется заменой $|\vec{x}| \to \sqrt{(x_0^2-x^2)}$ и возможен благодаря лемме 1. Действительно, допустим, что $\bar{C}$ является по x^2 обобщенной функцией порядка n. Тогда существует первообразная по x^2 порядка n:

$$F(x^2,|\vec{x}|) = \frac{(x^2)_+^{n-1}}{\Gamma(n)} * \bar{C}(x^2,\vec{x}), \qquad /2.7/$$

обладающая всеми свойствами, установленными для $\bar{C}(x^2,\vec{x})$ в лемме 1, и непрерывная по обоим аргументам. Заметим, что обратное к /2.7/ соотношение имеет вид

$$\bar{C}(x^2,\vec{x}) = \delta^{(n)}(x^2) * F(x^2,|\vec{x}|) = \left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)^n F(x^2,|\vec{x}|). \quad /2.8/$$

Из аналитических свойств и четности $F(x^2,|\vec{x}|)$ по $|\vec{x}|$ следует, что функция

$$\hat{F}(x^2,x_0) = F(x^2,\sqrt{x_0^2-x^2}) \qquad /2.9/$$

является однозначно определенной функцией в области $x^2\in R$, $x_0\in C$, равна нулю для $x^2<0$, является по x_0 четной целой аналитической функцией, порядок и тип которой не превосходят единицы, и допускает в силу /2.4/-/2.9/ для любого $\delta>0$ оценку

$$|\hat{F}(x^2,x_0)| \le C_\delta(1+x^2)^k(1+(\mathrm{Re}\sqrt{x_0^2-x^2})^2)^p \times$$

$$\times e^{(1+\delta)|\mathrm{Im}\sqrt{x_0^2-x^2}|}, \qquad /2.10/$$

где k,p - некоторые натуральные числа, C_δ - const.

Исходя из предыдущих рассуждений, введем следующее определение.

Определение 2. Обобщенная функция

$$C(x) = \epsilon(x_0)\hat{C}(x_0^2-\vec{x}^2,x_0), \qquad /2.11/$$

где

$$\hat{C}(x^2,x_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x_0^2}\right)^n \hat{F}(x^2,x_0), \qquad /2.12/$$

$F(x^2,x_0)$ - непрерывная по x_0 четная целая аналитическая функция, порядок и тип которой не превосходят единицы, которая допускает оценку /2.10/ и равна нулю для $x^2<0$, называется допустимым матричным элементом.

Используя лемму 1 и учитывая, что $\bar{C}(x^2,\vec{x})$ определяется по $\hat{C}(x^2,x_0)$ с помощью уравнений $F(x^2,|\vec{x}|) = \hat{F}(x^2,\sqrt{x^2+\vec{x}^2})$ и /2.8/, нетрудно убедиться в том, что определение 2 равносильно определению 1.

Следует отметить, что $\hat{C}(x^2,x_0)$ в общем случае не будет обобщенной функцией умеренного роста, т.е.

$\hat{C}(x^2,x_0) \notin S'(\bar{R}_+ \times R')$, а является линейным непрерывным функционалом на пространстве основных функций

$$\Phi_N(\bar{R}_+ \times R) = \bigcup_{\delta>0} K\{N_p^\delta(x^2,x_0)\},$$

$$N_p^\delta(x^2,x_0) = (1+x^2)^p\,(1+x_0^2)^p \cdot \times$$

$$\times\left[\theta(x_0^2-x^2) + \theta(x^2-x_0^2)\, e^{(1+\delta)\cdot\sqrt{(x^2-x_0^2)}}\right],$$

$x^2 \in \bar{R}_+$, $x_0 \in R$, $p = 0,1,2,\dots$. $K\{N_p^\delta(x^2,x_0)\}$ - счетно-нормированное линейное топологическое пространство, топология которого определяется системой норм /см. [5]/

$$||\phi(x^2,x_0)||_p^{N^\delta} = \max_{q_1+q_2\le p} \sup_{x^2\in\bar{R}_+} N_p^\delta(x^2,x_0)\left|\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)^{q_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_0^2}\right)^{q_2}\phi(x^2,x_0)\right|,$$

$p = 0,1,2,\dots$. Из /2.10/, /2.12/ и специального выбора функций $N_p^\delta(x^2,x_0)$ вытекает, что $\hat{C}(x^2,x_0) \in \Phi'_N(\bar{R}_+ \times R)$. Поскольку $\Phi_N(\bar{R}_+\times R) \subset S(\bar{R}_+\times R)$, то $S'(\bar{R}_+\times R) \subset \Phi'_N(\bar{R}_+\times R)$.

Нетрудно заметить, что $S'(\bar{R}_+\times R)$ и $\Phi'_N(\bar{R}_+\times R)$ не совпадают. Для этого рассмотрим случай, когда $\tilde{C}(x^2,\vec{x}) = C(\vec{x})\,F(x^2)$, где $F(x^2) \in S'(\bar{R}_+)$, $C(z)$ - четная целая аналитическая полиномиально ограниченная на действительной оси функция, имеющая экспоненциальный рост для мнимых значений z типа $e^{a|\mathrm{Im}\,z|}$, $0<a\le 1$. $\hat{C}(x^2,x_0)$ удовлетворяет всем условиям леммы 1, и функция $S'(\bar{R}_+\times R)$, удовлетворяет всем условиям определения 2. $\hat{C}(x^2,x_0) = C(\sqrt{x_0^2-x^2})\,F(x^2) \in \Phi_N(\bar{R}_+\times R)$, но не принадлежит пространству $S'(R\times R)$, если $F(x^2)$ не слишком быстро убывает при $x^2 \to \infty$, поскольку $C(\sqrt{x_0^2-x^2})$ имеет экспоненциальное поведение при $x^2 \to \infty$.

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДГС

Рассмотрим частный случай, когда функционал $\hat{C}(x^2,x_0)$ непрерывно продолжается с пространства $\Phi_N(\bar{R}_+\times R)$ на $S(\bar{R}_+\times R)$.

Теорема 1. Представление ДГС /1.5/-/1.7/ матричного элемента /1.1/ существует тогда и только тогда, когда наряду с общими требованиями выполняется условие

$$\hat{C}(x^2,x^0) \subset S'(\bar{R}_+\times R). \qquad /3.1/$$

Доказательство. Пусть имеет место представление /1.5/-/1.7/. Фурье-образ равенства /1.5/ имеет вид /2.11/, где

$$\hat{C}(x^2,x_0) = \frac{-i}{(2\pi)^2}\int_0^\infty d\lambda^2 \frac{\partial}{\partial x^2}[\theta(x^2)J_0(\sqrt{x^2\lambda^2})\int d\alpha\, e^{i\alpha x_0}\rho(\lambda^2,\alpha) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} B_{\lambda^2} F_\alpha^{-1}[\rho(\lambda^2,\alpha)](x^2,x_0). \qquad /3.2/$$

Из выражений /1.6/ и /3.2/ следует выполнение /3.1/ в силу известных свойств преобразования Фурье и В-преобразования. Согласно /1.6/, /1.7/, /3.2/ и теоремы о преобразовании Фурье финитных обобщенных функций $\hat{C}(x^2,x_0)$ обладает всеми необходимыми свойствами, указанными в определении 2. Таким образом, мы показали, что из представления ДГС следует, что $C(x)$ является допустимым матричным элементом и выполнено включение /3.1/. Пусть $\hat{C}(x^2,x_0)$ удовлетворяет определению 2 и условию /3.1/. Рассмотрим обобщенную функцию

$$\rho(\lambda^2,\alpha) = 2\pi i\, B_{x^2} F_{x_0}[\hat{C}(x^2,x_0)](\lambda^2,\alpha). \qquad /3.3/$$

Для нее справедливо /1.6/ в силу условия /3.1/ и четности функции $\hat{C}(x^2,x_0)$ по x_0. Свойство /1.7/

следует из условия /1.6/, аналитических свойств $\hat{C}(x^2,x_0)$ по x_0 и теоремы Пэли-Винера-Шварца. Представление /1.5/ легко получить, подставив соотношение /3.2/ в /2.11/ и сделав преобразование Фурье. Теорема доказана.

4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТИПА ДГС

В предыдущем параграфе было показано, что представление /1.5/ допустимого матричного элемента со спектральной функцией, удовлетворяющей условиям /1.6/, /1.7/, справедливо при выполнении дополнительного условия /3.1/. Поскольку условие /3.1/ в общем случае не выполняется для всех допустимых матричных элементов, то возникает вопрос: не существует ли для всех матричных элементов $C(x)$ представление /1.5/ со спектральными функциями из более широких функциональных пространств?

Спектральные функции будем искать в виде /3.3/. Необходимо доопределить преобразование Фурье и B-преобразования на обобщенных функциях $\hat{C}(x^2,x_0)\in\Phi'_N(\bar{R}_+\times R)$.

Рассмотрим сначала преобразование Фурье

$$F_{x_0}[\hat{C}(x^2,x_0)](x^2,\alpha)=\int dx_0\, e^{i\alpha x_0}\,\hat{C}(x^2,x_0)\equiv\hat{C}_F(x^2,\alpha). \qquad /4.1/$$

Оказывается, целесообразно выразить $\hat{C}_F(x^2,\alpha)$ через функцию $\bar{C}_F(x^2,\vec{u})$, определяемую преобразованием

$$\bar{C}_F(x^2,\vec{u})=F_{\vec{x}}[\bar{C}(x^2,\vec{x})](x^2,\vec{u})=\int d^3\vec{x}\, e^{-i\vec{u}\vec{x}}\,\bar{C}(x^2,\vec{x}). \qquad /4.2/$$

Перейдем к сферическим координатам, учитывая, что функции $\bar{C}_F(x^2,\vec{u})$ и $\bar{C}(x^2,\vec{x})$ радиально симметричны по $\vec{u}$ и $\vec{x}$ соответственно, тогда получим

$$\bar{C}_F(x^2,v)=4\pi\int_0^\infty dr\, r\,\frac{\sin vr}{v}\,\bar{C}(x^2,r), \qquad /4.3/$$

$$\bar{C}(x^2,r)=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty dv\, v\,\frac{\sin vr}{r}\,\bar{C}_F(x^2,v), \qquad /4.4/$$

где

$$r=|\vec{x}|,\quad v=|\vec{u}|,\quad \phi(x^2,u)\in S(\bar{R}_+\times R^3),$$

$$(\bar{C}_F(x^2,u),\phi(x^2,u))=(\bar{C}_F(x^2,v)\,v^2,\phi_S(x^2,v)),$$

$$\phi_S(x^2,v)=\int_{|\vec{\omega}|=1} d^3\vec{\omega}\,\phi(x^2,\vec{\omega}v)\in S(\bar{R}_+\times\bar{R}_+).$$

С помощью /2.7/, /2.9/, /2.12/, /4.1/ и /4.4/ находим

$$\hat{C}(x^2,x_0)=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty dv\, v\,\frac{\sin v\sqrt{x_0^2-x^2}}{\sqrt{x_0^2-x^2}}\,\bar{C}_F(x^2,v), \qquad /4.5/$$

$$\hat{C}_F(x^2,\alpha)=\frac{1}{\pi^2}\int_P^\infty dv\, v\, C_F(x^2,v)\int_P^\infty dx_0\cos\alpha x_0\,\frac{\sin v\sqrt{x_0^2-x^2}}{\sqrt{x_0^2-x^2}}.$$

Вычислим внутренний интеграл выражения /4.5/, используя формулу 3.876.1 [7]:

$$\int_0^\infty dx_0\cos\alpha x_0\,\frac{\sin v\sqrt{x_0^2-x^2}}{\sqrt{x_0^2-x^2}}=$$

$$=\frac{\pi}{2}I_0\left(\sqrt{x^2(v^2-\alpha^2)}\right)\theta(v^2-\alpha^2),\quad v>0, \qquad /4.6/$$

где $I_0(z)=J_0(iz)$. Выражение /4.6/ можно подставить в /4.5/ в том случае, если

$$\bar{C}_F(x^2,v)\quad \text{регулярно по } v \text{ при } v=0. \qquad /4.7/$$

Следует подчеркнуть, что здесь достаточно рассмотреть случай, когда условие /4.7/ выполняется. Действительно, $C_F(x^2, v)$ всегда можно разделить на две части:

$$C_F(x^2, v) = \bar{C}^1_F(x^2, v) + \bar{C}^2_F(x^2, v),$$

так что $\bar{C}^1_F(x^2, v)$ удовлетворяет /4.7/ и $\bar{C}^2_F(x^2, v)$ – условию $\operatorname{supp} \bar{C}^2_F(x^2, v) \subset \{x^2, v: x^2 > 0, \ v = 0\}$. Покажем, что функция $\hat{C}^2_F(x^2, x_p)$ удовлетворяет условию /3.1/. Для функции $\bar{C}^2(x^2, x)$ всегда справедливо представление

$$\bar{C}^2(x^2, \vec{x}) = \sum_{k=0}^{n} (x^2)^k \, a_k(x^2),$$

где $a_k(x^2) \in S'(\bar{R}_+)$, n - некоторое натуральное число, откуда следует, что

$$\hat{C}^2(x^2, x_0) = \sum_{k=0}^{n} (x_0^2 - x^2)^k \, a_k(x^2) \in S'(\bar{R}_+ \times R),$$

и в силу теоремы 1 справедливо обычное представление ДГС /1.5/-/1.7/ для $C^2(x) = \epsilon(x_0)\, \hat{C}^2(x_0^2 - \vec{x}^2, x_0)$.

Итак, пусть выполнено условие /4.7/. Подставляя /4.6/ в /4.5/, получаем

$$\hat{C}_F(x^2, \alpha) = \frac{1}{4\pi} \int_0^1 dv^2 \, C_F(x^2, v)\, I_0\left(\sqrt{x^2(v^2 - \alpha^2)}\right) \theta(v^2 - \alpha^2). \qquad /4.8/$$

Область интегрирования определяется условием /1.4/. Из формулы /4.8/ видно, что $C_F(x^2, \alpha) = 0$ при $|\alpha| > 1$. Это свойство является выражением аналитических свойств обобщенной функции $\hat{C}(x^2, x_0)$ по x_0. Заметим, что при выполнении /4.7/ обобщенная функция $\hat{C}_F(x^2, \alpha)$ регулярна по α при $\alpha = 0$.

Вычислим преобразование, обратное к /4,8/. С помощью /4.1/, /4.3/ и формулы 3.876.1 [7] находим

$$\bar{C}(x^2, r) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 d\alpha \, \hat{C}_F(x^2, \alpha) \cos \alpha \sqrt{x^2 + r^2},$$

$$\bar{C}_F(x^2, v) = 4 \int_0^1 d\alpha \, \hat{C}_F(x^2, \alpha) \int_0^\infty dr\, r \frac{\sin vr}{v} \cos \alpha \sqrt{x^2 + r^2},$$

$$\int_0^\infty dr\, r \frac{\sin vr}{v} \cos \alpha \sqrt{x^2 + r^2} =$$

$$= -\frac{1}{v} \frac{\partial^2}{\partial v \partial \alpha} \left[\frac{\pi}{2} J_0\left(\sqrt{x^2(\alpha^2 - v^2)}\right) \theta(\alpha^2 - v^2)\right], \ \alpha \neq 0,$$

$$\bar{C}_F(x^2, v) = -4\pi \int_0^1 d\alpha \, \hat{C}_F(x^2, \alpha) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial v^2} \times$$

$$\times \left[J_0\left(\sqrt{x^2(\alpha^2 - v^2)}\right) \theta(\alpha^2 - v^2)\right]. \qquad /4.9/$$

Найдем область определения функционала $\hat{C}_F(x^2, \alpha)$. Из /4.8/ и /4.9/ получим

$$(\bar{C}_F(x^2, v)\, v^2, \phi_S(x^2, v)) =$$

$$= \int_0^\infty dx^2 \int_0^1 d\alpha \, \hat{C}_F(x^2, \alpha)\, \phi(x^2, \alpha) = (\hat{C}_F(x^2, \alpha), \hat{\phi}(x^2, \alpha)). \qquad /4.10/$$

$$\hat{\phi}(x^2, \alpha) = -4\pi \int_0^1 dv\, v^2 \phi_S(x^2, v) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial v^2} \times$$

$$\times \left[J_0\left(\sqrt{x^2(\alpha^2 - v^2)}\right) \theta(\alpha^2 - v^2)\right],$$

$$v \phi_S(x^2, v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 d\alpha \, \phi(x^2, \alpha)\, I_0\left(\sqrt{x^2(v^2 - \alpha^2)}\right) \theta(v^2 - \alpha^2). \qquad /4.11/$$

Преобразование, определенное формулой /4.10/, осуществляет линейное непрерывное отображение пространства $\phi_S \in S(\bar{R}_+ \times \bar{R}_+)$ в некоторое пространство основных функций $\hat{\phi}(x^2, \alpha) \in \Phi_{I_0}(\bar{R}_+ \times \bar{R}_+)$. С помощью /4.11/ находим, что $\Phi_{I_0}(\bar{R}_+ \times \bar{R}_+)$ является счетно-нормированным линейным топологическим пространством. Его топология определяется системой норм:

$$||\hat{\phi}(x^2,\alpha)||_p^{I_0} = \max_{\substack{q_1+q_2\le p\\ k_1+k_2\le p}} \sup_{x^2,v\in\bar{R}_+} |(x^2)^{k_1} v^{k_2} \left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)^{q_1}\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^{q_2} \times$$

$$\times \frac{1}{v}\int_0^v d\alpha\, \phi(x^2,\alpha) I_0(\sqrt{x^2(v^2-\alpha^2)}),$$

$p=0,1,\ldots$; k_1, k_2, q_1, q_2 - натуральные числа. Заметим, что преобразования /4.10/ и /4.11/ взаимно обратны, что можно проверить прямым вычислением, подставляя одно в другое. В результате имеем следующую лемму.

Лемма 2. Обобщенная функция $C(x)$ принадлежит множеству допустимых матричных элементов в том и только в том случае, если она может быть представлена в виде

$$C(x) = \epsilon(x_0)\frac{1}{2\pi}\int d\alpha\, e^{-i\alpha x_0}\,\hat{C}_F(x_0^2-x^2,\alpha), \qquad /4.12/$$

где

$$\mathrm{supp}\, C_F(x^2,\alpha) \subset \{x^2,\alpha : x^2\ge 0,\ |\alpha|\le 1\}, \qquad /4.13/$$

$$\hat{C}_F(x^2,\alpha) = \hat{C}_F(x^2,-\alpha) = \hat{C}^1_F(x^2,\alpha) + \hat{C}^2_F(x^2,\alpha), \qquad /4.14/$$

$$\hat{C}^1_F(x^2,\alpha) \in \Phi'_{I_0}(\bar{R}_+\times\bar{R}_+),\ \hat{C}'(x^2,\alpha)\text{регулярна} \qquad /4.15/$$

по x при $\alpha=0$,

$$\hat{C}^2_F(x^2,\alpha)\in S'(\bar{R}_+\times\bar{R}_+),\ C^2_F(x^2,\alpha)=0 \text{ при } \alpha\ne 0. \qquad /4.16/$$

Для определения в общем случае спектральной функции /3.3/ нам осталось рассмотреть B-образ обобщенной функции $\hat{C}_F(x^2,\alpha)$, удовлетворяющей условиям /4.13/-/4.16/. Согласно /4.14/ ищем спектральную функцию в виде

$$\rho(\lambda^2,\alpha) = \rho^1(\lambda^2,\alpha)+\rho^2(\lambda^2,\alpha), = \qquad /4.17/$$

$$= 2\pi i(B_{x^2}[\hat{C}^1_F(x^2,\alpha)](\lambda^2,\alpha) + B_{x^2}[\hat{C}^2_F(x^2,\alpha)](\lambda^2,\alpha)).$$

Для второй части получим в силу /4.16/

$$\rho^2(\lambda^2,\alpha)\in S'(\bar{R}_+\times\bar{R}), \qquad /4.18/$$

$$\mathrm{supp}\,\rho^2(\lambda^2,\alpha)\subset\{\lambda^2,\alpha:\lambda^2\ge 0,\ \alpha=0\}. \qquad /4.19/$$

$\rho^1(\lambda^2,\alpha)$ определяется уравнением

$$(\rho^1(\lambda^2,\alpha),\ \phi_B(\lambda^2,\alpha)) = 2\pi i(\hat{C}^1_F(x^2,\alpha),\ \phi(x^2,\alpha)), \qquad /4.20/$$

где

$$\phi_B(\lambda^2,\alpha) = -\int^\infty dx^2 J_0(\sqrt{x^2\lambda^2})\frac{\partial}{\partial x^2}\hat{\phi}(x^2,\alpha), \qquad /4.21/$$

$$\phi(x^2,\alpha)\in\Phi_{I_0}(\bar{R}_+\times\bar{R}_+).$$

Заметим, что $\Phi_{I_0}(\bar{R}_+\times\bar{R}_+)\subset S(\bar{R}_+\times\bar{R}_+)$. Множество всех функций $\phi_B(\lambda^2,\alpha)$ образует некоторое пространство основных функций, которое обозначаем через Φ_{I_0B}. Из /4.20/ следует, что

$$\rho^1(\lambda^2,\alpha)\in\Phi'_{I_0B}. \qquad /4.22/$$

Поскольку топологические свойства пространства Φ_{I_0B} из-за сложности полунорм $||\hat{\phi}(x^2,\alpha)||_p^{I_0}$ трудно определить, будем использовать более наглядное представление о свойствах спектральной функции $\rho^1(\lambda^2,\alpha)$, полученное на основе представления /4.8/, которое существует для всех обобщенных функций /4.15/. Разлагая в /4.8/ функцию $I_0(\sqrt{x^2(v^2-a^2)})$ в ряд Тейлора, находим

$$\hat{C}^1_F(x,a)=\sum_{k=0}^{\infty}\hat{C}^1_{F,k}(x^2,a), \qquad /4.23/$$

где

$$\hat{C}^1_{F,k}(x^2,a)=\frac{1}{\pi}\frac{(x^2)^k}{(k!)^2 4^{k+1}}\int dv^2 C^1_F(x^2,v)(v^2-a^2)^k_+ . \qquad /4.24/$$

Из /4.24/ и $C^1_F(x^2,v)\in S'(\bar{R}_+\times\bar{R}_+)$ следует, что $\hat{C}^1_{F,k}(x^2,a)\in S'(\bar{R}_+\times\bar{R}_+)$. С учетом известных свойств B-преобразования и /4.13/ получим

$$\rho^1_k(\lambda^2,a)=2\pi i\, B_{x^2}[C^1_{F,k}(x^2,a)](\lambda^2,a)\in S'(\bar{R}_+\times\bar{R}_+), \qquad /4.25/$$

$$\operatorname{supp}\rho^1_k(\lambda^2,a)\subset\{\lambda^2,a;\lambda^2\geq 0,\ |a|\leq 1\}. \qquad /4.26/$$

Учитывая, что ряд /4.23/ сходится в смысле топологии пространства $\Phi'_{I_0}(R_+\times R_+)$ и предполагая справедливость почленного выполнения B-преобразования, находим, что ряд

$$\rho^1(\lambda^2,a)=\sum_{k=0}^{\infty}\rho^1_k(\lambda^2,a) \qquad /4.27/$$

должен сходиться в смысле топологии пространства $\Phi'_{I_0 B}$. Заметим, что из того, что каждый член ряда /4.27/ имеет носитель, удовлетворяющий /4.26/, нельзя заключить, что $\rho^1(\lambda^2,a)$ удовлетворяет условию /4.26/. Чтобы оценить $\operatorname{supp}\rho^1(\lambda^2,a)$, рассмотрим $\hat{C}^1_F(x^2,a)$ как линейный непрерывный функционал на пространстве

$$\Phi_M(\bar{R}_+\times R)=\bigcup_{\delta>0}K\{M^\delta_p(x^2,a)\}\subset\Phi_{I_0}(\bar{R}_+\times\bar{R}_+),$$

где

$$M^\delta_p(x^2,a)=\begin{cases}(1+x^2)^p e^{(1+\delta)\sqrt{x^2(1-a^2)}}, & \text{если } |a|\leq 1,\\ \infty, & \text{если } |a|>1,\end{cases}$$

$$\|\phi(x^2,a)\|_p^{M^\delta}=\max_{k+\ell\leq p}\ \sup_{x^2,|a|\in R_+}M^\delta_p(x^2,a)\left|\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)^k\left(\frac{\partial}{\partial a}\right)^\ell\phi(x^2,a)\right|,$$

$p=0,1,\ldots$. Нетрудно найти, что B-образы всех функций $\phi(x^2,a)\in\Phi_M(\bar{R}_+\times R)$ вместе со всеми производными по a аналитичны по λ^2 в области

$$H=\{\lambda^2\in C:\left(\frac{\operatorname{Im}\lambda^2}{2}\right)^2\leq(1-a^2)(\operatorname{Re}\lambda^2+1-a^2),\ |a|\leq 1\}.$$

Подынтегральная функция B-преобразования функции $\phi(x^2,a)\in\Phi_M$

$$\phi_B(\lambda^2,a)=-\int^{\infty}dx^2 J_0(\sqrt{x^2\lambda^2})\frac{\partial}{\partial x^2}\phi(x^2,a)$$

бесконечно дифференцируема в области $\lambda\in C$, $|a|\leq 1$ и аналитична по λ в области $\operatorname{Im}\lambda\leq\sqrt{1-a^2}$. Для любой функции $\phi(x^2,a)\in\Phi_M(R_+\times R)$ и любых $\epsilon,\delta>0$ существует такое число A, что

$$\left|\int_A^{\infty}dx^2 J_0(\sqrt{\lambda^2x^2})\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\partial}{\partial a}\right)^\ell\phi(x^2,a)\right|=$$

$$=\left|\int_A^{\infty}dx^2\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{i\lambda\sqrt{x^2}\cos\theta}d\theta\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\partial}{\partial a}\right)^\ell\phi(x^2,a)\right|\leq$$

$$\leq \|\phi(x^2,a)\|_{\ell+1}^{M^\delta} \int_A^\infty e^{-\sqrt{x^2}((1+\delta)(\sqrt{1-a^2}-|\mathrm{Im}\lambda|))} dx^2 < \epsilon ,$$

ℓ - натуральное число. Это значит, что $\phi_B(\lambda^2, a)$ вместе со всеми производными по a аналитична по λ в области $|\mathrm{Im}\lambda| \leq \sqrt{1-a^2}$ при $|a| \leq 1$ и, следовательно, по λ^2 в области H. Отсюда заключаем /см., напр., /5/ /, что

$$\mathrm{supp}\,\rho^1(\lambda^2, a) \subset \{\lambda^2, a : \lambda^2 \in H,\ |a| \leq 1\}. \qquad /4.28/$$

Представление типа ДГС матричного элемента /1.1/ получим, подставляя /4.23/ и соотношение $\hat{C}_F^2(x^2,a) = \frac{1}{2\pi i} B_{\lambda^2}[\rho^2(\lambda^2,a)](x^2,a)$ в /4.12/, учитывая при этом обратное к /4.25/ соотношение $\hat{C}^1_{F,k}(x^2,a) = \frac{1}{2\pi i} B_{\lambda^2}[\rho^1_k(\lambda^2,a)](x^2,a)$. После выполнения преобразования Фурье находим:

$$\tilde{C}(q) = \int_0^\infty d\lambda^2 \int da\, \epsilon(q_0 - a)\delta((q_0-a)^2 - \vec{q}^{\,2} - \lambda^2)[\rho^1(\lambda^2,a) + \rho^2(\lambda^2,a)]. \qquad /4.29/$$

Резюмируем полученные результаты в виде следующей теоремы.

Теорема 2. Для всех допустимых матричных элементов существует представление /4.29/, где спектральные функции $\rho^1(\lambda^2,a)$ и $\rho^2(\lambda^2,a)$ удовлетворяют условиям /4.22/, /4.28/ и /4.28/, /4.19/ соответственно. $\rho^1(\lambda^2,a)$ имеет вид бесконечного ряда /4.27/, отдельные члены которого удовлетворяют условиям /4.25/ и /4.26/. И наоборот: представление /4.29/ со спектральной функцией /4.17/, обладающей указанными свойствами, определяет некоторый допустимый матричный элемент.

В заключение авторы выражают признательность Б.И.Завьялову, В.А.Матвееву, А.Н.Тавхелидзе, В.Я.Файнбергу, Э.Вицореку, Г.Ласнеру и А.Ульману за плодотворные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Пример 1. Рассмотрим представление ДГС для матричного элемента вида

$$C(x) = -\frac{i}{\pi}\cos x_0 D(x,1),$$

где

$$D(x,1) = \frac{1}{2\pi}\epsilon(x^0)\frac{d}{dx^2}[\theta(x^2) J_0(\sqrt{x^2})].$$

Функция

$$\hat{C}(x^2,x_0) = -\frac{i}{2\pi^2}\cos x_0 \frac{d}{dx^2}[\theta(x^2)J_0(\sqrt{x^2})] \in S'(\bar{R}_+ \times R)$$

удовлетворяет всем условиям определения 2. В силу теоремы 1 находим с помощью /3.3/, что

$$\rho(\lambda^2,a) = [\delta(a-1) + \delta(a+1)]\delta(\lambda^2 - 1) -$$

- спектральная функция представления ДГС. Подставляя ее в /1.5/, получим фурье-образ исходной функции

$$C(q) = \epsilon(q_0 - 1)\delta(q^2 - 2q_0) + \epsilon(q_0+1)\delta(q^2 + 2q_0).$$

Пример 2. Обобщенная функция

$$C(x) = -i\cos|\vec{x}|\,\theta(x^2)\,\epsilon(x^0)$$

является согласно лемме 1 допустимым матричным элементом. Обычное представление ДГС тем не менее не существует, поскольку

$$\hat{C}(x^2,x_0) = -i\cos\sqrt{x_0^2 - x^2}\,\theta(x^2) \notin S'(\bar{R}_+ \times R).$$

Используя /4.3/ и /4.8/, находим

$$\bar{C}_F(x^2,v) = -i8\pi^2\theta(x^2)\,\delta'(1-v^2),$$

$$\hat{C}_F(x^2, \alpha) = \frac{2\pi}{i}[\theta(x^2)\,\delta(1-\alpha^2)] +$$

$$+ \frac{2\pi}{i}\ \frac{\theta(x^2)\theta(1-\alpha^2)}{2\sqrt{(1-\alpha^2)}}\sqrt{x^2}\, I_1(\sqrt{x^2(1-\alpha^2)})\ .$$

Здесь $\hat{C}_F(x^2, \alpha)$ удовлетворяет условиям /4.13/ и /4.15/ леммы 2. Согласно теореме 2 после несложных выкладок находим

$$\rho(\lambda^2, \alpha) = 16\pi^2[\delta(1-\alpha^2)\delta'(\lambda^2) + \theta(1-\alpha^2)\delta''(\lambda^2+1-\alpha^2)],$$

используя при этом известную формулу /4/

$$B[\theta(x^2)\frac{(x^2)^n}{n!}](\lambda^2) = 4^{n+1}\delta^{(n+1)}(\lambda^2)\ .$$

Интересно заметить, что "смещение" носителя спектральной функции в область отрицательных значений $\lambda^2 \geq -1+\alpha^2$, действительно, происходит /см. /4.28//, не являясь следствием специального выбора пространства $\Phi_M(\bar{R}_+ \times R)$. Подставляя теперь $\rho(\lambda^2, \alpha)$ в представление /4.29/, получим фурье-образ исходной функции

$$\tilde{C}(q) = 8\pi^2[\epsilon(q_0-1)(1-\frac{1}{q_0})\delta'(q^2-2q_0+1) +$$

$$+\epsilon(q_0-1)(1+\frac{1}{q_0})\delta'(q^2+2q_0+1)\ .$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Deser S., Gilbert W., Sudarshan E.C.G. Phys. Rev., 1960, 117, p.266;*

Файнберг В.Я. ЖЭТФ, 1959, 36, с.1503.

2. *Nakanishi N. Phys.Rev., 1971, D4, p.2571.*
3. *Jost R., Lehmann H. Nuovo Cim., 1957, 5, p.1598; Dyson F.J. Phys. Rev., 1958, 110, p.1460;*

   Владимиров B.C. Методы теории функций многих комплексных переменных. "Наука", М., 1964.
4. *Завьялов Б.И. ТМФ, 1973, 17, с.178.*
5. *Gelfand G.M., Shilov G.E. Verallgemeineste Funktionen, Band 2, DVW, 1962.*
6. *Владимиров B.C. Уравнения математической физики. "Наука", М., 1971.*
7. *Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1963.*

Рукопись поступила в издательский отдел
25 апреля 1978 года.