ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P2 - 11514

Е.А.Иванов, А.А.Капустников

ОБЩАЯ СВЯЗЬ ЛИНЕЙНОЙ И НЕЛИНЕЙНОЙ РЕАЛИЗАЦИЙ СУПЕРСИММЕТРИИ

1978

P2 - 11514

Е.А.Иванов, А.А.Капустников*

ОБЩАЯ СВЯЗЬ ЛИНЕЙНОЙ И НЕЛИНЕЙНОЙ РЕАЛИЗАЦИЙ СУПЕРСИММЕТРИИ

Направлено в Journal of Physics A: Math. and General и в Оргкомитет 19 Международной конференции по физике высоких энергий /Токио, 1978/

*Днепропетровский государственный университет.

Иванов Е.А., Капустников А.А. P2 - 11514

Общая связь линейной и нелинейной реализаций суперсимметрии

Установлена связь между суперполевым подходом к суперсимметрии и нелинейной реализацией Волкова-Акулова. Показано, что определенной, зависящей от полей заменой переменных x_μ, θ_a любое суперполе можно привести к виду, в котором оно представляется нелинейно преобразующимися компонентами. Обратно, из нелинейно преобразующихся полей всегда можно образовать объекты с линейным законом суперпреобразования. Получены общие формулы для перехода от линейной реализации к нелинейной и для построения суперполей из нелинейно преобразующихся полей.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Ivanov E.A., Kapustnikov A.A. P2 - 11514

General Relationship between Linear and Nonlinear Realizations of Supersymmetry

The close correspondence between the superfield approach to the supersymmetry and the Volkov-Akulov nonlinear realization is established. We show that any superfield, by certain field-dependent change of variables x_μ, θ_a, can be transformed to the form in which it is represented by nonlinearly transforming components. Inversely, there always exist the functions of the nonlinear realization objects which transform according to the linear supertransformation law. We derive general theorems and explicit formulas which describe the transition from the linear realization to the nonlinear one and vice versa.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

1. ВВЕДЕНИЕ

Существуют два различных подхода к реализации суперсимметрии. Это, во-первых, линейная реализация [1,2], которая наиболее естественным образом задается на суперполях $\Phi_k(x,\theta)$ [3,4]*

$$\Phi'_k(x,\theta) = \Phi_k\left(x + \frac{1}{2i}\bar{\epsilon}\gamma\theta, \theta - \epsilon\right), \qquad /1/$$

где ϵ - спинорный параметр и k - лоренцев индекс. Другой подход - нелинейная реализация Волкова-Акулова [5], в которой основной величиной является неоднородно преобразующийся голдстоуновский спинор $\lambda(x)$:

$$\delta\lambda(x) = \epsilon + \frac{1}{2i}\bar{\epsilon}\gamma_\mu\lambda(x)\partial^\mu\lambda(x), \qquad /2/$$

а все остальные поля $\sigma_k(x)$ преобразуются по закону

$$\delta\sigma_k(x) = \frac{1}{2i}\bar{\epsilon}\gamma_\mu\lambda(x)\,\partial^\mu\sigma_k(x) \qquad /3/$$

/см. также работу [6]/. Нелинейная реализация наиболее явно отражает идею спонтанного нарушения суперсимметрии.

В случае обычных симметрий аналогичные подходы взаимосвязаны [7], и естественно ожидать, что подобная связь имеет место и для суперсимметрии. Так,

***Мы используем майорановский формализм. Метрика и γ-матрицы выбраны,как в работе [4].**

в 1974 году Зумино [8] отметил, что существуют функции нелинейно преобразующегося голдстоуновского поля, обладающие трансформационными свойствами компонент скалярного супермультиплета /см. комментарий по этому поводу на стр. 12/. Однако общая структура соотношения между двумя реализациями суперсимметрии оставалась неясной.

В настоящей работе мы устанавливаем явный вид этого соотношения путем обобщения на случай суперсимметрии результатов Коулмена, Весса и Зумино [7] для обычных симметрий. Во втором разделе показано, что произвольное суперполе всегда можно привести к "расщепленному" виду, в котором его компоненты преобразуются по нелинейному закону /3/. Сформулированы общие правила перехода к расщепленному представлению. В третьем разделе полностью решена проблема построения линейно преобразующихся суперполей из величин нелинейной реализации $\lambda(x)$, $\sigma_k(x)$. Развитые методы могут быть применены к любой суперсимметрии, заданной на некотором суперпространстве. Мы показываем, что наши результаты находятся в тесном соответствии с общими теоремами, выведенными Коулменом, Вессом, Зумино [7] при анализе связи между линейными и нелинейными реализациями обычных симметрий.

II. РАСЩЕПЛЕННАЯ ФОРМА СУПЕРПОЛЕЙ

1. Согласно общей теории нелинейных реализаций внутренних симметрий любой линейный мультиплет данной группы может быть разложен в прямую сумму нелинейно преобразующихся компонент посредством группового преобразования с голдстоуновским полем в качестве параметра [7]. Аналогичная теорема выполняется и в случае суперсимметрии.

Совершим в некотором суперполе $\Phi_k(x,\theta)$ локальный суперсдвиг с параметром $-\lambda(x)$:

$$\Phi_k(x,\theta) \to \Phi^\sigma_k(x,\theta) = \Phi_k(x - \frac{1}{2i}\bar{\lambda}(x)\gamma\theta, \theta + \lambda(x)), \qquad /4/$$

и найдем закон преобразования сдвинутого суперполя $\Phi^\sigma_k(x,\theta)$ при глобальных суперпреобразованиях /1/, /2/. В соответствии с правилом варьирования сложных функций групповая вариация $\delta\Phi^\sigma_k(x,\theta)$ складывается из двух частей. Прежде всего, это обычный суперсдвиг в точках $x'_\mu = x_\mu - \frac{1}{2i}\bar{\lambda}(x)\gamma_\mu\theta$, $\theta' = \theta + \lambda(x)$,

$$\delta_1\Phi^\sigma_k(x,\theta) = -\bar{\epsilon}\Big[\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}'} + \frac{i}{2}(\gamma_\mu\theta')\frac{\partial}{\partial x'_\mu}\Big]\Phi_k(x',\theta'). \qquad /5/$$

Еще один член возникает вследствие изменения поля $\lambda(x)$ в аргументах x'_μ, θ':

$$\delta_2\Phi^\sigma_k(x,\theta) = -\frac{1}{2i}\delta\bar{\lambda}(x)\gamma_\mu\theta\frac{\partial}{\partial x'_\mu}\Phi_k(x',\theta') +$$

$$+\delta\bar{\lambda}(x)\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}'}\Phi_k(x',\theta'), \qquad /6/$$

где $\delta\lambda(x)$ определяется формулой /2/. С учетом соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} = (\delta^\mu_\rho - \frac{1}{2i}\partial^\mu\bar{\lambda}(x)\gamma_\rho\theta)\frac{\partial}{\partial x'_\rho} + \partial^\mu\bar{\lambda}(x)\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}'}$$

вариации /5/, /6/ суммируются в следующую формулу:

$$\delta\Phi^\sigma_k(x,\theta) = \delta_1\Phi^\sigma_k(x,\theta) + \delta_2\Phi^\sigma_k(x,\theta) =$$

$$= \frac{1}{2i}\bar{\epsilon}\gamma_\rho\lambda(x)\frac{\partial}{\partial x_\rho}\Phi^\sigma_k(x,\theta), \qquad /7/$$

которая показывает, что компоненты $\Phi^\sigma_k(x,\theta)$ преобразуются независимо друг от друга в соответствии с нелинейным законом /3/.

Таким образом, заменой переменных любое линейно преобразующееся суперполе можно перевести в "расщепленный" базис, в котором оно представляется набором нелинейно преобразующихся компонент.

Из соотношения /4/ следует, что компоненты расщепленного суперполя $\Phi^{\sigma}_{k}(x,\theta)$ являются конечными полиномами по антикоммутирующим спинорам $\lambda(x)$ и линейны по компонентам исходного суперполя $\Phi_k(x,\theta)$. Они порождаются последовательным применением оператора $\mathfrak{D}_{\alpha}(\lambda) = \frac{\partial}{\partial\bar\lambda^{\alpha}} + \frac{1}{2i}(\gamma_\mu\lambda)_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ /который совпадает с обычной ковариантной спинорной производной при $\theta=\lambda(x)$/ к λ-полиному $\Phi_k(x,\lambda(x))$:

$$A^{\sigma}_{k}(x) = \Phi_k(x,\lambda(x)) = A_k(x) + O(\lambda),$$

$$\psi^{\sigma}_{k}(x) = \mathfrak{D}(\lambda)\Phi_k(x,\lambda(x)) = \psi_k(x) + O(\lambda),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$D^{\sigma}_{k}(x) = \frac{1}{2}[\bar{\mathfrak{D}}(\lambda)\mathfrak{D}(\lambda)]^2\,\Phi_k(x,\lambda(x)) = D_k(x) + O(\lambda), \qquad /8/$$

причем подразумевается, что производная $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ не затрагивает $\lambda(x)$, а действует только на первый аргумент полинома $\Phi_k(x,\lambda)$. Обратим внимание на то, что в отличие от случая внутренних симметрий /7/ суперсимметричная связь /8/ с необходимостью включает производные полей.

Во избежание возможного недоразумения подчеркнем, что наличие расщепленного представления /4/ для суперполей само по себе еще не означает эквивалентности между суперполевым подходом и нелинейной реализацией, коль скоро $\lambda(x)$ остается некоторым независимым полем, не связанным с линейно преобразующимися компонентами. Взаимно-однозначное соответствие между двумя подходами возникает только в рамках

спонтанно нарушенной суперсимметрии, когда сами суперполя включают неоднородно преобразующуюся голдстоуновскую компоненту. В этом случае удается выразить $\lambda(x)$ через линейные компоненты с помощью канонического преобразования.

2. Изучим теперь более подробно структуру преобразования /4/ для некоторых часто встречающихся суперполей специального вида.

Начнем с обычной и спинорной ковариантной производных

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\Phi_k(x,\theta)$$

и

$$\mathfrak{D}_\alpha\Phi_k(x,\theta) = [\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\alpha}} + \frac{1}{2i}(\gamma_\mu\theta)_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\mu}]\Phi_k(x,\theta).$$

Они преобразуются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\Phi_k(x,\theta) \to \Delta^{\mu}\Phi^{\sigma}_{k}(x,\theta),$$

$$/9/$$

$$\mathfrak{D}_\alpha\Phi_k(x,\theta) \to \Delta_\alpha\Phi^{\sigma}_{k}(x,\theta),$$

$$\Delta^{\mu} = (M^{-1})^{\mu}_{\rho}\,[\nabla^{\rho} - \nabla^{\rho}\bar\lambda(x)\frac{\partial}{\partial\bar\theta}],$$

$$/10/$$

$$\Delta_\alpha = \frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\alpha}} + \frac{1}{2i}(\gamma_\mu\theta)_\alpha\Delta^{\mu},$$

где символ ∇^{λ} обозначает ковариантную производную нелинейной реализации /5,6/

$$\nabla^{\lambda} = (T^{-1})^{\lambda}_{\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu},\ T^{\lambda}_{\mu} = \delta^{\lambda}_{\mu} - \frac{1}{2i}\partial^{\lambda}\bar\lambda(x)\gamma_\mu\lambda(x) \qquad /11/$$

и матрица $M^{\rho}_{\mu}(x,\theta)$ определяется формулой

$$M^{\rho}_{\mu} = \delta^{\rho}_{\mu} - \frac{1}{2i} \nabla^{\rho}\bar{\lambda}(x)\gamma_{\mu}\theta . \qquad /12/$$

Поскольку $\Delta_{\mu}\Phi^{\sigma}_{k}(x, \theta)$, $\Delta_{\alpha}\Phi^{\sigma}_{k}(x, \theta)$ содержат только ковариантные величины, они явно ковариантны по отношению к преобразованиям /2/, /7/.

Еще один важный класс суперполей - киральные суперполя [4]:

$$\Phi^{\pm}_{k}(x,\theta) = e^{\mp\frac{1}{4}\bar{\theta}\partial\!\!\!/\gamma_5\theta} S^{\pm}_{k}(x,\theta_{\pm}), \qquad /13/$$

где $S^{\pm}_{k}(x,\theta_{\pm})$ зависят только от двухкомпонентных грассмановых спиноров

$$\theta_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm i\gamma_5)\theta .$$

Преобразование /1/ суперполей $\Phi^{\pm}_{k}(x,\theta)$ индуцирует на "усеченных" суперполях $S^{\pm}_{k}(x, \theta_{\pm})$ следующее преобразование:

$$S^{\pm\prime}_{k}(x,\theta_{\pm}) = S^{\pm}_{k}(x - i\bar{\epsilon}\gamma\theta_{\pm} \mp \frac{1}{4}\bar{\epsilon}\gamma\gamma_5\epsilon,\ \theta_{\pm} - \epsilon_{\pm}) . \qquad /14/$$

Переход к расщепленному представлению для $S^{\pm}_{k}(x, \theta_{\pm})$ производится по прежнему рецепту - заменой $\epsilon \to -\lambda(x)$ в трансформационном законе /14/:

$$S^{\pm}_{k}(x,\theta_{\pm}) \to S^{\sigma\pm}_{k}(x,\theta_{\pm}) =$$

$$= S^{\pm}_{k}(x + i\bar{\lambda}(x)\gamma\theta_{\pm} \mp \frac{1}{4}\bar{\lambda}(x)\gamma\gamma_5\lambda(x),\ \theta_{\pm} + \lambda_{\pm}(x)) . \qquad /15/$$

Действуя так же, как и при выводе формулы /7/, нетрудно проверить, что компоненты суперполя $S^{\sigma\pm}_{k}(x,\theta_{\pm})$ преобразуются по закону /3/. Заметим, что в то время, как $\Phi^{\pm}_{k}(x, \theta)$ и $S^{\pm}_{k}(x,\theta_{\pm})$ связаны простым соотношением /13/, связь между расщепленными суперполями $\Phi^{\sigma\pm}_{k}(x, \theta)$ и $S^{\sigma\pm}_{k}(x,\theta_{\pm})$ оказывается более сложной:

$$\Phi^{\sigma\pm}_{k}(x,\theta) = [\,1 \mp \frac{1}{4}\bar{\theta}\gamma_{\mu}\gamma_5\theta\Delta^{\mu}_{\pm} - \frac{1}{32}(\bar{\theta}\theta)^2\Delta^{\mu}_{\pm}\Delta_{\mu\pm}]S^{\sigma\pm}_{k}(x,\theta_{\pm}), \qquad /16/$$

где

$$\Delta^{\mu}_{\pm} = (M^{-1}_{\pm})^{\mu}_{\rho}\,(\nabla^{\rho} - \nabla^{\rho}\bar{\lambda}_{\pm}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\pm}}), \qquad /17/$$

$$M_{\pm}{}^{\mu}_{\rho} = \delta^{\mu}_{\rho} + i\nabla^{\mu}\bar{\lambda}(x)\gamma_{\rho}\theta_{\pm} . \qquad /18/$$

III. СУПЕРПОЛЯ КАК ФУНКЦИИ НЕЛИНЕЙНО ПРЕОБРАЗУЮЩИХСЯ ПОЛЕЙ

1. Общие формулы перехода от линейной реализации к нелинейной, полученные в разделе II, позволяют решить обратную задачу построения линейных представлений супергруппы из объектов нелинейной реализации $\lambda(x)$, $\sigma_k(x)$.

Соотношение /4/ можно переписать в обращенном виде:

$$\Phi_{k}(x,\theta) = \Phi^{\sigma}_{k}(\tilde{X}(x,\theta), \theta - \lambda(\tilde{X}(x,\theta))), \qquad /19/$$

где $\tilde{X}_{\mu}(x, \theta)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\tilde{X}_{\mu}(x,\theta) - \frac{1}{2i}\bar{\lambda}(\tilde{X})\gamma_{\mu}\theta = x_{\mu} . \qquad /20/$$

Решая это уравнение методом последовательных приближений, можно представить $\tilde{X}_{\mu}(x, \theta)$ в виде конечного полинома по нильпотентным спинорам θ, $\lambda(x)$ и производным от $\lambda(x)$:

$$\tilde X_\mu(x,\theta) = x_\mu - \frac{1}{2i}\bar\theta\gamma_\mu\lambda(x) + \frac{1}{4}(\bar\theta\gamma_\rho\lambda)(\partial^\rho\bar\lambda\gamma_\mu\theta)+\dots,$$

откуда следует, что соотношение /19/ представляет собой разложение суперполя $\Phi_k(x,\theta)$ по полям нелинейной реализации.

Правая часть соотношения /19/ является суперпозицией следующих θ-полиномов:

$$\tilde\lambda_\alpha(x,\theta) = \lambda_\alpha(\tilde X(x,\theta)) - \theta \quad , \qquad /21/$$

$$\tilde\sigma_k(x,\theta) = \sigma_k(\tilde X(x,\theta)). \qquad /22/$$

В *Приложении А* доказано, что при преобразованиях /2/, /3/ каждый из этих полиномов преобразуется в соответствии с линейным законом /1/ и, таким образом, сам обладает свойствами линейного суперполя.

В результате приходим к заключению, что заменой $x_\mu \to \tilde X_\mu(x,\theta)$ в нелинейно преобразующихся полях $\lambda_\alpha(x)$, $\sigma_k(x)$ можно строить линейно преобразующиеся суперполя произвольного внешнего спина.

Компоненты базисных суперполей /21/, /22/ выражаются через поля $\lambda_\alpha(x)$, $\sigma_k(x)$ и их производные с помощью простой итерационной формулы:

$$\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}\begin{pmatrix}\tilde\lambda_\beta(x,\theta)\\ \tilde\sigma_k(x,\theta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\delta^\alpha_\beta\\ 0\end{pmatrix} - \frac{1}{2i}(\bar\lambda(\tilde X)\gamma_\mu)^\alpha\frac{\partial}{\partial x_\mu}\begin{pmatrix}\lambda_\beta(\tilde X)\\ \sigma_k(\tilde X)\end{pmatrix}, \qquad /23/$$

которая выводится с использованием уравнения /20/. Например, первые две компоненты суперполя /21/ определяются соотношениями

$$\tilde A_\alpha(x) = \lambda_\alpha(x)\ ,$$

$$\tilde\psi_{\alpha\beta}(x) = C_{\beta\alpha} - \frac{1}{2i}(\gamma_\mu\lambda(x))_\beta\partial^\mu\lambda_\alpha(x)\ .$$

где $C_{\beta\alpha}$ - матрица зарядового сопряжения. Легко убедиться, что $\tilde A_\alpha(x)$ действительно преобразуется, как первая компонента суперполя:

$$\delta\tilde A_\alpha(x) = -\bar\epsilon\tilde\psi_\alpha(x)\ .$$

2. Имея в распоряжении базисный набор /21/, /22/, мы можем строить новые суперполя, либо перемножая суперполя /21/, /22/ и действуя на полученные произведения обычной или спинорной производными, либо совершая замену $x_\mu \to \tilde X_\mu(x,\theta)$ непосредственно в ковариантных производных нелинейной реализации $\nabla_\rho\lambda(x)$, $\nabla_\rho\sigma_k(x)$. Таким путем можно построить суперполе с любым внешним спином. Неприводимые суперполя с определенными суперспинами выделяются, как обычно, проекционными операторами, общая структура которых найдена в работе /9/. С их помощью, в частности, нетрудно построить киральные суперполя /13/, которые неприводимы и переносят, в зависимости от киральности, суперспины j или – j, где j - значение соответствующего внешнего спина. Существует, однако, более прямой рецепт построения киральных суперполей из полей $\lambda(x)$, $\sigma_k(x)$. Рассмотрим следующий набор "усеченных" θ-полиномов:

$$\tilde\lambda_\pm(x,\theta_\pm) = \lambda_\pm(\tilde X^\pm(x,\theta_\pm)) - \theta_\pm\ , \qquad /24/$$

$$\tilde\sigma^\pm_k(x,\theta_\pm) = \sigma_k(\tilde X^\pm(x,\theta_\pm))\ , \qquad /25/$$

где функции $\tilde X^\pm_\mu(x,\theta_\pm)$ удовлетворяют функциональным уравнениям

$$\tilde X^\pm_\mu(x,\theta_\pm) + i\bar\lambda^c(\tilde X^\pm)\gamma_\mu\theta_\pm \pm \frac{1}{4}\bar\lambda^c(\tilde X^\pm)\gamma_\mu\gamma_5\lambda(\tilde X^\pm) = x_\mu\ , \qquad /26/$$

$$(\bar\lambda^c(\tilde X^\pm) = C^{-1}\lambda(\tilde X^\pm))\ .$$

Этот набор возникает в результате обращения формулы /15/. Так же, как это сделано в *Приложении А* для суперполей /21/, /22/, можно показать, что полиномы /24/, /25/ преобразуются по линейному закону /14/ и тем самым образуют удобный базис для построения киральных суперполей. В *Приложении Б* приведен явный вид простейших скалярных супермультиплетов, построенных из $\lambda(x)$ и его производных перемножением θ -полиномов /24/.

Здесь уместно одно замечание. Зумино в докладе /8/ указал на существование нелинейной реализации с голдстоуновским спинором $\chi(x)$, преобразующимся по нестандартному закону *

$$\delta\chi(x) = \epsilon + \frac{1}{2i}\bar{\epsilon}\gamma_\mu \chi(x)\,\partial^\mu \chi(x) + \frac{1}{2i}\bar{\epsilon}\gamma_5\gamma_\mu \chi(x)\gamma_5 \partial^\mu \chi(x)\,, \qquad /27/$$

и отметил, что именно из спиноров $\chi(x)$ удается построить скалярный супермультиплет. Наше замечание состоит в том, что нелинейная реализация /27/ связана с канонической реализацией /2/ эквивалентной заменой спинора $\chi(x)$ подобно тому, как в киральной динамике /10/ связаны различные нелинейные реализации для пионов.

Поэтому любая линейно преобразующаяся функция поля $\chi(x)$ может быть построена непосредственно из спинора $\lambda(x)$ и его производных одним из общих методов, описанных в этом разделе. Эквивалентная связь между спинорами $\chi(x)$ и $\lambda(x)$ задается уравнениями

*Интересным свойством реализации /27/ является ее приводимость в том смысле, что левая и правая компоненты спинора $\chi(x)$ преобразуются независимо:

$$\delta\chi_\pm = \epsilon_\pm - i\bar{\epsilon}\gamma_\mu \chi_\pm \partial^\mu \chi_\pm\,.$$

$$\chi(x) = \frac{1+i\gamma_5}{2}\lambda(Z^-(x,\lambda)) + \frac{1-i\gamma_5}{2}\lambda(Z^+(x,\lambda)), \qquad /28/$$

$$Z^\pm_\mu(x,\lambda) \pm \frac{1}{4}\bar{\lambda}^c(Z^\pm)\gamma_\mu\gamma_5\lambda(Z^\pm) = x_\mu \qquad /29/$$

/в отличие от эквивалентных замен для пионов связь /28/ включает производные поля $\lambda(x)$ /. Методом, аналогичным использованному в *Приложении А*, можно проверить, что для спинора $\chi(x)$, определенного формулой /28/, преобразование /2/ поля $\lambda(x)$ индуцирует преобразование /27/. Спинор $\chi(x)$ является майорановским. В этом нетрудно убедиться, приняв во внимание правило комплексного сопряжения

$$(Z^\pm_\mu)^\dagger = Z^\mp_\mu\,,$$

которое следует из вида уравнений /29/.

3. При построении линейных представлений из полей нелинейной реализации в обычных симметриях используется ряд общих теорем, выведенных Коулменом, Вессом и Зумино /7/. Все эти теоремы допускают обобщение на случай суперсимметрии.

Одна из них определяет класс представлений данной группы, которые можно построить на основе набора σ -полей, принадлежащих к фиксированному представлению R подгруппы стабильности. Этот класс включает только те представления, которые содержат R при редукции по подгруппе стабильности. Если R входит в некоторое представление m раз, то существует m независимых способов построения последнего. Чтобы проверить, что аналогичные утверждения справедливы и для суперсимметрии, необходимо проанализировать общее соотношение /19/. Отвлекаясь от способа, которым /19/ было получено, замечаем, что любой лоренцев мультиплет σ -полей в правой части уравнения /19/ можно положить равным нулю, не нарушив этим трансформационных свойств суперполя $\Phi_k(x,\theta)$ в левой части /такие условия приводят к ковариантным соотношениям между компонентами $\Phi_k(x,\theta)$, подобным условию $\sigma^2+\pi^2=1$ в киральной динамике * /. Таким образом, приходим к выводу, что суперполе $\Phi_k(x,\theta)$ может быть восстановлено /нелинейно/ на основе по крайней мере одного неприводимого по группе Лоренца набора σ-полей. Необходимо только, чтобы такой же лоренцев мультиплет содержался среди компонент $\Phi_k(x,\theta)$. Ясно, что если этот мультиплет встречается в $\Phi_k(x,\theta)$ несколько раз, то существует столько же неэквивалентных суперполей $\Phi_k(x,\theta)$, построенных с помощью одного и того же набора σ-полей и обладающих одинаковыми трансформационными свойствами. Например, имея скаляр $\sigma(x)$, можно образовать три общих скалярных суперполя:

$$\Phi^1(x,\theta)=\tilde{\sigma}(x,\theta), \quad \Phi^2(x,\theta)=\bar{\tilde{\lambda}}(x,\theta)\tilde{\lambda}(x,\theta)\tilde{\sigma}(x,\theta),$$

$$\Phi^3(x,\theta)=[\bar{\tilde{\lambda}}(x,\theta)\tilde{\lambda}(x,\theta)]^2\tilde{\sigma}(x,\theta)$$

в соответствии с числом скалярных компонент в таком суперполе. На основе псевдоскалярного поля $\sigma_5(x)$ возможно построение только одного скалярного суперполя:

$$\Phi(x,\theta)=\bar{\tilde{\lambda}}(x,\theta)\gamma_5\tilde{\lambda}(x,\theta)\sigma_5(\tilde{x}),$$

что снова находится в согласии с обсуждаемой теоремой, поскольку подгруппа стабильности нелинейной реализации суперсимметрии включает, наряду с собственными преобразованиями Лоренца, также и отражения пространства-времени **.

Легко проверяются и остальные теоремы статьи [7]. В качестве примера рассмотрим ту из них, согласно

* Подробнее обсуждение аналогичных условий в случае произвольной внутренней симметрии можно найти в работе [11].

** Напомним, что пуанкаре-трансляции принадлежат фактор-пространству, причем координата x_μ играет роль голдстоуновского поля, связанного с генератором P_μ [5].

которой из одних голдстоуновских полей /без использования их производных/ можно построить только такие представления данной группы, которые содержат инварианты подгруппы стабильности. /Эта теорема является в действительности следствием рассмотренной выше [7] /. В случае суперсимметрии с помощью одних полей $\lambda(x)$ мы в состоянии построить только скалярное, псевдоскалярное, спинорное и псевдовекторное суперполя /перемножая базисные спинорные суперполя /21/ и учитывая их грассманов и майорановский характер/. Но только эти суперполя и включают скалярные компоненты. Из этого ясна справедливость обсуждаемой теоремы. Специфическая черта случая суперсимметрии состоит в том, что суперполя, построенные таким способом, хотя и начинаются с членов без производных, тем не менее с необходимостью содержат производные поля $\lambda(x)$ в последующих членах. Конечно, совершая замену $x_\mu \to \tilde{x}_\mu(x,\theta)$ в ковариантных производных $\nabla_\rho\lambda(x)$, можно получить суперполя и более высоких внешних спинов, но все они будут начинаться с производных поля $\lambda(x)$.

Результаты, полученные в разделах II, III, допускают прямое расширение на суперсимметрии, более сложные, чем стандартная. Действительно, для того, чтобы определить отображение типа /4/, /19/, достаточно знать, как данная суперсимметрия реализуется в соответствующем суперпространстве. Как только такая реализация найдена, расщепленное представление для произвольного суперполя достигается подстановкой голдстоуновского фермиона соответствующей нелинейной реализации /взятого со знаком минус/ в преобразованное суперполе вместо спинорного параметра. Обращая полученные соотношения, можно вывести общие алгоритмы для построения линейных представлений данной супергруппы в терминах нелинейной реализации. Было бы интересно, используя указанную процедуру, найти связь линейной и нелинейной реализаций градуированной группы OSp(1,4) [12,13], которая, по-видимому, играет важную роль в супергравитации [14,15].

IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе мы ограничились рассмотрением формальных, теоретико-групповых аспектов соотношения между суперполевым подходом и нелинейной реализацией Волкова-Акулова. В следующих публикациях мы обсудим, как это взаимосвязь проявляет себя на уровне лагранжианов со спонтанно нарушенной суперсимметрией. Можно ожидать, что общие закономерности и формулы, найденные в настоящей работе, окажутся полезными при построении суперполевой формулировки спонтанно нарушенной супергравитации и, в частности, приведут к суперполевому описанию суперсимметричного эффекта Хиггса, который до сих пор обсуждался только в рамках нелинейной реализации/15,16/.

Мы глубоко признательны В.И.Огиевецкому за интерес к работе и конструктивные замечания. Нам приятно поблагодарить Э.С.Сокачева и Б.М.Зупника за полезные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Мы покажем здесь, что θ -полиномы $\tilde{\sigma}_k(x,\theta)$ и $\tilde{\lambda}_\alpha(x,\theta)$, определенные формулами /21/, /22/, преобразуются линейно при преобразовании полей $\lambda_\alpha(x)$, $\sigma_k(x)$ по нелинейным законам /2/, /3/. Доказательство одинаково для $\tilde{\sigma}_k(x,\theta)$ и $\tilde{\lambda}_\alpha(x,\theta)$, поэтому достаточно провести его, например, для $\tilde{\lambda}_\alpha(x,\theta)$.

Чтобы найти полное инфинитезимальное преобразование полинома $\tilde{\lambda}_\alpha(x,\theta) = \lambda_\alpha(\tilde{X}(x,\theta)) - \theta_\alpha$ при фиксированных аргументах x,θ, необходимо поступить следующим образом: проварьировать функцию $\lambda_\alpha(\tilde{X}(x,\theta))$ при фиксированном $\tilde{X}_\mu$ по закону /2/ и, кроме того, учесть изменение $\tilde{X}_\mu(x,\theta)$ за счет нелинейного сдвига поля $\lambda_\alpha(x)$:

$$\delta\tilde{\lambda}_\alpha(x,\theta) = \epsilon + \frac{1}{2i}\bar{\epsilon}\gamma_\mu\lambda(\tilde{X})\frac{\partial}{\partial\tilde{X}_\mu}\lambda_\alpha(\tilde{X}) + \delta\tilde{X}_\mu\frac{\partial}{\partial\tilde{X}_\mu}\lambda_\alpha(\tilde{X}), \qquad /A.1/$$

где $\delta\tilde{X}_\mu$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\delta^\rho_\mu - \frac{1}{2i}\frac{\partial}{\partial\tilde{X}_\rho}\bar{\lambda}(\tilde{X})\gamma_\mu\theta\right)\delta\tilde{X}_\rho = \frac{1}{2i}\bar{\epsilon}\gamma_\mu\theta + \frac{1}{4}\bar{\lambda}(\tilde{X})\gamma_\rho\epsilon\frac{\partial}{\partial\tilde{X}_\rho}\bar{\lambda}(\tilde{X})\gamma_\mu\theta, \qquad /A.2/$$

которое представляет собой результат варьирования уравнения /20/. Замечая, что

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{X}_\mu} = \frac{\partial x_\rho}{\partial\tilde{X}_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\rho} = \left[\delta^\mu_\beta - \frac{1}{2i}\frac{\partial}{\partial\tilde{X}_\mu}\bar{\lambda}(\tilde{X})\gamma_\beta\theta\right]\frac{\partial}{\partial x_\beta}, \qquad /A.3/$$

и подставляя /A.2/, /A.3/ в /A.1/, находим

$$\delta\tilde{\lambda}_\alpha(x,\theta) = \epsilon + \frac{1}{2i}\bar{\epsilon}\gamma_\mu\lambda(X)\frac{\partial}{\partial x_\mu}\lambda_\alpha(\tilde{X}) + \frac{1}{2i}\bar{\epsilon}\gamma_\mu\theta\frac{\partial}{\partial x_\mu}\lambda_\alpha(\tilde{X}). \qquad /A.4/$$

Используя соотношение /23/, можно записать /A.4/ в виде

$$\delta\tilde{\lambda}_\alpha(x,\theta) = -\bar{\epsilon}\left[\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} - \frac{1}{2i}(\gamma_\mu\theta)\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right]\tilde{\lambda}_\alpha(x,\theta), \qquad /A.5/$$

что совпадает со стандартным преобразованием суперполя.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Простейшими киральными "усеченными" суперполями, которые можно построить из θ -полиномов /24/, являются скалярные суперполя:

$$S^\pm(x,\theta_\pm) = \bar{\tilde{\lambda}}^c_\pm(x,\theta_\pm)\tilde{\lambda}_\pm(x,\theta_\pm) = \bar{\lambda}^c_\pm(\tilde{X}^\pm)\lambda_\pm(\tilde{X}^\pm) - 2\bar{\theta}_\pm\lambda_\pm(\tilde{X}^\pm) + \bar{\theta}_\pm\theta_\pm. \qquad /Б.1/$$

В качестве примера выпишем явную структуру компонент суперполя $S^+(x,\theta_+)$ в терминах $\lambda(x)$ и его производных. Чтобы сделать запись более компактной, удобно перейти к спинору $\omega(x)$:

$$\omega(x) = \lambda(Z^+(x,\lambda)),$$

где $Z^{+}_{\mu}(x,\lambda)$ определена одним из уравнений /29/. В терминах $\omega(x)$ имеем:

$$\lambda(\tilde{X}^{+}) = \omega(\hat{X}^{+}),$$
$$\hat{X}^{+}_{\mu} + i\bar{\omega}^{c}(\hat{X}^{+})\gamma_{\mu}\theta_{+} = x_{\mu} . \qquad /Б.2/$$

Разлагая обе стороны соотношения /Б.1/ с учетом уравнений /Б.2/, для компонент суперполя $S^{+}(x,\theta_{+})$ находим:

$$A_{+}(x) = \bar{\omega}^{c}(x)\frac{1+i\gamma_5}{2}\omega(x),$$

$$\psi_{+}(x) = -(1+i\gamma_5)\omega(x) + \frac{i}{2}(1+i\gamma_5)(\gamma_{\mu}\omega)\partial^{\mu}(\bar{\omega}^{c}\frac{1+i\gamma_5}{2}\omega),$$

$$F_{+}(x) = 2 - i\bar{\omega}^{c}\gamma_{\mu}\frac{1+i\gamma_5}{2}\partial^{\mu}\omega + \frac{1}{2}\bar{\omega}^{c}\gamma_{\rho}\gamma_{\mu}\frac{1-i\gamma_5}{2}\partial^{\rho}\omega \times$$

$$\times\partial^{\mu}(\bar{\omega}^{c}\frac{1+i\gamma_5}{2}\omega) + \frac{1}{4}\bar{\omega}^{c}\frac{1-i\gamma_5}{2}\omega\,\Box(\bar{\omega}^{c}\frac{1+i\gamma_5}{2}\omega).$$

/Б.3/

Используя супертрансформационные свойства спинора $\omega(x)$:

$$\delta\omega(x) = \epsilon + \frac{1}{2i}\bar{\epsilon}\gamma_{\mu}(1-i\gamma_5)\omega(x)\partial^{\mu}\omega(x),$$

мы непосредственно убедились, что функции /Б.3/ действительно образуют левосторонний скалярный супермультиплет. Заметим, что компоненты суперполя $S^{-}(x,\theta_{-})$ получаются из /Б.3/ комплексным сопряжением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольфанд Ю.А., Лихтман Е.П. Письма в ЖЭТФ, 1971, 13, с.452.
2. Wess J., Zumino B. Nucl.Phys., 1974, B70, p.39.

3. Salam A., Strathdee J. Nucl.Phys., 1974, B76, p.477.
4. Salam A., Strathdee J. Phys.Rev., 1975, D11, p.1521.
5. Волков Д.В., Акулов В.П. Письма в ЖЭТФ, 1972, 16, с.621;
   Volkov D.V., Akulov V.P. Phys.Lett., 1973, 46B, p.109.
6. Пашнев А.И. ТМФ, 1974, 20, с.141.
7. Coleman S., Wess J., Zumino B. Phys. Rev., 1969, 177, p.2239.
8. Zumino B. In: Proc. of 17-th Int. Conf. on High Energy Physics, London, 1974, p.1-254.
9. Sokatchev E. Nucl.Phys., 1975, B99, p.96.
10. Weinberg S. Phys.Rev., 1968, 166, p.1568.
11. Иванов Е.А. ТМФ, 1976, 28, с.320.
12. Keck B.W. Journ. of Phys., 1975, A8, p.1819.
13. Zumino B. Nucl.Phys., 1977, B127, p.189.
14. McDowell S.W., Mansouri F. Phys.Rev.Lett., 1977, 38, p.739.
15. Deser S., Zumino B. Phys.Rev.Lett., 1977, 38, p.1433.
16. Волков Д.В., Сорока В.А. Письма в ЖЭТФ, 1973, 18, с.1433.

Рукопись поступила в издательский отдел 21 апреля 1978 года.