ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 11437

В.Г.Маханьков

КОМПЬЮТЕР И СОЛИТОНЫ

1978

P2 - 11437

В.Г.Маханьков

КОМПЬЮТЕР И СОЛИТОНЫ

Направлено на симпозиум "Солитоны и их применение в науке и технике" /Швеция, 1978/.

Маханьков В.Г. Р2 - 11437

Компьютер и солитоны

Представлены результаты работ, выполненных в основном в ЛВТА ОИЯИ, по устойчивости, динамике и взаимодействию солитонов в двумерном (и большей размерности) псевдоэвклидовых мирах.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Makhankov V.G. P2 - 11437

A Computer and Solitons

The results of works on the stability, dynamics and interaction of solitons in two-dimensional (and more) pseudoeuclidean spaces are presented.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nucleor Research. Dubna 1978

1. Все многообразие физических явлений, сводящихся к уравнениям, допускающим солитонные решения, можно разделить на два больших класса. Они различаются между собой как по постановке задач, так и по интерпретации получающихся результатов, хотя на классическом уровне они непосредственно смыкаются.

К первому классу относятся задачи исследования нелинейных волновых явлений в реальных сплошных средах и системах многих взаимодействующих частиц /гидродинамика, твердое тело, физика плазмы и т.д./. Ко второму относятся теоретико-полевые задачи, физика частиц.

В первом случае исследование обычно проходит следующие этапы: начинается на классическом или квантовом дискретном уровне, затем с той или иной степенью строгости исследователи переходят к классическому или квазиклассическому континуальному пределу, что и определяет вид получающихся нелинейных уравнений. Конечным продуктом такой трансформации и является классическое солитонное решение /которому при обратной трансформации может быть в принципе придан квантовый смысл/.

Во втором случае исследуемые модели строятся на основе лагранжева формализма и некоторых требований, вытекающих из общих физических соображений и законов /инвариантность по отношению к группе Пуанкаре, глобальной или калибровочной группе внутренней симметрии, нарушение симметрий и т.п./. В этом случае классические нелинейные волновые уравнения появляются на начальном этапе и служат базой для построения "реальных" квантовых объектов, в том числе солитонного типа /протяженные частицы/*. В отличие от обычной атомной физики свойства квантовых солитонов обусловливаются классическими решениями при $\hbar \to 0$. Все это определяет вид уравнений второго класса.

Оба эти направления смыкаются на промежуточном этапе - исследований локализованных /солитонных/ решений конечной энергии классических нелинейных волновых уравнений.

Здесь можно было бы процитировать мнения о важности изучения свойств солитонных решений, имеющиеся в литературе как одного, так и другого направлений. Однако после всего сказанного это представляется нецелесообразным.

Итак, изучение общих свойств протяженных классических солитонов /КС/ можно проводить, отвлекаясь на некотором этапе от их физической интерпретации. Как мы увидим ниже, возможно существование устойчивых солитонов в четырехмерных (x, y, z, t) одно-полевых моделях с так называемой насыщающейся нелинейностью. Безусловно представляя интерес в рамках первого класса, они могут быть забракованы в силу условия ренормируемости для теории второго класса.

Ниже нас будут интересовать нелинейные явления в системах, допускающих стохастизацию, т.е. в неинтегрируемых системах. Поведение таких систем может определяться степенью их близости к некоторым вполне интегрируемым аналогам, причем те или иные свойства будут определяться близостью, в принципе, к различным вполне интегрируемым моделям. В этом смысле интегрируемые модели можно рассматривать как нулевое приближение /нелинейное!/ к описанию реальных физических систем, а дальнейшее исследование *со всеми предосторожностями* строить как ряд по этому малому отклоиению.

Отметим, что пока только вполне интегрируемые модели поддаются строгому аналитическому исследованию различными методами /имеется в виду решение задачи

* Так называемый нон-пертурбационный подход.

Коши/. Как правило, аналитические методы оказываются практически беспомощными /по крайней мере в настоящее время/ при изучении эволюции неинтегрируемых систем. Поэтому, за редким исключением, все результаты, относящиеся к эволюции эргодических /даже одномерных/ систем, были получены с помощью численных экспериментов.

2. Прежде всего следует сказать, что именно компьютер около 22 лет назад создал проблему Ферми-Паста-Улама, а затем обнаружил солитоны. В результате численного эксперимента по динамике нелинейных волн КдВ появилось понятие солитонов /Забуски/ как уединенных волн, выходящих из взаимодействия, не изменяя своей формы и скорости.Несколько ранее в экспериментах Перринга и Скирме аналогичные эффекты были обнаружены в рамках уравнения синус-Гордона, однако для весьма отличных объектов.

Интересно отметить, что "двухсолитонные" решения /бионы/ были найдены аналитически десятью годами ранее /Зеегер и др./. Далее, 1970 год, Н.Ояма и Н.Сайто обнаруживают солитоны на решетке Тоды, приближаясь тем самым к проблеме ФПУ. Наконец, в 1971 году были найдены солитоны в рамках уравнения Шредингера с кубической нелинейностью (S3) /Н.Яжима и А.Суми/. Все ссылки можно найти в обзоре Скотта и соавторов /1/.

В результате компьютер, положив начало целому новому направлению в теории нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, опять отошел на задний план. Началась бумовая пора открытий и исследований вполне интегрируемых гамильтоновых систем и связанных с ними методов обратной задачи рассеяния, Хироты и преобразований Беклунда. Развитие и формализация этой методики, носящие характер международного соревнования, показали, что интегрируемые уравнения можно генерировать практически в неограниченном количестве. В результате стало казаться, что если не все, то большинство лагранжевых систем вполне интегрируемы.

Первые удары по этим воззрениям опять нанес компьютер. В 1974 году в Дубне обнаружено неупругое взаимодействие ленгмюровских солитонов в плазме[2], аналогично для солитонов "улучшенного" варианта уравнений Буссинеска и КдВ, уравнений Хиггса и Клейна-Гордона[3]. Оказалось, что вроде бы "малого" изменения уравнения достаточно, чтобы оно стало неинтегрируемым. Более того, как выяснилось, некоторые специфические свойства интегрируемости исчезают при переходе от плоской (x,t) геометрии к сферически /или цилиндрически/ симметричной (r,t)[4].

Возникло понятие систем, *близких* к интегрируемым, для которых, как уже отмечалось выше, своеобразным нулевым приближением могут служить вполне интегрируемые уравнения, а исследование строится по отклонению от полной интегрируемости. При этом роль параметра взаимодействия современных теорий играет отклонение от вполне интегрируемого уравнения.

Наиболее "просто" исследование строится, когда такое отклонение может быть выделено в виде правой части с малым параметром[5]. В этом случае может быть применен метод последовательных приближений. Подчеркнем, что такое применение должно происходить со всеми возможными предосторожностями, так как на этом пути могут быть получены "решения", не удовлетворяющие исходному уравнению. Более подробно об этом говорится в докладе В.К.Федянина на данном Симпозиуме.

Кроме того, даже в этом случае возможны солитонные решения, принципиально отличающиеся от хорошо известных решений вполне интегрируемых уравнений[6]. Иногда выделить в чистом виде такое отклонение не удается /например, в случае уравнения Буссинеска имеет место замена ϕ_{xxxx} на ϕ_{xxtt} /, еще нетривиальнее близость уравнений Хиггса и KG3 к уравнению синус-Гордона[3]. Подчеркнем здесь, что численный эксперимент является в настоящее время одним из весьма мощных орудий исследования гамильтоновых систем, особенно это касается ответа на вопрос, является ли данная система вполне интегрируемой. Упругое взаимодействие солитонов позволяет ответить на этот вопрос положительно /вспомним КдВ/. С другой стороны, обнаружение неупругости взаимодействия солитонов делает бесплодными попытки найти следствия интегрируемости, в частности, многосолитонные формулы[7]. Тем не менее идея о близости изучаемой системы к интегрируемой в какой-то степени помогла обнаружить пульсирующие /связанные состояния/ солитоны-бионы как в плоской (x,t) геометрии[8], так и в сферически симметричной (r,t)[9] в рамках уравнений KG3 и Хиггса. Отметим, что если в плоском случае еще удается найти приближенное аналитическое решение для пульсонов /пульсирующих солитонов/, то в (r,t) геометрии как сам факт открытия, так и исследование свойств пульсонов целиком связано с компьютером /до сих пор стандартные аналитические методы оказывались бессильны: сказывается отсутствие малого параметра и существенная нелинейность/.

Трансформация "физической" системы, описывающей взаимодействие ленгмюровских и ионно-звуковых волн в плазме, от сильнонеинтегрируемой при малых скоростях сталкивающихся ℓs -солитонов /возможно их слияние/ вплоть до вполне интегрируемой при $v \to 1$ [18] была впервые прослежена на ЭВМ в работе[2]. Здесь уместно отметить, что при нелинейном описании ионно-звуковых волн /например, с помощью уравнения Буссинеска/ интегрируемость исчезает. Система из двух интегрируемых уравнений оказалась неинтегрируемой.

3. В результате работы большого количества исследователей во всем мире свойства солитонов в плоском (x,t) мире были достаточно хорошо изучены. Настало время переходить в более реальные и сложные многомерные миры. Этот переход, как, впрочем, и следовало ожидать, оказался нетривиальным.

Здесь на первое место вышел вопрос об устойчивости солитонов, при переходе от одного к нескольким пространственным переменным /в плоском (x,t) случае лишь в рамках KG3 уравнения были обнаружены неустойчивые солитоны/. В последние годы большое количество работ, особенно в теории плазмы, было посвящено исследованию устойчивости плоских (x,t) солитонов в перпендикулярном по отношению к их движению направлении[3,10]. Отметим здесь, что солитоны двух хорошо известных интегрируемых уравнений КдВ и S3 оказались в этом смысле противоположными: солитоны КдВ - устойчивы, что в конечном итоге позволило решить двумерную задачу; солитоны S3 неустойчивы, что лишний раз указывало на существование коллапса ленгмюровских волн в плазме.

В 1964 году Дерриком и Хоббартом была доказана теорема, гласящая: в пространстве* более чем одного измерения не существует устойчивых стационарных солитоноподобных решений в рамках обычных релятивистских инвариантных нелинейных теорий /без внутренних симметрий/.

Здесь следует определить, что мы будем понимать под термином солитон в неодномерном пространстве. Насколько автору известно /возможно, за исключением КдВ и близких ему нерелятивистских систем/, интегрируемых релятивистски инвариантных систем в неодномерном пространстве не обнаружено. Поэтому наше определение солитона смыкается здесь с широко известным понятием квазичастичного решения:

солитон есть решение некоторого нелинейного уравнения, обладающее конечной энергией, импульсом, "зарядом" и "правильной" асимптотикой на бесконечности.

4. Теорема Деррика-Хоббарта фактически утверждает, что гамильтониан системы в стационарном случае $H[\chi]$ как функционал поля определяет поверхность, которая не может быть долиной; это либо холм, либо, в лучшем случае, седловина в функциональном пространстве. Поэтому для стабилизации системы нужны дополнительные связи /интегралы движения/. Возможны два пути:

1/ поиски законов сохранения, связанных с нетривиальной топологией решения /Фаддеев, Поляков, Туфт и др./;

2/ переход к теориям с внутренними глобальными или калибровочными симметриями.

Первого подхода ниже мы касаться не будем.

---
*Оговоримся, что под миром мы понимаем пространство-время Минковского, размерности $D+1$.

Во втором случае солитон обеспечивает гамильтониану условный экстремум, что может привести к устойчивости солитона /Заставенко, Ли, Маханьков/. Проиллюстрируем это на простейшем примере глобальной $U(1)$-симметрии $\psi \to \psi e^{i\theta}$. В этом случае мы имеем дополнительный закон сохранения

$$\frac{dQ}{dt} = 0, \quad Q = -i\int (\psi_t^* \psi - \psi^* \psi_t)\, d^D x \,. \qquad /1/$$

Временная зависимость решения вида $\psi_s = \phi e^{-i\omega t}$ минимизирует функционал энергии H. При этом условие устойчивости солитонного решения принимает вид /Вахитов и Колоколов, Фридберг, Ли и Сирлин, Маханьков /3//:

$$\frac{dQ}{d\omega} < 0 \qquad /Q\text{-теорема}/ \qquad /2/$$

В работе /11/ /см. также /3/ стр. 100/ было показано, что в системах с так называемой насыщающейся нелинейностью при некоторых ω существуют устойчивые Q-солитоны. В рамках однополевой ϕ^4_D-теории стационарных устойчивых решений при $D \geq 2$ не существует.

Заметим, что в рассмотренном случае комплексного поля /1/ есть точный закон сохранения.

Можно искать солитонное решение для действительного скалярного поля вида

$$\chi = \mathrm{Re}\, \phi\, e^{-i\omega t} \qquad /\text{пульсон}/. \qquad /3/$$

При определенных условиях возникает приблизительный закон сохранения

$$\frac{dS}{dt} \simeq 0, \quad S = \int \phi^2 d^D x \,, \qquad /4/$$

удовлетворяющийся с экспоненциальной точностью /Боголюбский и Маханьков /8/, Манаков /12//.

5. Перейдем к исследованию координатной зависимости солитонов $\phi(r)$. Будем рассматривать сферически симметричные решения в D-мерном евклидовом пространстве или в (D+I)-мерном мире Минковского /в последнем случае перенормируется массовый член/ для уравнения весьма общего вида с полиномиальным лагранжианом:

$$\frac{1}{r^{D-1}}\frac{d}{dr}\left(r^{D-1}\frac{d\phi}{dr}\right)-\kappa^2\phi+g^2\phi^{p-1}-a\phi^{q-1}=0. \qquad /4/$$

С помощью вириальной теоремы и интегрирования /5/ с весом $\phi_r r^{D-1}$ получим условия существования солитоноподобных решений уравнения /5/ [13]

$$\left(1-p\frac{D-2}{2D}\right)U_p>\left(1-q\frac{D-2}{2D}\right)U_q, \qquad /6/$$

$$(p-2)U_p>(q-2)U_q. \qquad /7/$$

Здесь

$$U_p=\frac{g^2}{p}\int_0^\infty\phi^p r^{D-1}dr, \qquad U_q=\frac{a}{q}\int_0^\infty\phi^q r^{D-1}dr.$$

Отметим, что для инстантонных решений ($\kappa^2=a=0$) условие /6/ совпадает с условием ренормируемости теории. Аналогично будем иметь для векторных полей $A_\mu \propto x_\mu/|x|$. Например, для случая $p=4$, $q=6$, $D=3$ имеем семейство решений ϕ_n /где n нумерует число узлов полевой функции/, которые могут быть устойчивы в определенной области параметров (ω, g^2, a)

Теорема существования для $D=3$ и нелинейности общего вида была доказана в работах [14].

В заключение этого раздела заметим, что статические свойства солитонов изучены уже в гораздо более сложных скалярных и векторных калибровочных моделях $SU(2)\otimes SU(2)$, $SU(3)\otimes SU(3)$, а также с включением цветных спинорных /кварковых/ полей, т.е. $SU(3)\otimes SU(3)\otimes SU(3)$ [15] /об этих исследованиях более подробно сказано в докладе одного из авторов, Т.Д.Ли/.

6. Чтобы оправдать как-то название доклада, перейдем опять к компьютеру. Динамика солитонов в многомерном мире - пока почти целиком епархия компьютера. Так именно с его помощью были открыты пульсоны [4] - бионы в сферическом трехмерном пространстве - и изучены их свойства. Исследовались ss решения солитонного типа для следующих уравнений, описывающих реальные скалярные поля *

$$\phi_{tt}-\Delta_{rr}\phi-\phi+\phi^3=0 \quad \text{GLH}, \qquad /8.1/$$

$$\phi_{tt}-\Delta_{rr}\phi+\sin\phi=0 \quad \text{SG /интегрируемо в } x,t \text{ мире/}, \qquad /8.2/$$

$$\phi_{tt}-\Delta_{rr}\phi+\phi-\phi^3=0 \quad \text{KG3}. \qquad /8.3/$$

Интегралы энергии, соответственно, суть:

$$E=4\pi\int \mathcal{H}\, r^2dr, \qquad \mathcal{H}=\frac{1}{2}[\phi_t^2+\phi_r^2+V_i(\phi)], \qquad /9/$$

где

$$V_1=\frac{1}{2}(\phi^2-1)^2, \quad V_2=2(1-\cos\phi), \quad V_3=\phi^2\left(1-\frac{\phi^2}{2}\right). \qquad /10/$$

Как уже отмечалось, устойчивых Q-солитонов ($dQ/d\omega<0$) для уравнения KG3 ($D=3$) не существует. Как показали численные эксперименты, проведенные в Дубне, то же имеет место и для пульсирующих решений вида /3/ для уравнения /8.3/. KG3-пульсоны так же, как и KG3 Q-солитоны, распадаются по двум модам - диссипативной и сингулярной [3]. Последняя представляет собой коллапс пакета, весьма напоминающий коллапс ленгмюровских волн в плазме в рамках S3-уравнения.

Решения уравнений /8.1/ и /8.2/ имеют ненулевые асимптотики /вакуумные значения/ на бесконечности ($r\to\infty$)

$$\phi_{GLH}\big|_{r\to\infty}\to\pm1,$$

$$\phi_{SG}\big|_{r\to\infty}\to\pm2\pi n,$$

---

*По теореме Деррика-Хоббарта устойчивых стационарных солитонов для таких теорий не существует.

которым соответствуют минимумы потенциала /10/ /функция $V_3(\phi)$ имеет лишь один относительный минимум $V_3(0)=0$). Закрепление одного из этих вакуумов в качестве граничного условия может привести к появлению квазистабильных /слабоизлучающих линейные волны/ пульсонов, время жизни которых - $\sim 10^3$ периодов осцилляций /адиабатический вариант /4/!/. Заметим, что время распада KG3-пульсонов - порядка нескольких /3-4/ колебаний /подробности см. в работе /3/ /. Заметим также, что никаких неизлучающих объектов, аналогичных бионам в плоском (x,t) мире, в рамках SG - уравнения обнаружено не было.

В наших численных экспериментах выбирались

$$\phi^{v}_{GLH} = -1, \quad \phi^{v}_{SG} = 0$$

и были обнаружены долгоживущие пульсоны /с распределением поля по r в форме колокола/ при довольно произвольных начальных условиях, если только /8/

$$\phi(0,0) > \mathrm{const}_1 > 1 \qquad \mathrm{GLH}$$

$$\phi(0,0) > \mathrm{const}_2 > 2\pi \qquad \mathrm{SG}$$

Аналогичные объекты несколько позже были найдены группой из ИТЭФ /Москва/ /16/.

Для многовакуумной теории синус-Гордона можно ожидать появления квазистабильных пульсонов со все большей амплитудой поля в центре $\phi(0,0) > 2\pi n$. И такие объекты были найдены /хотя они не имеют аналогов в плоском (x,t) мире/; их амплитуды лежат в области $\phi(0,t) \in (3\pi, 4\pi)$. В районе $(2\pi, 3\pi)$ эти пульсоны становятся неустойчивыми. В итоге наблюдается каскадный процесс: медленно излучая, тяжелый пульсон уменьшает свою амплитуду внутри интервала $(3\pi, 4\pi)$, интервал $(2\pi, 3\pi)$ проходится относительно быстро, затем в интервале $(\pi, 2\pi)$ мы опять имеем слабоизлучающий пульсон, который становится неустойчивым в области $(0, \pi)$. Нетрудно видеть, что такое поведение пульсонов тесно связано с рельефом потенциала $V(\phi)$.

При вычислениях обычно /для сокращения машинного времени/ начальные условия задавались в квазибионном виде:

$$\phi(r,0) = 4\kappa \operatorname{arctg}[\operatorname{tg}\alpha \operatorname{sech}(\sin\alpha\, r)],$$

причем параметры α и κ варьировались.

В предыдущем разделе мы рассмотрели динамические свойства солитонов, касающиеся вопросов их формирования и устойчивости. Однако это лишь первый шаг. Реальная динамика, в которой в полной мере проявляются особые свойства солитонов, - это их взаимодействие.

Перейдем, наконец, к обсуждению доступных автору результатов по столкновению двумерных * цилиндрически симметричных /в системе покоя/ солитонов. Здесь мы упомянем лишь о двух численных экспериментах, проведенных в Дубне, по взаимодействию а/ нестабильных KG3 пульсонов /17/ и б/ Q-солитонов KG-уравнения с насыщающейся нелинейностью вида $|\psi|^2/(1+|\psi|^2)$. Нужно отметить, что уже существуют весьма впечатляющие фильмы Тапперта о взаимодействии цилиндрических солитонов в рамках уравнения Шредингера с экспоненциальной нелинейностью /"насыщающейся"/

$$i\psi_t + \Delta_{rr}\psi + \frac{1}{a}\psi\,(1 - \exp\{-a|\psi|^2\}) = 0,$$

моделирующего поведение пакетов ленгмюровских волн вблизи стационарных решений.

Прежде всего следует сказать, что как KG3-пульсоны, так и пульсоны уравнений GLH и SG оказались устойчивыми по отношению к малым угловым возмущениям $\delta\phi(\theta)$ /17/.

В первой серии расчетов /Боголюбский, Швачка и автор/ исследовалось лобовое столкновение двух нестабильных KG3 -пульсонов вида

$$\phi(x,y,t) = A\phi\left(u_0\sqrt{\gamma_i^2 (x - v_i t)^2 + y^2}\right)\cos\left(\sqrt{1-u_0^2}\,\gamma_i (t - v_i x)\right);$$

* Трехмерные солитоны, по-видимому, пока слишком сложны для компьютера.

где v_i - скорость i-го пульсона в единицах скорости света, $v_1 = -v_2 = v = 0,2; 0,3; 0,4; 0,6$. $\gamma_i^2 = (1-v_i^2)^{-1}$, а функция $\phi(r)$ в системе покоя пульсона есть решение граничной задачи

$$\phi_{rr} + \frac{1}{r}\phi_r - \phi + \phi^3 = 0, \quad \phi_r(0) = \phi(\infty) = 0.$$

Время столкновения выбиралось меньше времени развития неустойчивости. Поведение пульсонов напоминает поведение одномерных ℓs-солитонов, обсуждавшееся выше [2]. Если скорость пульсонов превосходит некоторую критическую величину $v_{cr} \approx 0{,}3$, то пульсоны выходят из взаимодействия и лишь после этого "распадаются" по диссипативной или сингулярной моде. При $v \leq 0{,}3$ пульсоны сливаются в один, впоследствии коллапсирующий. Замечательный факт состоит в том, что при $v > v_{cr}$ число неустойчивых квазичастиц сохраняется во взаимодействии, причем они живут приблизительно такое же время, что и в свободном состоянии. И это несмотря на то, что столкновение пульсонов вносит большое, хотя и самосогласованное возмущение порядка единицы для каждого из них. Здесь уже в трехмерном мире мы, по-видимому, являемся свидетелями проявления "солитонных" /в смысле Забуски/ свойств неустойчивыми пульсонами.

Вторая серия расчетов /Куммер, Швачка и автор/ была посвящена столкновениям устойчивых Q-солитонов в модели

$$\psi_{tt} - \psi_{rr} - \frac{1}{r}\psi_r + \psi - |\psi|^2 (1 + |\psi|^2)^{-1} = 0.$$

Поведение Q-солитонов в этих соударениях весьма напоминает "солитонное": взаимодействие оказывается почти упругим, $(v \to 1)$, наблюдается некоторый сдвиг в их положении /при тех значениях ω и v, которые исследовались в экспериментах/.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Scott A., Chu F., McLaughlin D. Proc. IEEE, 1973, 61, p. 1443.*
2. *Abdulloev Kh., Bogolubsky I.L., Makhankov V.G. Phys.Lett., 1974, 48A, p. 161; Nuclear Fusion, 1975, 15, p. 21.*

3. *Makhankov V. Phys.Reports, 1978, 35C, p. 1-128.*
4. *Боголюбский И.Л., Маханьков В.Г. Письма в ЖЭТФ, 1976, 24, с.15.*
5. *Карпман В.И., Маслов Е.М. Phys.Lett., 1977, 60A, p. 307; ЖЭТФ, 1977, 73, с.537.*
6. *Маханьков В.Г., Федянин В.К. ДАН СССР, 1977, 236, с.838. ОИЯИ, Е17-10507, Дубна, 1977.*
7. *Abdulloev Kh., Bogolubsky I., Makhankov V. Phys. Lett., 1976, 56A, p. 427.*
8. *Кудрявцев Е.А. Письма в ЖЭТФ, 1975, 22, с.178. Гетманов Б.С. Письма в ЖЭТФ, 1976, 24, с.323.*
9. *Боголюбский И.Л., Маханьков В.Г. Письма в ЖЭТФ, 1977, 25, с.120.*
10. *Катышев Ю.В., Махалдиани Н.В., Маханьков В.Г. ОИЯИ, Р5-11438, Дубна, 1978.*
11. *Маханьков В.Г. ОИЯИ, Р2-10362, Дубна, 1977.*
12. *Манаков С.В. Письма в ЖЭТФ, 1977, 25, с.589.*
13. *Makhankov V. Phys.Lett., 1977, 61A, p. 437.*
14. *Nehari L. Proc.Roy.Irish Acad., 1963, 62A, p. 118; Zhydkov E., Shirikov V. Z.Vych.Mat. i Mat. Fiz., 1964, 4, p. 804; Vazquez L. J.Phys.A: Math.Gen., 1977, 10, p. 1361; см. также: Strauss W. Commun.Math.Phys., 1977, 55, p. 149.*
15. *Friedberg R., Lee T.D., Sirlin A. Phys.Rev., 1976, D13, p. 2739; Nucl.Phys., 1976, B115, p. 1;32. Fredberg R., Lee T.D., Phys.Rev., 1977, D15, p. 1694; Preprint CO-2271-89 Columbia Univ. N.Y. 1977.*
16. *Белова Т.И. и др. ЖЭТФ, 1977, 73, с.1611.*
17. *Bogolubsky I., Makhankov V., Shvachka A. Phys.Lett., 1977, 63A, p. 225.*
18. *Yajima N., Oikawa M. Progr.Theor.Phys., 1976, 56, p. 1719.*

Рукопись поступила в издательский отдел 3 апреля 1978 года.