ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 11430

Б.М.Барбашов, А.Л.Кошкаров

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ДИНАМИКЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТРУНЫ

1978

P2 - 11430

Б.М.Барбашов, А.Л.Кошкаров

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ДИНАМИКЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТРУНЫ

Направлено в ТМФ

Барбашов Б.М., Кошкаров А.Л. Р2 - 11430

Геометрический подход к динамике релятивистской струны

Проблемы классической динамики релятивистской струны тесно связаны с теорией двумерных экстремальных поверхностей в n-мерном псевдоевклидовом пространстве E^1_n. В трехмерном пространстве-времени E^1_3 может быть полностью использован аппарат гауссовой теории двумерных поверхностей, когда поверхность задается с точностью до сдвигов своей первой и второй квадратичными формами.

Путем интегрирования деривационных формул для основных векторов ($\frac{\partial x_\mu(\tau,\sigma)}{\partial\tau} = \dot{x}_\mu(\tau,\sigma)$, $\frac{\partial x_\mu(\tau,\sigma)}{\partial\sigma} = x'_\mu(\tau,\sigma)$ – касательные векторы к поверхности и $m_\mu(\tau,\sigma)$ – нормаль к поверхности в данной точке (τ,σ)) получаются представления для этих векторов в некотором естественном базисе, удовлетворяющие ортонормальной калибровке $(\dot{x}_\mu \pm x'_\mu)^2=0$ и уравнению Даламбера $\ddot{x}_\mu(\tau,\sigma) - x''_\mu(\tau,\sigma)=0$ в динамике струны. Эти представления допускают обобщения на псевдоевклидово пространство E^1_n любой размерности n. Для релятивистской струны в пространстве E^1_n получено представление, содержащее n−2 произвольных функций и удовлетворяющее условиям калибровки, уравнениям движения и граничным условиям для свободной струны.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Barbashov B.M., Koshkarov A.L. P2 - 11430

Geometric Approach to the Dynamics of Relativistic String

The problems of the classical dynamics of relativistic string are related to the theory of two-dimensional extremal surfaces in n-dimensional pseudo-Euclidean space E^1_n. In the three-dimensional space-time E^1_3, one can use the Gaussian theory of two-dimensional surfaces when a surface is defined by the first and second quadratic form.

By integrating the derivational formulae for the basic vectors ($\frac{\partial x_\mu}{\partial\tau} = \dot{x}_\mu(\tau,\sigma)$ and $\frac{\partial x_\mu}{\partial\sigma} = x'_\mu(\tau,\sigma)$ are the tangents of the vector to the surface, and $m_\mu(\tau,\sigma)$ is the normal to the surface at a given point (τ,σ)) one can obtain the representations for these vectors in a certain basis, which satisfy the orthonormal gauge $(\dot{x}_\mu \pm x'_\mu)^2$ and d'Alembert equation $\ddot{x}_\mu - x''_\mu=0$ in the dynamics of string. These representations allow the generalizations to the pseudo-Euclidean space E'_n of any dimensionality n. A representation containing n−2 arbitrary functions and satisfying the gauge conditions, equations of motion and boundary conditions for the free string is obtained for the relativistic string in the space.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

Рассматривается динамика релятивистской струны с точки зрения гауссовской теории двумерных поверхностей в трехмерном псевдоевклидовом пространстве E^1_3, согласно которой поверхность задается ее первой и второй квадратичными формами /см. ниже/. Поэтому проблему динамики струны можно сформулировать, как задачу нахождения квадратичных форм мировой поверхности, образуемой релятивистской струной в процессе движения. Подобным методом свободная струна изучалась в работе /1/. В отличие от /1/ мы не ограничиваемся случаем трехмерного пространства-времени и обобщаем результаты трехмерного рассмотрения на псевдоевклидово пространство-время E^1_n любой размерности.

Геометрический подход обладает преимуществом, которое состоит в том, что удается явно разрешить дополнительные условия /2/ на вектор $x_\mu(\tau,\sigma)$, описывающий координаты мировой поверхности струны.

Содержание работы следующее: в первом параграфе приводится постановка задачи в обычном подходе. Выписаны уравнения движения и граничные условия для случаев струны с массивными концами и замкнутой струны. Во втором параграфе сформулированы основные уравнения для коэффициентов первой и второй квадратичных форм мировой поверхности струны, представляющие собой известные условия интегрируемости деривационных формул Гаусса и Вейнгартена. Далее путем интегрирования деривационных формул получено представление для формы мировой поверхности струны в некотором базисе, удовлетворяющее как уравнениям движения, так и дополнительным условиям. Предлагается новая, релятивистски-инвариантная калибровка, фиксирующая вторую квадратичную форму поверхности.

Это представление непосредственно обобщается на пространство произвольной размерности n в отличие от подхода /1/, где рассмотрение ведется только для трехмерного пространства-времени E_3^1. Четвертый параграф посвящен рассмотрению граничных условий для струны с массивными концами и свободной струны в пространстве E_n^1.

1. Уравнения движения и граничные условия

Обычно задача движения релятивистской струны формулируется в виде вариационного принципа для функции действия:

$$S = -\gamma \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^{\pi} d\sigma \sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2} + S_{int}\,, \qquad /1/$$

где S_{int} - член, ответственный за взаимодействие. Рассматриваются такие взаимодействия, которые не изменяют уравнений движения, а влияют только на граничные условия.

Варьирование действия /1/ приводит к уравнениям движения, которые в ортогональной системе координат, определяемой условиями

$$\dot{x}(\tau,\sigma)\cdot x'(\tau,\sigma) = 0\,,\quad \dot{x}^2(\tau,\sigma) + x'^2(\tau,\sigma) = 0\,, \qquad /2/$$

имеют простой вид

$$\ddot{x}_\mu(\tau,\sigma) - x''_\mu(\tau,\sigma) = 0\,. \qquad /3/$$

В действительности условиями /2/ определяется не одно, а бесконечно много ортонормальных координатных систем на поверхности, поскольку уравнения /2/ и /3/ инвариантны относительно преобразований

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{2}[f(\tau+\sigma) - \phi(\tau-\sigma)],\ \tilde{\tau} = \frac{1}{2}[f(\tau+\sigma) + \phi(\tau-\sigma)]\,, \qquad /4/$$

где f и ϕ - произвольные функции.

В случае струны с точечными массами на концах взаимодействие имеет вид

$$S_{int} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau[\mu_1 \sqrt{\dot{x}^2(\tau,0)} + \mu_2\sqrt{\dot{x}^2(\tau,\pi)}]$$

и граничные условия суть уравнения Эйнштейна для точечных масс, на которые действует четырехмерное натяжение струны

$$x'_\mu(\tau,0) = \frac{\mu_1}{\gamma}\frac{d}{d\tau}\frac{\dot{x}_\mu(\tau,0)}{\sqrt{\dot{x}^2(\tau,0)}}\,,\ x'_\mu(\tau,\pi) = -\frac{\mu_2}{\gamma}\frac{d}{d\tau}\frac{\dot{x}_\mu(\tau,\pi)}{\sqrt{\dot{x}^2(\tau,\pi)}}\,. \qquad /5/$$

В случае $\mu_i = 0$ в /5/ натяжения на концах струны равны нулю.

Замкнутая струна определяется условием соединения концов

$$x_\mu(\tau,0) = x_\mu(\tau,\pi)\,, \qquad /6/$$

а также условием

$$x'_\mu(\tau,0) = x'_\mu(\tau,\pi)\,. \qquad /7/$$

Формулы /6/ и /7/ определяют гладкость струны в точке соединения. Наличие массы μ в точке соединения означает, что струна имеет излом, так как имеет место уравнение

$$x'_\mu(\tau,\pi) = x'_\mu(\tau,0) + \mu\frac{d}{d\tau}\frac{\dot{x}_\mu(\tau,0)}{\sqrt{\dot{x}^2(\tau,0)}}\,.$$

Требование инвариантности условий /5/ относительно преобразований /4/ приводит к ограничениям на функции ϕ и f :

$$\phi(\lambda) = f(\lambda)\,,\quad f(\lambda+2\pi) = f(\lambda) + 2\pi\,.$$

Для замкнутой струны вместо этого должно выполняться условие

$$\phi(\lambda) = f(\lambda),\ f(\lambda + \pi) = f(\lambda) + \pi .$$

Граничные условия приводят также и к ограничениям на коэффициенты первой и второй квадратичных форм мировой поверхности струны. Это будет исследовано в четвертом параграфе.

2. *Мировая поверхность струны в пространстве* E^1_3

Элемент длины на поверхности определяется первой квадратичной формой

$$ds^2 = (\dot{x}\, d\tau + x' d\sigma)^2 = g_{00} d\tau^2 + 2g_{01} d\tau\, d\sigma + g_{11} d\sigma^2$$

и при условии /2/ содержит только один коэффициент $g_{00} = \dot{x}^2(\tau,\sigma)$, в то время как $g_{01} = \dot{x}x' = 0$, $g_{11} = g_{00}$. Таким образом, выбор ортогональной калибровки /2/ частично фиксирует первую квадратичную форму поверхности.

В каждой точке поверхности согласно /2/ определены ортогональные векторы $\dot{x}_\mu(\tau,\sigma)$ и $x'_\mu(\tau,\sigma)$, лежащие в касательной плоскости к поверхности, причем $x'^2 < 0$, x'_μ – пространственно-подобный вектор. С помощью антисимметричного по всем индексам тензора $e_{\mu\nu\rho}$ из векторов $\dot{x}_\mu$ и x'_μ можно построить единичную нормаль к поверхности в каждой ее точке

$$m_\mu(\tau,\sigma) = \frac{1}{\dot{x}^2} e_{\alpha\beta\mu}\, \dot{x}^\alpha x'^\beta , \quad m^2 = -1 .$$

Деривационные формулы Гаусса, связывающие вторые производные от x_μ с первыми, имеют вид

$$\ddot{x}_\mu(\tau,\sigma) = \Gamma^\circ_{00}(\tau,\sigma)\dot{x}_\mu(\tau,\sigma) + \Gamma^1_{00} x'_\mu(\tau,\sigma) - b_{00}(\tau,\sigma) m_\mu(\tau,\sigma),$$

$$\dot{x}'_\mu(\tau,\sigma) = \Gamma^\circ_{01}(\tau,\sigma)\dot{x}_\mu(\tau,\sigma) + \Gamma^1_{01}(\tau,\sigma) x'_\mu(\tau,\sigma) - b_{01}(\tau,\sigma) m_\mu(\tau,\sigma),$$

$$x''_\mu(\tau,\sigma) = \Gamma^\circ_{11}(\tau,\sigma)\dot{x}_\mu(\tau,\sigma) + \Gamma^1_{11}(\tau,\sigma) x'_\mu(\tau,\sigma) - b_{11}(\tau,\sigma) m_\mu(\tau,\sigma). \qquad /8/$$

Проектируя уравнения /8/ на $\dot{x}_\mu$ и x'_μ , найдем для символов Кристоффеля $\Gamma^i_{jk}(\tau,\sigma)$ выражения

$$\Gamma^\circ_{00} = \Gamma^\circ_{11} = \Gamma^1_{01} = \frac{1}{2g_{00}} \frac{\partial g_{00}}{\partial \tau} \equiv \frac{\dot{g}_{00}}{2g_{00}} ,$$

$$\Gamma^1_{00} = \Gamma^1_{11} = \Gamma^\circ_{01} = \frac{1}{2g_{00}} \frac{\partial g_{00}}{\partial \sigma} \equiv \frac{g'_{00}}{2g_{00}} .$$

Таким образом, символы Кристоффеля выражаются через единственный неизвестный коэффициент первой квадратичной формы.

Величины $b_{ij}(\tau,\sigma)$ в /8/ являются коэффициентами второй квадратичной формы. Уравнение /3/ дает

$$b_{00}(\tau,\sigma) = b_{11}(\tau,\sigma).$$

Формулы /8/ являются системой дифференциальных уравнений в частных производных, условия совместности которой приводят к связи между коэффициентами первой и второй квадратичных форм. В частности, выражение $\ddot{x}^2 - \dot{x}'^2$ можно представить двумя способами:

$$\ddot{x}^2 - \dot{x}'^2 = \frac{1}{2}(\ddot{g}_{00} - g''_{00}) = \frac{1}{2g_{00}}(\dot{g}^2_{00} - g'^2_{00}) - b^2_{00} + b^2_{01} ,$$

или, в более компактной записи, как

$$b^2_{01} - b^2_{00} = \frac{1}{2} g_{00} \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2}\right) \ln g_{00} . \qquad /9/$$

Деривационные формулы Вейнгартена, связывающие производные от нормали с $\dot{x}_\mu$ и x'_μ, имеют вид

$$\dot{m}_\mu = \frac{1}{g_{00}}[-b_{00}\dot{x}_\mu + b_{01}x'_\mu],\quad m'_\mu = \frac{1}{g_{00}}[-b_{01}\dot{x}_\mu + b_{00}x'_\mu]. \qquad /10/$$

Можно получить условия интегрируемости этих уравнений /условия Петерсона-Кодацци/. Из /8/ имеем

$$b_{00} = m\ddot{x},\quad b_{01} = m\dot{x}',$$

а из /10/ -

$$b_{00} = -\dot{m}\dot{x} = -m'x',\quad b_{01} = -\dot{m}x' = -m'\dot{x}.$$

Окончательно уравнения на коэффициенты второй квадратичной формы следующие:

$$\dot{b}_{00}(\tau,\sigma) - b'_{01}(\tau,\sigma) = 0,\quad b'_{00}(\tau,\sigma) - \dot{b}_{01}(\tau,\sigma) = 0. \qquad /11/$$

Таким образом, задача определения поверхности свелась к решению уравнений /9/ и /11/. Уравнения /11/ легко интегрируются, и для $b_{ik}(\tau,\sigma)$ мы имеем решение

$$b_{00}(\tau,\sigma) = A(\tau+\sigma) - B(\tau-\sigma),$$
$$b_{01}(\tau,\sigma) = A(\tau+\sigma) + B(\tau-\sigma), \qquad /12/$$

где A и B - произвольные функции. Подставляя /12/ в /9/, получим уравнение для $g(\tau,\sigma)$:

$$4A(\tau+\sigma)B(\tau-\sigma) = g^2(\tau,\sigma)\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}\right)\ln g^2(\tau,\sigma). \qquad /13/$$

Здесь введено обозначение:

$$g^2(\tau,\sigma) = \frac{1}{2}g_{00}(\tau,\sigma) = \frac{1}{2}\dot{x}^2(\tau,\sigma).$$

Произвольные функции A и B в уравнении /13/ отражают тот факт, что ввиду /4/ ортогональные криволинейные координаты на поверхности еще не фиксированы полностью.

Общее решение уравнения /13/ имеет вид /решение Лиувилля [2] /:

$$g^2(\tau,\sigma) = \frac{1}{2}A(\tau+\sigma)B(\tau-\sigma)\,\frac{[f_1(\tau+\sigma) - f_2(\tau-\sigma)]^2}{f'_1(\tau+\sigma)\,f'_2(\tau-\sigma)}. \qquad /14/$$

Коэффициенты первой и второй квадратичных форм определяются формулами /12/ и /14/ с точностью до произвольных функций A, B, f_1, f_2. Вид этих функций можно конкретизировать, выбирая определенным образом криволинейные координаты на поверхности /фиксируя калибровку/. Выбор калибровки при этом не является произвольным, а диктуется краевыми условиями.

3. Интегрирование деривационных формул

Замечательным является факт интегрируемости деривационных формул /8/ и /10/. Перепишем /8/ в следующем виде:

$$\psi''_{1\mu}(\alpha) = \frac{1}{g^2}\frac{\partial g^2}{\partial\alpha}\psi'_{1\mu}(\alpha) - A(\alpha)\,m_\mu(\alpha,\beta),$$
$$\psi''_{2\mu}(\beta) = \frac{1}{g^2}\frac{\partial g^2}{\partial\beta}\psi'_{2\mu}(\beta) + B(\beta)\,m_\mu(\alpha,\beta), \qquad /15/$$

а формулы Вейнгартена /10/ запишем как

$$\frac{\partial m_\mu(\alpha,\beta)}{\partial\alpha} = -\frac{A(\alpha)}{g^2}\psi'_{2\mu}(\beta),\quad \frac{\partial m_\mu(\alpha,\beta)}{\partial\beta} = \frac{B(\beta)}{g^2}\psi'_{1\mu}(\alpha), \qquad /16/$$

где $\alpha = \tau+\sigma$, $\beta = \tau-\sigma$, а $\psi_{1\mu}$ и $\psi_{2\mu}$ - произвольные функции, входящие в общее решение уравнения Даламбера /3/

$$x_\mu(\alpha,\beta) = \psi_{1\mu}(\alpha) + \psi_{2\mu}(\beta).$$

Подставляя /14/ в формулы /16/, замечаем, что последние интегрируются, и получаем:

$$m_\mu(\alpha,\beta)=\frac{2f_2'(\beta)}{B(\beta)}\,\frac{\psi_{2\mu}'(\beta)}{f_1(\alpha)-f_2(\beta)}+n_{2\mu}(\beta)=$$

$$=\frac{2f_1'(\alpha)}{A(\alpha)}\,\frac{\psi_{1\mu}'(\alpha)}{f_1(\alpha)-f_2(\beta)}+n_{1\mu}(\alpha)\,. \qquad /17/$$

Для нахождения векторов $n_{1\mu}(\alpha)$ и $n_{2\mu}(\beta)$ поступим следующим образом: помножим равенство /17/ на $f_1(\alpha)-f_2(\beta)$ и подействуем на него оператором $\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}$; тогда получим

$$-\frac{n_{1\mu}'(\alpha)}{f_1'(\alpha)}=\frac{n_{2\mu}'(\beta)}{f_2'(\beta)}=c_\mu.$$

Интегрируя, находим

$$n_{1\mu}(\alpha)=-c_\mu f_1(\alpha)-b_{1\mu}\,,\quad n_{2\mu}(\beta)=c_\mu f_2(\beta)+b_{2\mu}\,.$$

Здесь c_μ, $b_{1\mu}$, $b_{2\mu}$ - некоторые постоянные векторы. Учитывая, что

$$m^\mu\psi_{1\mu}'=m^\mu\psi_{2\mu}'=\psi_1'^{\,2}=\psi_2'^{\,2}=0\,,\quad m^2=-1\,,$$

из /17/ нетрудно получить

$$n_1^2=n_2^2=-1\,.$$

Ввиду того, что в $n_{1\mu}$ и $n_{2\mu}$ входят произвольные функции f_1 и f_2, последнее равенство возможно лишь при условии, что

$$c^2=cb_1=cb_2=0,\quad b_1^2=b_2^2=-1\,.$$

Подставляя теперь /14/ и /17/ в /15/ и интегрируя, найдем

$$\frac{f_1'(\alpha)}{A(\alpha)}\psi_{1\mu}'(\alpha)=a_{1\mu}+b_{1\mu}f_1(\alpha)+\frac{1}{2}c_\mu f_1^2(\alpha),$$

$$\frac{f_2'(\beta)}{B(\beta)}\psi_{2\mu}'(\beta)=a_{2\mu}+b_{2\mu}f_2(\beta)+\frac{1}{2}c_\mu f_2^2(\beta). \qquad /18/$$

Подстановка /18/ в /17/ приводит к равенствам

$$m_\mu(\alpha,\beta)=\frac{1}{f_1(\alpha)-f_2(\beta)}[\,2a_{1\mu}+(f_1(\alpha)+f_2(\beta))b_{1\mu}+f_1(\alpha)f_2(\beta)c_\mu\,]=$$

$$=\frac{1}{f_1(\alpha)-f_2(\beta)}[\,2a_{2\mu}+(f_1(\alpha)+f_2(\beta))\,b_{2\mu}+f_1(\alpha)f_2(\beta)c_\mu\,],$$

из которых следует, что

$$a_{1\mu}=a_{2\mu}=a_\mu\,,\quad b_{1\mu}=b_{2\mu}=b_\mu\,.$$

Окончательно имеем разложение векторов m_μ, $\psi_{1\mu}'$ и $\psi_{2\mu}'$ по базису a_μ, b_μ, c_μ:

$$m_\mu(\alpha,\beta)=\frac{1}{f_1(\alpha)-f_2(\beta)}[\,2a_\mu+(f_1(\alpha)+f_2(\beta))b_\mu+f_1(\alpha)f_2(\beta)c_\mu\,],$$

$$\psi_{1\mu}'(\alpha)=\frac{A(\alpha)}{f_1'(\alpha)}[\,a_\mu+f_1(\alpha)b_\mu+\frac{f_1^2(\alpha)}{2}c_\mu\,],$$

$$\psi_{2\mu}'(\beta)=\frac{B(\beta)}{f_2'(\beta)}[\,a_\mu+f_2(\beta)b_\mu+\frac{f_2^2(\beta)}{2}c_\mu\,]\,, \qquad /19/$$

где векторы a_μ, b_μ, c_μ образуют специальный базис в трехмерном псевдоевклидовом пространстве

$$a^2=c^2=ab=bc=0,\quad b^2=-1\,,\quad ac=1\,.$$

В геометрии этот базис хорошо известен и приведен, например, в /3/.

Представление /19/ удовлетворяет уравнению Даламбера /3/, дополнительным условиям, деривационным формулам /8/ и /10/ и условиям их интегрируемости.

Формулы /19/ получены в трехмерном пространстве-времени, однако они допускают обобщение на пространство E_n^1 любой размерности n:

$$\psi'_{1\mu}(\alpha)=\frac{A(\alpha)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-2} f'^2_i(\alpha)}}\left[a_\mu+\sum_{i=1}^{n-2} f_i(\alpha)b_{i\mu}+\frac{c_\mu}{2}\sum_{i=1}^{n-2} f_i^2(\alpha)\right], \qquad /20/$$

$$\psi'_{2\mu}(\beta)=\frac{B(\beta)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-2} \phi'^2_i(\beta)}}\left[a_\mu+\sum_{i=1}^{n-2} \phi_i(\beta)b_{i\mu}+\frac{c_\mu}{2}\sum_{i=1}^{n-2} \phi_i^2(\beta)\right],$$

где

$$a^2=c^2=ab_i=cb_i=0,\ ac=1,\ b_i b_j=-\delta_{ij}\ ;\ i,j=1,2,\dots,n-2,$$

а $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $f_i(\alpha)$, $\phi_i(\beta)$ - произвольные функции. При этом уравнения /3/ и условия /2/ удовлетворены.

Легко показать, что базис a_μ, c_μ, $b_{\mu i}$, $i=1,2,\dots n-2$, - полный. Для этого достаточно убедиться, что в пространстве E^1_n от данного базиса можно перейти к ортонормированному реперу. Покажем это на примере E^1_4. Если выбрать

$$a_\mu=\left(\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2},0,0\right),\ c_\mu=\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2},0,0\right),$$

$$b_{1\mu}=(0,0,1,0),\quad b_{2\mu}=(0,0,0,1),$$

то ортогональный базис из этих векторов строится с помощью их линейных комбинаций:

$$e_{0\mu}=\frac{1}{\sqrt2}(c_\mu+a_\mu),\ e_{1\mu}=\frac{1}{\sqrt2}(c_\mu-a_\mu),\ e_{2\mu}=b_{1\mu},e_{3\mu}=b_{2\mu}.$$

Тогда

$$e_i e_j=\eta_{ij},$$

где η_{ij} - метрический тензор пространства E^1_4.

4. Асимптотические координаты

Здесь будет показано, как, фиксируя вторую квадратичную форму, т.е. вид функций A и B, можно выбрать криволинейные координаты на поверхности, при этом важную роль играют граничные условия.

Рассмотрим случай струны с массами на концах. Проектируя /5/ соответственно на векторы $x'_\mu(\tau,0)$ и $x'_\mu(\tau,\pi)$, получим

$$g^2(\tau,0)=\frac{\mu_1}{\gamma\sqrt2}g'(\tau,0),\quad g^2(\tau,\pi)=-\frac{\mu_2}{\gamma\sqrt2}g'(\tau,\pi).\qquad /21/$$

Эти формулы представляют собой граничные условия для уравнения /13/. Пользуясь /21/, выразим вектор $\ddot x_\mu(\tau,\sigma_i)$, заданный /5/, в виде

$$\ddot x_\mu(\tau,\sigma_i)=\frac{1}{g^2}[\dot g\dot x+g'x'],\quad \sigma_i=0,\pi.$$

Сравнивая это с соответствующей деривационной формулой, находим на границе $\sigma=\sigma_i$

$$b_{00}(\tau,\sigma_i)=0,\ \sigma_i=0,\pi.$$

Отсюда возникает условие периодичности на $A(\lambda+2\pi)=A(\lambda)$, и тогда

$$b_{00}(\tau,\sigma)=A(\tau+\sigma)-A(\tau-\sigma),\ b_{01}(\tau,\sigma)=A(\tau+\sigma)+A(\tau-\sigma).$$

Полагая, что $A(\lambda)$ - константа /см. приложение/, мы окончательно фиксируем параметры τ и σ и коэффициенты b_{00} и b_{01}. Выбранная таким образом ортогональная координатная сеть называется асимптотической. В случае свободной струны также можно выбрать асимптотические координаты /1/. Уравнение /13/ теперь упрощается:

$$g^2(\alpha,\beta)\frac{\partial^2\ln g^2}{\partial\alpha\partial\beta}=p^2,\qquad /22/$$

где $p = A(\lambda)$ - произвольная константа, а его общее решение имеет вид

$$g^2(\alpha,\beta) = \frac{p^2}{2} \frac{[f_1(\alpha) - f_2(\beta)]^2}{f_1'(\alpha) f_2'(\beta)} . \qquad /23/$$

Решению граничных условий /21/ будет посвящена следующая заметка, так как проблема представляет самостоятельный интерес ввиду нелинейного характера этих условий.

Для свободной струны граничные условия /21/ ($\mu_{1,2}=0$) будут удовлетворены, если потребовать выполнения следующих условий на f_1 и f_2:

$$f_1(\lambda) = f_2(\lambda) = f(\lambda), \quad f(\lambda + 2\pi) = f(\lambda).$$

Рассмотрим свободную струну в пространстве E^1_{n+2}. Теперь нет уравнения /22/, но известно решение, удовлетворяющее уравнению /3/ и свободным граничным условиям

$$x_\mu(\tau,\sigma) = \psi_\mu(\tau+\sigma) + \psi_\mu(\tau-\sigma), \; \psi_\mu(\tau) = \psi_\mu(\tau+2\pi).$$

Подставляя сюда представление /2О/, в котором $A(\alpha) = B(\beta) = p$, получим

$$\psi_\mu'(\lambda) = \frac{p}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} f_i'^2(\lambda)}} [a_\mu + \sum_{i=1}^{n} f_i(\lambda) b_{i\mu} + \frac{c_\mu}{2} \sum_{i=1}^{n} f_i^2(\lambda)], \qquad /24/$$

$$f_i(\lambda + 2\pi) = f_i(\lambda).$$

При этом выполнены условия ортогональной калибровки /2/ и условие, фиксирующее параметры τ и σ:

$$\psi_\mu''^2(\lambda) = -p^2,$$

а также граничные условия

$$x_\mu'(\tau,\sigma_i) = 0, \; \sigma_i = 0, \pi.$$

Формула /24/ содержит n произвольных периодических функций $f_i(\lambda)$, вид которых зависит только от выбора начальных данных для струны.

В работе /1/ обсуждается вопрос о возможности квантования теории с уравнением /22/ и граничными условиями

$$\ln g^2(\tau,\sigma_i) \to -\infty, \; \sigma_i \to 0, \pi,$$

сложность которых не позволяет развить обычным образом квантовую теорию для струны; однако в случае струны с массивными концами для уравнения /22/ сингулярностей на границе не возникает и квантовая теория может быть построена при условии разрешения граничных условий /21/. Представляется целесообразным для квантования свободной струны воспользоваться представлением /2О/ в n-мерном пространстве, используя /3/ в качестве уравнений движения.

Приложение

Покажем на примере струны с массивными концами, что произвольные функции $A(\alpha)$ и $B(\beta)$ можно выбрать в виде констант за счет подходящего выбора параметров τ и σ.

Пользуясь общим решением уравнения Даламбера /3/ и деривационными формулами /8/, нетрудно найти, что

$$\frac{(\ddot{x} + \dot{x}')^2}{4} = \psi_1''^2(\alpha) = -A^2(\alpha), \quad \frac{(\ddot{x} - \dot{x}')^2}{4} = \psi_2''^2(\beta) = -B^2(\beta).$$

Из граничных условий /5/, после их проектирования на вектор $\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{x_\mu'(\tau,\sigma_i)}{\sqrt{-x'^2(\tau,\sigma_i)}}\right)$, следует

$$\psi_1''^2(\tau+\sigma_i) = \psi_2''^2(\tau-\sigma_i), \quad \sigma_i = 0, \pi,$$

что означает равенство квадратов $\psi_1''^2$ и $\psi_2''^2$ и их периодичность /период 2π /. По формулам /4/ перейдем к новому параметру $\tilde{\alpha}=\tilde{\beta}=\tilde{\lambda}$. С учетом /2/ получим

$$\psi_{1,2}''^2(\lambda) = \psi_{1,2}''^2(\tilde{\lambda}) \cdot f'^4(\lambda).$$

Выберем параметр $\tilde{\lambda}$ таким образом, чтобы $\tilde{\psi}_{1,2}''^2(\tilde{\lambda}) = \text{const}$. Тогда должно выполняться равенство

$$\psi_{1,2}''^2(\lambda) = f'^4(\lambda) \cdot \text{const}.$$

Поскольку $\psi_{1,2}''^2(\lambda)$ и $f'(\lambda)$ - периодические функции, то наш выбор параметра $\tilde{\lambda}$ возможен всегда.

Приведенное рассуждение без изменения переносится на пространство произвольной размерности n.

Литература

1. *Omnes R. Preprint Laboratoire de Phys.Theor. et Hautes Energies, No. 77/12.*
2. *Liouville J. J.Math.p.appl., 1853, 18, p. 71-72.*
3. *Фавар Ж. Курс локальной дифференциальной геометрии. ИЛ, М., 1960.*

Рукопись поступила в издательский отдел
31 марта 1978 года.