

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



31/vii - 78

P2 - 11443

Б-708

3155/2-78

Р.Э.Блувштейн, В.М.Дубовик

О ВЫВОДЕ ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ
ПО МАССЕ АДРОНА
ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ФОРМФАКТОРОВ.
АНОМАЛЬНЫЕ ПОРОГИ

1978

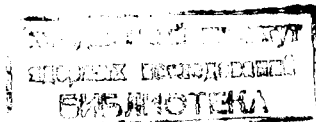
P2 - 11443

Р.Э.Блувштейн,* В.М.Дубовик

О ВЫВОДЕ ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ
ПО МАССЕ АДРОНА
ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ФОРМФАКТОРОВ.
АНОМАЛЬНЫЕ ПОРОГИ

Направлено в ТМФ

* Институт проблем материаловедения АН УССР, Киев.



Блувштейн Р.Э., Дубовик В.М.

P2 - 11443

О выводе дисперсионных соотношений по массе адрона для электромагнитных формфакторов. Аномальные пороги

С помощью представления Йоста-Лемана-Дайсона установлена справедливость дисперсионного соотношения по инвариантной массе $k^2 = W^2$ для электромагнитного формфактора $F(k^2 = W^2, p^2 = m^2, q^2 > 0)$ в подпороговой области значений q^2 . Из анализа треугольного фейнмановского графа с произвольными внешними и внутренними массами найдено условие возникновения аномальных порогов в этих дисперсионных соотношениях.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Bluvstein R.E., Dubovik V.M.

P2 - 11443

On the Derivation of Dispersion Relations by a Hadron Mass for Electromagnetic Form Factors. Anomalous Thresholds

Using the Jost-Lehman-Dyson representation the validity of the dispersion relation is determined by the $k^2 = W^2$ invariant mass for electromagnetic form factor $F(k^2 = W^2, p^2 = m^2, q^2 > 0)$ in the threshold region of q^2 values. From analysis of triangle Feynman graph with arbitrary external and inner masses the condition of anomalous thresholds in these dispersion relations is found.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research.

Dubna 1978

Начиная с классических работ^{/1,2/}, проблема доказательств дисперсионных соотношений /далее д.с./ решается, в основном, тогда, когда в качестве дисперсионной переменной выбирается либо инвариантная масса начальных частиц в с.ц.м., либо квадрат переданного 4-импульса. В последние годы все больше практических применений получают дисперсионные соотношения по инвариантной массе одной из частиц реакции. Изучение с помощью таких соотношений электромагнитных формфакторов /ф.ф./ было начато в работе^{/3/*}. В работах^{/4/} было показано, что учет нелинейной части соотношения унитарности в д.с. по внешней адронной массе $k^2 = W^2$ для формфактора $F(k^2 = W^2, p^2 = m^2, q^2)$ приводит к системе связанных линейных алгебраических уравнений между формфакторами и амплитудами различных процессов в духе идеи бутстрапа. Д.с. по W^2 позволяют выйти за рамки результатов, следующих из унитарных симметрий, решать вопрос об аналитическом продолжении ф.ф. $F(k^2, p^2, q^2)$ по квадратам 4-импульсов внешних масс, исследовать амплитуды трудноизмеряемых процессов, вычислять различные /в том числе и переходные/ моменты частиц^{/7/}.

В настоящей работе рассматриваются формальные основы таких д.с. С помощью представления Йоста-Лемана-Дайсона для причинного коммутатора доказана аналитичность ф.ф. $F(W^2; q^2 \geq 0)$ скалярного нуклона**

* См. обзор работ в^{/4/}, а также последние работы^{/5,6/}

** Для простоты все частицы считаются бесспиновыми. С помощью операторов проектирования все результаты можно распространить на адроны с произвольным спином /см. напр.^{/3/ /}.

в верхней полуплоскости комплексного W^2 с разрезом $\text{Re } W^2 \geq W_{\text{порог}}^2$ при подпороговых значениях q^2 . В п.2 из анализа треугольного графа теории возмущений найдено условие возникновения аномальных порогов в рассматриваемых д.с., когда нуклон и фотон находятся вне массовых поверхностей. В п.3 результаты п.2 обобщаются на случай произвольных внешних и внутренних масс треугольного графа. Рассмотрены простейшие примеры.

1. Электромагнитный ф.ф. вершины скалярных нуклонов /рис. 1/ для времениподобных q^2 записывается с помощью формул аксиоматики Лемана-Симанчика-Циммермана следующим образом* :

$$K(W^2, q^2 = (p+k)^2) = \langle k, p | j(0) | 0 \rangle = \int d^4 x e^{ikx} \Theta(-x_0) \langle p | [j(0), \eta(x)] | 0 \rangle, \quad /1a/$$

где

$$\Theta(x_0) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x_0}{|x_0|} \right),$$

$\eta(x) = (\square^2 + m^2) \phi(x)$, $\phi(x)$ - функция скалярного поля.

Для времениподобных q^2 величина $kh = \sqrt{(k_0+m)^2 - q^2}$ в экспоненте $\exp ikx = \exp i[k_0 x_0 - (ex)h]$, определенная в системе $p=0$, может стать мнимой, нарушив сходимость интеграла в /1a/.

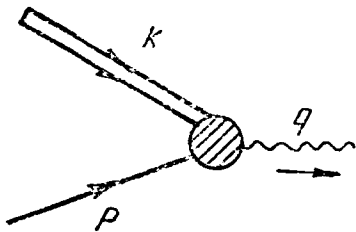


Рис. 1. Электромагнитная вершина адронов для времениподобных q^2 . Импульс одного из адронов находится вне массовой поверхности.

* Все кинематические обозначения и соотношения приведены на рис. 1 и в Приложении 1.

Чтобы осуществить аналитическое продолжение в область $q_0 > 0$, воспользуемся классической процедурой /1/ для выхода в комплексную область по кинематическим переменным двух частиц. Положим:

$$\omega = \omega_1 + i\omega_2, \quad \text{где } \text{Re } \omega = k_0,$$

$$\xi = \xi_1 + i\xi_2, \quad \text{Re } \xi = q^2,$$

и рассмотрим в системе $\vec{p}=0$ трехточечную функцию

$$G(\omega, \xi) = \int d^4 x e^{i\omega x_0 - i\sqrt{(\omega+m)^2 - \xi}} \Theta(-x_0) \langle 0, m | [j(0), \eta(x)] | 0 \rangle, \quad /2/$$

равную ф.ф. $K(W^2, q^2)$, когда переменные ω, q находятся на массовых поверхностях физических частиц $\omega_2 \rightarrow 0^-$, $\xi_2 \rightarrow 0^+$, $q^2 > 0$. Функция $G(\omega, \xi)$ аналитична во всяком случае в области R_1

$$R_1 : \begin{cases} (\omega_1 + m)^2 \geq \xi_1; & \xi_1 \leq 0 \\ 2\omega_2 [\omega_1 + m - \sqrt{(\omega_1 + m)^2 - \xi_1}] \leq \xi_2 \leq 2\omega_2 [\omega_1 + m + \sqrt{(\omega_1 + m)^2 - \xi_1}] \\ \omega_2 > |\text{Im} \sqrt{(\omega_1 + m)^2 - \xi_1}|. \end{cases}$$

В этой области величина $\xi_1 = q^2 < 0$, в то время, как ф.ф. $K(W^2, q^2 = (p+k)^2)$ канала аннигиляции определен для $q^2 > 0$. Предельный переход $\omega_2 \rightarrow 0^+$, $\xi_2 \rightarrow 0^+$ функции $G(\omega, \xi)$ в области R_1 к физическим переменным приводит к функции $I(W^2, t = (p-k)^2 < 0)$, являющейся ф.ф. электромагнитной вершины для пространственноподобных 4-импульсов фотона /см. рис. 2/

$$I(W^2, t < 0) = \langle p | j(0) | k \rangle =$$

$$= \int d^4 x e^{-ikx} \Theta(-x_0) \langle p | [j(0), \eta(x)] | 0 \rangle. \quad /16/$$

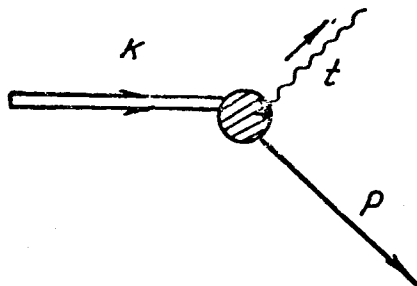


Рис. 2. Электромагнитная вершина адронов для пространственноподобных $t = (p-k)^2$. Импульс одного из адронов находится вне массовой поверхности.

Ф.ф. $I(W^2, t)$ аналитичен в области R_2 /3/ /см. также /8/

R_2 : $\left\{ \begin{array}{l} \text{верхняя полуплоскость комплексного } W^2 \\ \text{с разрезом } \text{Re } W^2 \geq W^2_{\text{норм. порог}} = (m+\mu)^2, \text{ где} \\ \mu - \text{масса пиона} \\ t = (p-k)^2 \leq 0 \end{array} \right.$ /см. рис. 3/.

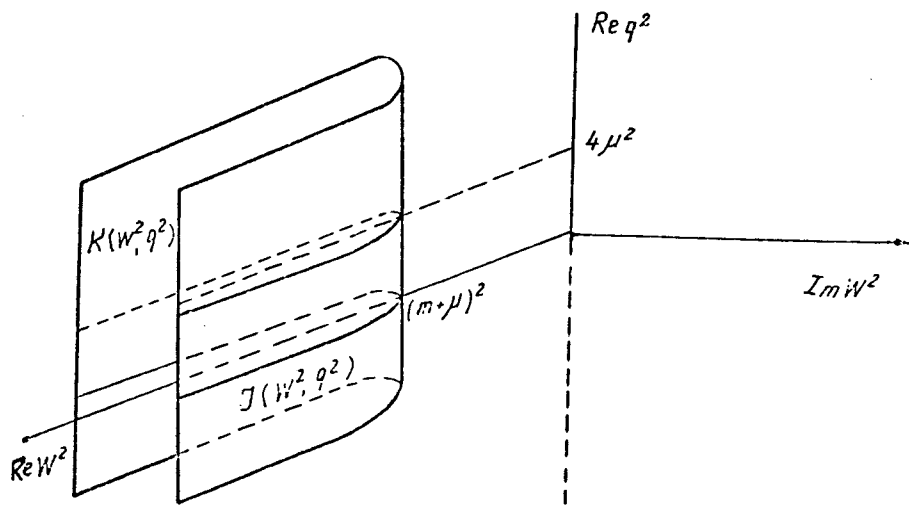


Рис. 3. Область аналитичности ф.ф. электромагнитной вершины адронов. Ф.ф. аналитичен в верхней полуплоскости W^2 с разрезом $W^2 \geq (m+\mu)^2$.

Таким образом возникает задача аналитического продолжения функции $G(\omega, \xi)$ по переменной ξ в полосу вдоль действительной оси ξ вплоть до положительных значений $q^2 = \text{Re } \xi$. Спектральные функции ф.ф. $K(W^2, q^2)$ и $I(W^2, t)$ в областях их аналитичности имеют соответственно вид

$$\rho(W^2, q^2 = (p+k)^2 > 0) = \frac{1}{2} \int d^4x e^{ikx} \langle p | [j(0), \eta(x)] | 0 \rangle =$$

$$= \frac{1}{2} (2\pi)^4 \sum_{\ell} \delta(k+\ell) \Theta(-k_0) \langle p | j(0) | -\ell \rangle \langle -\ell | \eta(0) | 0 \rangle -$$

$$- \sum_{\ell'} \delta(p+k-\ell') \Theta(q_0) \langle p | \eta(0) | \ell' \rangle \langle \ell' | j(0) | 0 \rangle ; \quad /3/$$

$$\sigma(W^2, t = (p-k)^2 < 0) = \frac{1}{2} \int d^4x e^{-ikx} \langle p | [j(0), \eta(x)] | 0 \rangle =$$

$$= \frac{1}{2} (2\pi)^4 \sum_{\ell} \delta(\ell-k) \Theta(k_0) \langle p | j(0) | \ell \rangle \langle \ell | \eta(0) | 0 \rangle -$$

$$- \sum_{\ell'} \delta(p-k-\ell') \Theta(q_0) \langle p | \eta(0) | \ell' \rangle \langle \ell' | j(0) | 0 \rangle . \quad /4/$$

Низшее состояние, дающее вклад в сумму по ℓ , как $\rho(W^2, q^2)$, так и в $\sigma(W^2, t)$ есть $N\pi$ -состояние, поскольку матричный элемент $\langle \text{одна частица} | \eta(0) | 0 \rangle$ равен нулю; векторы состояний в суммах по ℓ' вообще не зависят от дисперсионной переменной. Поэтому $\text{Im } K(W^2, q^2)$, как и $\text{Im } I(W^2, t)$, отличны от нуля только при $W^2 \geq W^2_{\text{норм. порог}} = (m+\mu)^2$. Из формул /1/-/4/

следует, что функция $K(W^2, k \rightarrow -k, q^2 \rightarrow t)$ в области R_2 совпадает с функцией $I(W^2, t)$, аналитичной в этой области

$$K(p, -k) = I(p, k) . \quad /5/$$

Это соотношение превращается в соотношение перекрестной симметрии для электромагнитного ф.ф. адрона при

осуществлении аналитического продолжения функции $G(\omega, \xi)$ в область $\text{Re} \xi \equiv q^2 > 0$ /8/.

Докажем, что функцию $G(\omega, \xi)$ можно аналитически продолжить из полосы

$$-\infty < \xi_1 \leq 0; \quad |\xi_2| \leq \delta$$

в область времениподобных $\xi_1 \equiv q^2 > 0$ для всех $W^2 \geq W_{\text{норм.порог}}^2 = (m+\mu)^2$, т.е. что $G(\omega, \xi)$ - аналитическая функция в области R_3

т.е. что $G(\omega, \xi)$ - аналитическая функция в области R_3

$$R_3: \begin{cases} \text{верхняя комплексная полуплоскость } W^2 \\ \text{с разрезом } \text{Re} W^2 \geq W_{\text{норм.порог}}^2 \\ -\infty < q^2 < 4\mu^2, \end{cases}$$

и, следовательно, функции $K(W^2, q^2)$ и $I(W^2, t)$ являются в этой области аналитическим продолжением одна другой. Используем для этого информацию о спектрах масс в абсорбтивных частях ф.ф. и применим представление Йоста-Лемана-Дайсона /9/ к причинному коммутатору в $M(\omega, \xi)$, где $M(\omega, \xi)$ - сумма по ℓ в /3/. Тогда функция $M(\omega, \xi)$ запишется так:

$$M(\omega, \xi) = \int d^4 y d\lambda^2 \frac{\Phi(y, \lambda^2, k, ky)}{(p - \frac{k}{2} - y + i\epsilon)^2 - \lambda^2} \quad /6/$$

Здесь $\Phi(\dots)$ - реальная весовая функция, отличная от нуля лишь в области S :

$$S: \begin{cases} y - \sqrt{\frac{k^2}{4}} \leq y_0 \leq \sqrt{\frac{k^2}{4}} - y, \\ 0 \leq y \leq \sqrt{\frac{k^2}{4}}, \\ \lambda \geq \max \{ 0; m+\mu - \sqrt{(y - \frac{k}{2})^2}; 2\mu - \sqrt{(y + \frac{k}{2})^2} \}, \end{cases}$$

где $y = |\vec{y}|$.

Интегрируя /6/ в системе $\vec{k}=0$ /см. рис. 4/ по телесному углу $d\Omega_y$, получаем

$$M(\omega, \xi) = \frac{\pi}{\sqrt{p_0^2 - m^2}} \int d\lambda^2 dy_0 dy \cdot y \Phi(y, y_0, \lambda^2) \ln \left| \frac{A+B}{A-B} \right|,$$

где

$$A = [y_0 - (p_0 + \frac{k_0}{2})]^2 - \lambda^2 - (p_0^2 - m^2) - y^2, \quad /7/$$

$$B = 2y \sqrt{p_0^2 - m^2}.$$

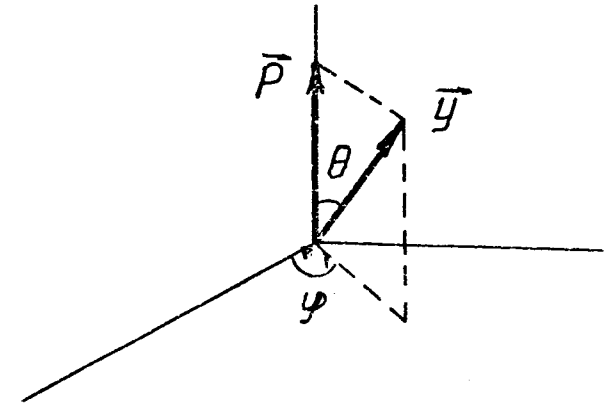


Рис. 4. Область интегрирования по телесному углу в интеграле /6/.

Область S и конус особенностей $A = \pm B$ подынтегрального выражения в /7/ не пересекаются /см. рис. 5/, при условии $-\infty < \xi_1 < 4\mu^2$. Следовательно, абсорбтивную часть функции $G(\omega, \xi)$ можно аналитически продолжить по ξ из области R_1 в область времениподобных $0 \leq q^2 < 4\mu^2$. Тогда в полосе

$$-\infty < \xi_1 < 4\mu^2$$

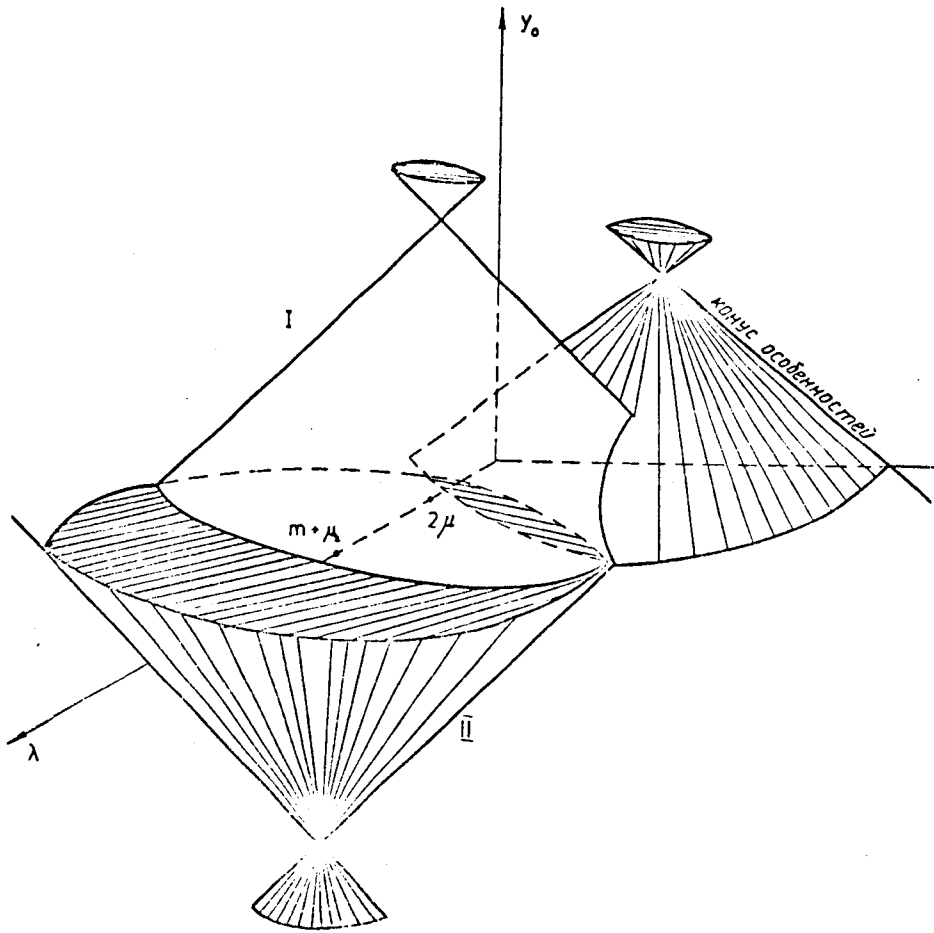


Рис. 5. Пересечение конуса особенностей интеграла /6/ и области S /заштриховано внутри/. S - область пересечения конусов.

возможен предельный переход

$$\lim_{\substack{\omega_2 \rightarrow 0^- \\ \xi_2 \rightarrow 0^+}} G(\omega_1 + i\omega_2, \xi_1 + i\xi_2) = K(W^2, q^2) \quad /8/$$

Итак, доказано, что ф.ф. $F(W^2, q^2)$ * электромагнитной вершины есть аналитическая функция квадрата импульса $k^2 = W^2$ внешнего адрона в верхней полуплоскости комплексной переменной W^2 с разрезом $\text{Re } W^2 \geq W_{\text{норм. порог}}^2 = (m+\mu)^2$ для любых пространственноподобных значений q^2 и времениподобных q^2 в области $0 \leq q^2 < 4\mu^2$ /см. рис. 3/.

Оставляя в стороне вопрос о количестве вычитаний, напишем теперь д.с. по внешней нуклонной массе для ф.ф. электромагнитной вершины

$$F(W^2, q^2) = \text{const} + \int_{(m+\mu)^2}^{\infty} \frac{\text{Im } F(W'^2, q^2)}{W'^2 - W^2} dW'^2, \quad /9/$$

строго доказанное в области

$$-\infty < q^2 < 4\mu^2.$$

Аналитическое продолжение по переменной q^2 д.с. /9/ в область $q^2 \geq 4\mu^2$ возможно лишь при отсутствии особенностей типа точек ветвления спектральной функции

$\rho(W^2, q^2) = \frac{1}{2\pi i} \text{Im } F(W^2, q^2)$ **. Исследуем аналитические свойства $\rho(W^2, q^2)$ в рамках теории возмущений, ограничившись рассмотрением треугольной диаграммы /рис. 6/, и разберем вопрос о возникновении аномальных порогов.

2. Рассматриваемая вершина /см. рис. 1/ содержит две частицы вне массовой поверхности. Физическая область аннигиляционного канала $W_{\text{физ}} \geq \sqrt{q^2 - m}$; унитарный порог реакции равен $W_{\text{унит.}} = m + \mu$ /см. рис. 6/.

Физическая область аннигиляционного канала $W_{\text{физ}} \geq \sqrt{q^2 - m}$; унитарный порог реакции равен $W_{\text{унит.}} = m + \mu$ /см. рис. 6/.

* Доказав, что функции $K(W^2, q^2)$ и $I(W^2, t)$ в области R_3 являются аналитическим продолжением одна другой, мы вводим для них единое обозначение $F(W^2, q^2)$.

** Этот вопрос исследован в работе /10/.

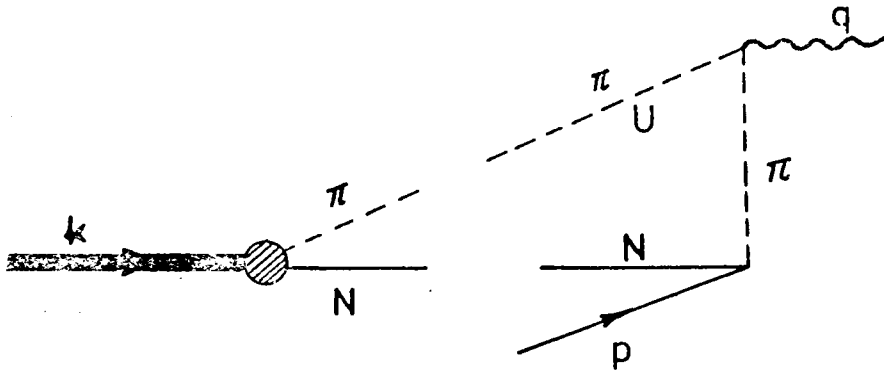


Рис. 6. Треугольная диаграмма электромагнитной вершины адронов с πN -промежуточным состоянием.

На рис. 7 показана физическая область данного процесса.

В области 1: $\sqrt{q^2} - m \leq W < m + \mu$, т.е. унитарный порог лежит "внутри" физической области. Область 2 определяется неравенствами $W \geq m + \mu$, $W \geq \sqrt{q^2} - m$,

$\sqrt{q^2} < 2m + \mu$, т.е. $m + \mu > \sqrt{q^2} - m$, и, как и в области 1, $W_{\text{физ}} < W_{\text{унит}}$. В области 3, задаваемой неравенствами

$W \geq m + \mu$; $W \geq \sqrt{q^2} - m$; $\sqrt{q^2} > 2m + \mu$ порог реакции образования промежуточных частиц находится вне

физической области процесса, т.е. $m + \mu < \sqrt{q^2} - m$, $W_{\text{унит}} < W_{\text{физ}}$; соотношение унитарности не имеет непосредственного смысла в этой области и возникает проблема продолжения условия унитарности*:

Осуществив аналитическое продолжение, мы покажем, что д.с. /9/ справедливо в данном порядке теории возмущений и соотношение перекрестной симметрии /5/ верно для всех времениподобных q^2 . С этой целью

* Заметим, что рассмотрение Мандельштамом этой проблемы в области $q^2 > 0$ не оправдано без доказательства аналитичности $F(W^2, q^2 > 0)$ /11/.

вычислим спектральную функцию $\rho(W^2, q^2)$ векторного оператора $\langle p, k | j(0) | q \rangle$ в пределе двухчастичной унитарности и полюсного приближения для амплитуды обратного электророждения /см. рис. 6/. Тогда спектральная функция $\rho(W^2, q^2)$ в системе $\vec{k} = 0$ равна

$$\rho(W^2, q^2) = \frac{(2\pi)^4}{4} F_{\pi}(q^2) g_{\pi NN} g_{\pi NH} \frac{W^2 + m^2}{mW^2 |\vec{p}|} \ln \left| \frac{a(u_0) + 1}{a(u_0) - 1} \right|, \quad /10/$$

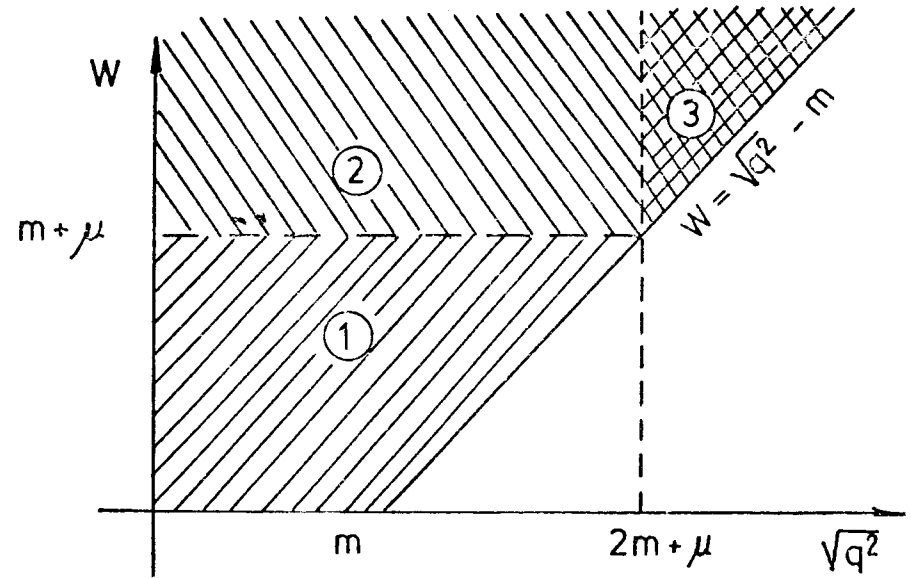


Рис. 7. Физический и унитарный пороги треугольной диаграммы электромагнитного ф.ф. адронов с πN -промежуточным состоянием.

где $F_{\pi}(q^2)$ - электромагнитный ф.ф. пиона, $g_{\pi NN}$, $g_{\pi NH}$ - константы связи вершин πNN и $\pi N \text{Hadron}$, а

$$a(u_0) = \frac{q^2 - 2q_0 u_0}{2|\vec{q}||\vec{u}|}, \quad u_0 = \frac{W^2 - m^2 + \mu^2}{2W}.$$

В области, где $a(u_0)$ - реальная функция, т.е. $r = |\dot{a}| |\vec{u}|$ - вещественно, спектральная функция $\rho(W^2, q^2)$ имеет логарифмическую точку ветвления при $a^2(W^2, q^2) = 1$. Положение особенности и ее движение с изменением q^2 определяется вытекающим отсюда уравнением

$$W^4 - W^2(3q^2 + 2m^2) + \frac{m^2}{\mu^2} q^4 - q^2(3m^2 - \mu^2) + m^4 = 0. \quad /11/$$

Если r становится чисто мнимым, т.е. $|\vec{q}|^2 |\vec{u}|^2 < 0$, логарифм в /10/ переходит в функцию арктангенс, не имеющую особенностей

$$\ln \left| \frac{a(u_0) + 1}{a(u_0) - 1} \right| = \ln \left| \frac{1 + iy}{1 - iy} \right| = 2i \operatorname{arctg} y,$$

где
$$y = \frac{2 \operatorname{Im} r}{q^2 - 2q_0 u_0}.$$

Области знакопостоянства величины $r^2 = |\vec{q}|^2 |\vec{u}|^2$ определяются с помощью неравенств

$$\begin{aligned} & [W^2 - (\sqrt{q^2} + m)^2][W^2 - (\sqrt{q^2} - m)^2][W^2 - (m + \mu)^2] \times \\ & \times [W^2 - (m - \mu)^2] \leq 0. \end{aligned} \quad /12/$$

На рис. 8 показаны эти области; заштрихованы области, где спектральная функция $\rho(W^2, q^2)$ в /10/ не может иметь логарифмической особенности. Проследим теперь за движением логарифмической точки ветвления. Согласно теореме Челлена-Вайтмана /12/, физическая трехточечная функция является граничным значением аналитической функции внешних масс, когда массы устремлены к вещественной оси сверху. Поэтому движение точки ветвления необходимо исследовать при сохранении у q

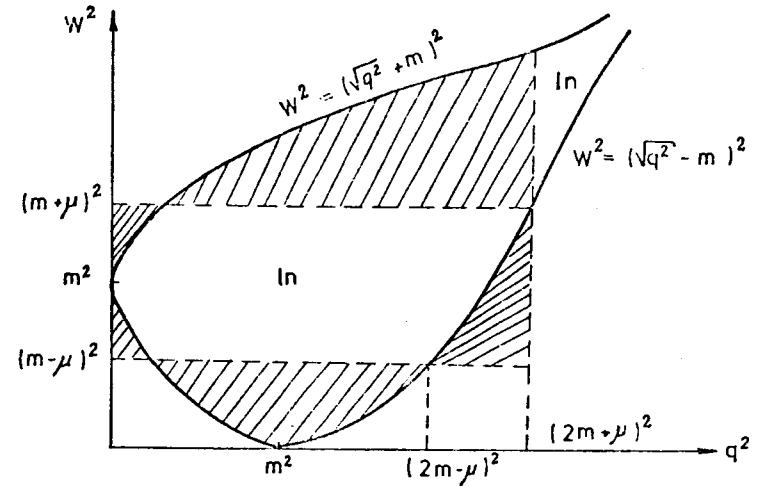


Рис. 8. Области знакопостоянства величины $r^2 = |\vec{q}|^2 |\vec{u}|^2$. Заштрихованы области, где амплитуда обратного электро-рождения не имеет логарифмической особенности /масштаб здесь и далее на рис. условный/.

бесконечно малой мнимой части $i\epsilon$ ($\epsilon > 0$). При $q^2 \rightarrow q^2 + i\epsilon$ решение уравнения /11/ имеет вид

$$\begin{cases} \operatorname{Re} W^2 = m^2 + \frac{3}{2} q^2 - \sqrt{q^2(\alpha - \beta q^2)} + O(\epsilon^2) \\ \operatorname{Im} W^2 = \epsilon \left[\frac{3}{2} - \frac{\alpha - 2\beta q^2}{2\sqrt{q^2(\alpha - \beta q^2)}} \right] \quad 0 \leq q^2 \leq \frac{\alpha}{2\beta} = 3\mu^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re} W^2 = m^2 + \frac{3}{2} q^2 + \sqrt{q^2(\alpha - \beta q^2)} + O(\epsilon^2) \quad \frac{\alpha}{2\beta} \leq q^2 < \frac{\alpha}{\beta}, \\ \operatorname{Im} W^2 = \epsilon \left[\frac{3}{2} - \frac{2\beta q^2 - \alpha}{2\sqrt{q^2(\alpha - \beta q^2)}} \right] \end{cases} \quad /13/$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re} W^2 = m^2 + \frac{3}{2} q^2 + \frac{3}{4} \epsilon \frac{2\beta q^2 - a}{\sqrt{q^2 |a - \beta q^2|}} \\ \operatorname{Im} W^2 = \sqrt{q^2 |a - \beta q^2|} - \frac{3}{2} \epsilon \sqrt{\beta} \end{array} \right. \quad q^2 > \frac{a}{\beta},$$

где $a = 6m^2 - \mu^2$, $\beta = (4m^2 - 9\mu^2)/4\mu^2$.

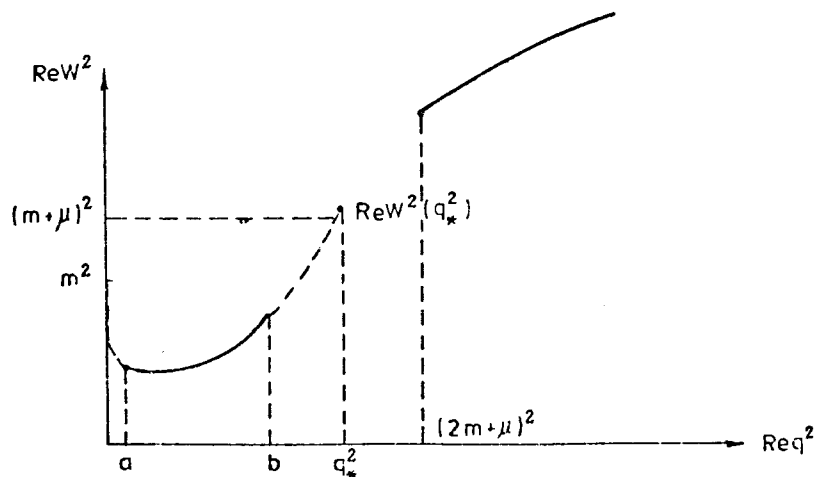


Рис. 9. Движение реальной части координаты точки ветвления спектральной функции $\rho(W^2, q^2)$ при возрастании q^2 . В точках a, b , $\operatorname{Im} W^2(q^2) = 0$. Пунктиром показаны участки траектории $\operatorname{Im} W^2(q^2) < 0$. Точка q_*^2 - выход линии через нормальный разрез на первый риманов лист.

На рис. 9 показана траектория движения реальной части координаты логарифмической точки ветвления $\operatorname{Re} W^2(q^2)$, а на рис. 10 нанесены области знакопостоянства функции $\operatorname{Im} W^2(q^2)$. При увеличении q^2 точка ветвления перемещается вправо, двигаясь то по верхней, то по нижней полуплоскостям второго риманового

листа. В точке $q_*^2 = \frac{a}{\beta} + \frac{9}{4} \frac{\beta}{a} \epsilon^2$ функция $\operatorname{Im} W^2(q^2)$ в /13/

меняет последний раз свой знак. При этом значение функции

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} W^2(q_*^2) &= m^2 + \frac{3}{2} \frac{a}{\beta} + \frac{a}{3\sqrt{\beta}} + O(\epsilon^2) = \\ &= m^2 + 3m\mu + O(\epsilon^2) > (m + \mu)^2 \end{aligned}$$

оказывается большим, чем $(m + \mu)^2$, и линия особенности выходит на первый риманов лист. Но выйдя на физический лист, движение точки ветвления прекращается, поскольку, согласно неравенству /12/, как показано на рис. 8, в этой области наблюдается переход $\ln(\dots) \rightarrow \operatorname{arctg}(\dots)$. Логарифмическая особенность у спектраль-

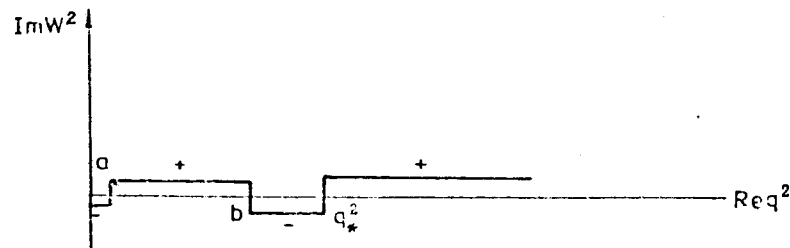


Рис. 10. Области знакопостоянства функции $\operatorname{Im} W^2(q^2)$. Точки a, b соответствуют точкам на рис. 9.

ной функции $\rho(W^2, q^2)$ возникает снова в области III при $q^2 > (2m + \mu)^2$ /рис. 7/. Однако это не приводит к возникновению аномального порога, т.к. в области

$q^2 > q_*^2$ производная $\frac{\partial \operatorname{Re} W(q^2)}{\partial q^2}$ функции /13/ поло-

жительная и нигде не меняет знак. Поэтому линия особенности при $q^2 > q_*^2$ движется по физическому листу все время вправо, и обхода вокруг точки ветвления не происходит. Движение особенности на двулистной поверхности показано на рис. 11.

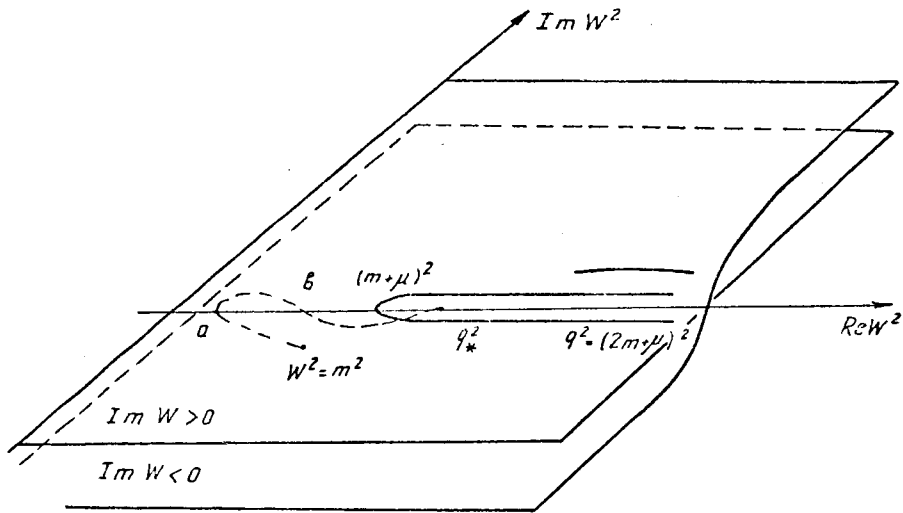


Рис. 11. Движение логарифмической особенности спектральной функции $\rho(W^2, q^2)$ на первом и втором римановых листах. Пунктиром показано движение на нефизическом листе.

Таким образом, ф.ф. вершины скалярных нуклонов WN_γ в данном рассмотрении не имеет аномального порога, так что д.с. /9/ можно теперь аналитически продолжить в область $q^2 \geq 4\mu^2$ и считать ф.ф. электромагнитной вершины скалярных адронов $F(W^2, q^2)$ аналитической функцией в верхней полуплоскости комплексной W^2 с разрезом $Re W^2 \geq (m+\mu)^2$ для $-\infty < q^2 < \infty$ /см. рис. 3/.

3. Рассмотрим ф.ф. $F(k^2 = W^2, q^2, p^2 = M^2)$ электромагнитной вершины для случая произвольных внешних и внутренних масс /см. рис. 12/. Спектральная функция $\rho(W^2, q^2)$, вычисленная в том же приближении, что и в п.2, содержит в этом случае

$$\ln \left| \frac{b(u_0^*) + 1}{b(u_0^*) - 1} \right|,$$

где

$$u_0^* = \frac{W^2 - m_1^2 + m_2^2}{2W}, \quad q_0 = \frac{W^2 + q^2 - M^2}{2W},$$

а функция $b(u_0^*)$ определяется так:

$$b(u_0^*) = \frac{q^2 - 2q_0 u_0^* + m_2^2 - m_3^2}{2|\vec{q}| |\vec{u}|}.$$

Уравнение движения особенности $b(u_0^*) = 1$ становится более громоздким, чем /11/:

$$\begin{aligned} & m_3^2 W^4 - W^2 [M^2 (m_2^2 + m_3^2) - (m_1^2 - m_3^2)(m_2^2 - m_3^2)] - \\ & - W^2 q^2 [m_1^2 + 3m_3^2 - M^2] + q^4 m_1^2 - q^2 [M^2 (m_1^2 + m_2^2) + \\ & + m_1^2 m_2^2 + m_1^2 m_3^2 - m_2^2 m_3^2 - m_1^4] + \\ & + M^2 [M^2 m_2^2 - (m_1^2 - m_2^2)(m_2^2 - m_3^2)] = 0. \end{aligned} \quad /14/$$

Уравнение /14/ переходит в уравнение /11/ при $M=m_1=m$, где m - масса нуклона, $m_2 = m_3 = \mu$, где μ - масса пиона. Области, в которых "исчезает" логарифмическая особенность спектральной функции $\rho(W^2, q^2)$, определяются в этом случае неравенством

$$[(W^2 + q^2 - M^2)^2 - 4W^2 q^2][(W^2 - m_1^2 + m_2^2)^2 - 4W^2 m_2^2] < 0, \quad /15/$$

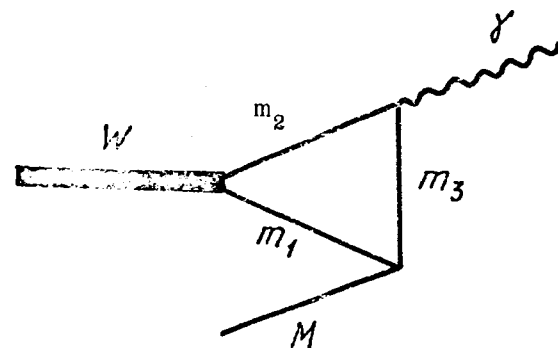


Рис. 12. Треугольная диаграмма электромагнитной вершины с произвольными внешними и внутренними массами $p^2 = M^2$.

и показаны на рис. 13. Исследование движения особенности при $q^2 \rightarrow q^2 + i\epsilon$ для произвольных масс очень сложно. Рассмотрим в качестве примера ф.ф дейтона /см. рис. 14/, соответствующий рис. 13. Движение особенности определяется уравнением

$$W^4 - 2W^2(D^2 + q^2 - q^2 \frac{D^2}{2m^2}) + q^4 - 2q^2 D^2 + D^4 = 0, \quad /16/$$

где D - масса дейтона.

Совместное решение уравнения /16/ и неравенства /15/ дает для $m_1 = m_2 = m_3 = m$; $M = D$ точку

$$q^2 = 4m^2(1 - \frac{D}{2m})^2$$

$$\text{Re } W^2(q_*^2) = 4m^2 + \epsilon^2 N$$

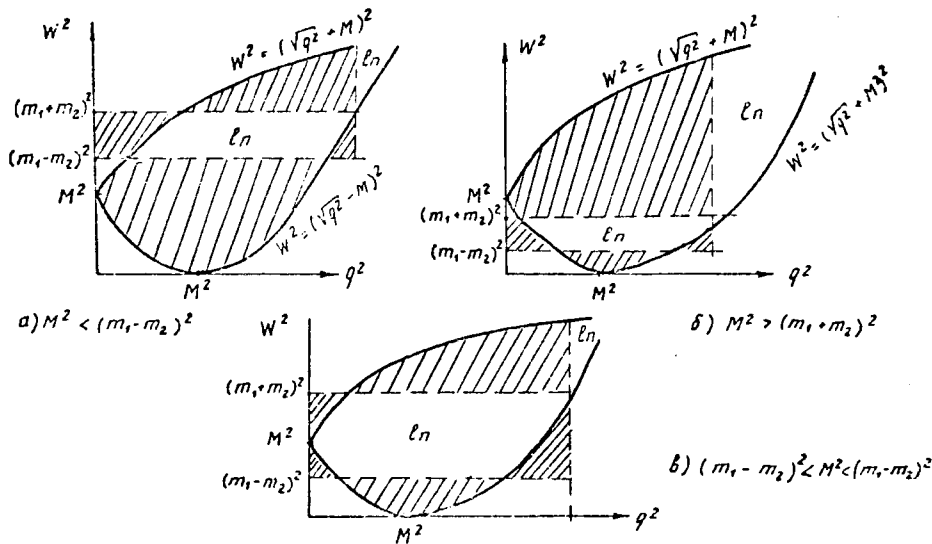


Рис. 13. Области, в которых амплитуда треугольной диаграммы рис. 12 не имеет логарифмической особенности.

где $N > 0$. /Точное выражение для N несущественно для наших целей/. Отсюда видно, что особенность выходит на первый риманов лист за счет члена с ϵ^2 и "оста-

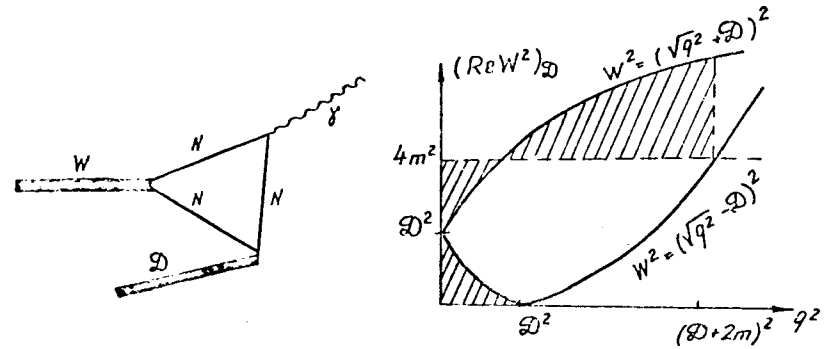


Рис. 14. Треугольная диаграмма аннигиляции дейтона.

навливается" из-за перехода $\ln(\dots) \rightarrow \text{arctg}(\dots)$. В точках $\text{Im } W^2(q^2) = 0$ производная $\partial \text{Re } W^2 / \partial q^2 < 0$. Движение особенности показано на рис. 15. Видно отсутствие аномального порога по W^2 в рассматриваемой дейтонной диаграмме. Легко проверить, что в отличие от расчета дейтонного радиуса с помощью д.с. по q^2 , где порядок радиуса определяется величиной аномального порога, в д.с. по W^2 радиус определяется значениями W^2 , близкими к нормальному порогу. Действительно,

$$\begin{aligned} \langle r^2 \rangle_D &= \frac{6}{e} \frac{d}{dq^2} \int_{W_{\text{норм}}^2}^{\infty} \text{Im } F_D(W^2, q^2) \frac{dW^2}{W^2 - D^2} \Big|_{q^2=0} \approx \\ &\approx \frac{g_{DNN}^2}{m} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dW^2}{(W^2 - D^2)^{5/2}} \approx \frac{g_{DNN}^2}{m(m\omega)^{3/2}} \end{aligned}$$

Здесь учтено, что масса дейтона равна $D = 2m - \omega$.

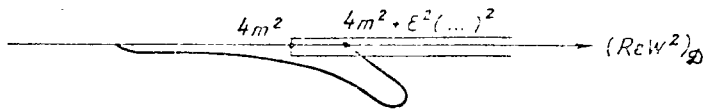


Рис. 15. Движение особенности треугольной диаграммы дейтона.

В заключение заметим, что техника д.с. по инвариантной массе одной из внешних частиц электромагнитной вершины требует дальнейшего развития. В продолжение работы [4] и данной следует рассмотреть возможность последовательного "бутстрапирования" систем уравнений для электромагнитных ф.ф. всевозможных вершин. В качестве конкретных приложений можно указать задачу нахождения свержсходящихся правил сумм для ф.ф. с помощью рассматриваемых д.с. по инвариантной адронной массе.

Авторы благодарны Б.В.Воронову и Д.В.Ширкову за стимулирующее обсуждение.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Кинематика электромагнитной вершины

Рассмотрим электромагнитную вершину скалярных адронов, в которой две частицы находятся вне массовой поверхности /см. рис. 1/

$$\begin{aligned}
 q &= p + k \\
 p^2 - m^2 &= 0 & m - \text{масса скалярного нуклона} \\
 k^2 - W^2 &\neq 0 & W - \text{масса скалярного адрона.} \\
 q^2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Формфактор такой вершины $F(W^2, q^2, p^2 = m^2)$ является функцией двух инвариантов: W^2 и q^2 . В настоящей работе используются две системы координат:

$$\vec{p} = 0$$

В данной системе координат векторы состояний частиц равны:

$$p = (0, m),$$

$$k = (\vec{e}h, k_0),$$

$$q = (\vec{e}h, k_0 + m),$$

где \vec{e} - единичный вектор, направленный вдоль импульса:

$$\vec{e} = \vec{k} / |\vec{k}|, \text{ а величина}$$

$h = |\vec{k}|$ определяется следующим образом:

$$h = \sqrt{(k_0 + m)^2 - q^2}$$

$$\vec{k} = 0$$

В этой системе координат векторы состояний частиц определяются так:

$$p = (\vec{p}, p_0),$$

$$k = (0, q_0 - p_0),$$

$$q = (\vec{p}, q_0)$$

Скалярные величины p_0 и q_0 выражаются через инварианты по формулам:

$$q_0 = \frac{W^2 - m^2 + q^2}{2W},$$

$$p_0 = \frac{q^2 - m^2 - W^2}{2W}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н.Н., Медведев Б.В., Поливанов М.К. "Вопросы теории дисперсионных соотношений". М.-Л., 1958.
2. Oehme R., Taylor J. Phys. Rev., 1959, 113, p.371.
3. Bincer A. Phys.Rev., 1960, 118, p.855.
4. Блувштейн Р.Э., Дубовик В.М. ОИЯИ, P2-6939, Дубна, 1972. Bluvstein R.E., Dubovik V.M., Cheskov A.A. Nucl. Phys., 1973, B64, p.407.
5. Devenish R.C. e.a. Phys.Rev., 1976, 14D, p.3063.
6. Goldberger M.L., Blankenbecler R. Preprint SLAC-PUB-1906, 1977.
7. Bluvstein R.E., Dubovik V.M. JINR, E3-6953, Dubna, 1973. Bluvstein R.E., Dubovik V.M. Phys.Lett., 1973, 45B, p.345.

8. Бартон Г. "Дисперсионные методы в теории поля", Атомиздат, М., 1968.
9. Jost R., Lehmann H. *Nuovo Cim.*, 1957, 5, p.1598.
Dyson F.J. *Phys.Rev.*, 1958, 110, p.1460.
10. Воронов Б.Л., Скурко И.Ф. *ТМФ*, 1976, 26, с.175.
11. Mandelstam S. *Phys.Rev.Lett.*, 1960, 4, p.84.
12. Källen G., Wightman A.S. *Mat.-Fys.Skrifth.*, 1958, 1, no. 6.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 апреля 1978 года.