ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P2 - 11427

Ю.Нири, Я.А.Смородинский

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БАЗИСНОЙ ФУНКЦИИ В СИСТЕМЕ ТРЕХ ЧАСТИЦ

1978

P2 - 11427

Ю.Нири, Я.А.Смородинский

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БАЗИСНОЙ ФУНКЦИИ В СИСТЕМЕ ТРЕХ ЧАСТИЦ

Направлено в "Nuclear Physics"

Нири Ю., Смородинский Я.А. P2 - 11427

Преобразования базисной функции в системе трех частиц

Рассматривается коэффициент преобразования $\langle j_1' j_2' | j_1 j_2 \rangle^{\phi}_{KJ} = \langle j_1' j_2' | R^{\phi}(\vec{\xi},\vec{\eta}) | j_1 j_2 \rangle_{KJM}$ в шестимерном пространстве. Показана связь между двумя вариантами этого коэффициента.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Nyiri J., Smorodinsky Ya.A. P2 - 11427

The Basis Function Transformations in the Three Particle System

The transformation coefficient in the 6-dimensional space $\langle j_1' j_2' | R^{\phi}(\vec{\xi},\vec{\eta}) | j_1 j_2 \rangle_{KJM} = \langle j_1' j_2' | j_1 j_2 \rangle^{\phi}_{KJ}$ is investigated. The connection between two versions of this coefficient is presented.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

ВВЕДЕНИЕ

Гиперсферические функции представляют собой естественный базис в квантово-механической задаче нескольких тел. Существуют разные возможности построения этих базисных функций; самой простой кажется использование так называемых функций деревьев /1/.

Нам известно, как преобразовать функции деревьев между разными сферическими системами координат, которые соответствуют разным разложениям $3n-3$ -мерной группы вращения. Однако во многих случаях возникает необходимость изменения базиса внутри $3n-4$-мерного пространства путем вращений на некоторых двумерных плоскостях. В частности, перестановки частиц приводят к вращениям и отражениям, которые сводятся к двумерным вращениям. Для того, чтобы производить эти вращения, необходимо обобщить d-функции Вигнера.

В настоящей работе мы, не затрагивая общего случая, рассматриваем случай шестимерного пространства, соответствующий задаче трех тел. Потребуем, чтобы трехчастичные базисные функции имели определенные свойства перестановочной симметрии. Из этого возникает необходимость вычисления матричных элементов операторов перестановки между гиперсферическими функциями типа деревьев. При этом надо помнить, что перестановки могут быть представлены в виде вращений в шестимерном пространстве координат Якоби $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$. В дальнейшем обозначим операторы этих вращений, как $R^{\phi}(\vec{\xi},\vec{\eta})$, а соответствующие матричные элементы, как

$$\langle j_1' j_2' | R^{\phi}(\vec{\xi},\vec{\eta}) | j_1 j_2 \rangle_{KJM} \equiv \langle j_1' j_2' | j_1 j_2 \rangle^{\phi}_{KJ} .$$

Отметим здесь, что общий случай вращения выражается в виде произведения R^{ϕ} с разными парами $\vec{\xi}, \vec{\eta}$. Матричный элемент, соответствующий углу поворота ϕ, был получен в работах Рейнала и Реваи [3], Смородинского и Эфроса [4]. Результаты этих двух работ почти тождественны, хотя и техника вычислений и конечные формулы отличаются; не совпадает ни фаза, ни нормировка, и, кроме того, в [3] одна из сумм оказывается лишней. В настоящей работе мы ставим своей целью понять связь между двумя вариантами коэффициента $\langle j_1' j_2' | j_1 j_2 \rangle^{\phi}_{KJ}$ и продемонстрировать геометрический смысл операций R^{ϕ} более наглядно.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ

Начнем короткой сводкой обозначений. Для трех частиц массы m_1, m_2, m_3 определяем, как обычно, координаты Якоби в виде

$$\vec{\xi} = \sqrt{\frac{m_3(m_1+m_2)}{m_1+m_2+m_3}}\left(\vec{x}_1 - \frac{m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2}{m_1+m_2}\right),$$

$$\vec{\eta} = \sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2). \qquad /1/$$

При этом на радиус-векторы $\vec{x}_i (i = 1,2,3)$ накладывается условие

$$m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2 + m_3\vec{x}_3 = 0. \qquad /2/$$

В дальнейшем мы ограничимся случаем частиц с равными массами $m_i = 1$, для которого имеем

$$\vec{\xi} = -\sqrt{\frac{3}{2}}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2), \qquad \vec{\eta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2), \qquad /3/$$

и
$$\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3 = 0. \qquad /4/$$

При этом

$$\xi^2 + \eta^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \rho^2, \qquad /5/$$

где ρ - радиус пятимерной сферы. Поэтому можем написать:

$$\vec{\xi} = \rho\cos\Phi,$$
$$\vec{\eta} = \rho\sin\Phi. \qquad /6/$$

Трехмерные векторы $\vec{\xi}$ и $\vec{\eta}$ разделяют шестимерное пространство на два подпространства O(3). Очевидно, что такая операция никак не однозначна; можно выбирать другую пару подпространств с соответствующими векторами $\vec{\xi}'$, $\vec{\eta}'$. Различные пары векторов связаны ортогональным преобразованием

$$\vec{\eta}' = \cos\phi\,\vec{\eta} + \sin\phi\,\vec{\xi},$$
$$\vec{\xi}' = -\sin\phi\,\vec{\eta} + \cos\phi\,\vec{\xi}. \qquad /7/$$

Ортонормированная система собственных функций лапласиана, определенного на пятимерной сфере, пишется в виде

$$\Phi^{j_1 j_2}_{KJM}(\vec{\eta},\vec{\xi}) = \sum_{m_1+m_2=M} C^{JM}_{j_1 m_1 j_2 m_2}\,\Phi^{j_1 j_2 m_1 m_2}_{K}(\vec{\eta},\vec{\xi}) =$$

$$= Y^{j_1 j_2}_{JM}(\vec{m},\vec{n})\,\Psi_{K j_1 j_2}(\Phi), \qquad /8/$$

где $Y_{JM}^{j_1 j_2}(\vec{m},\vec{n}) = \sum_{m_1+m_2=M} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{JM} Y_{j_1 m_1}(\vec{m}) Y_{j_2 m_2}(\vec{n}),$

$$\Psi_{Kj_1j_2}(\Phi) = N_{Kj_1j_2} (\sin\Phi)^{j_1} (\cos\Phi)^{j_2} \times$$

$$\times P_{(K-j_1-j_2)/2}^{(j_1+\frac{1}{2},j_2+\frac{1}{2})}(\cos 2\Phi), \qquad /9/$$

и

$$\vec{m} = \frac{\vec{\eta}}{\eta}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{\xi}}{\xi}.$$

Нормирующий множитель равен

$$N_{Kj_1j_2} = \left[\frac{(2K+4)\Gamma(\frac{K-j_1-j_2}{2}+1)\Gamma(\frac{K+j_1+j_2}{2}+2)}{\Gamma(\frac{K-j_1+j_2}{2}+\frac{3}{2})\Gamma(\frac{K+j_1-j_2}{2}+\frac{3}{2})}\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad /10/$$

а j_1 и j_2 - моменты, связанные с векторами $\vec{\eta}$ и $\vec{\xi}$.

Во многих случаях будет полезно выражать полином Якоби через d-функцию Вигнера:

$$(\sin\Phi)^{j_1+\frac{1}{2}} (\cos\Phi)^{j_2+\frac{1}{2}} P_{\frac{K-j_1-j_2}{2}}^{(j_1+\frac{1}{2},j_2+\frac{1}{2})}(\cos 2\Phi) =$$

$$= (-1)^{M_1-M_2} \left[\frac{(L-M_2)!(L+M_2)!}{(L-M_1)!(L+M_1)!}\right]^{\frac{1}{2}} d_{M_1M_2}^{L}(2\Phi), \qquad /11/$$

где

$$L = \frac{K+1}{2}, \quad M_1 = \frac{j_1+j_2+1}{2}, \quad M_2 = \frac{j_1-j_2}{2}.$$

В этих обозначениях нормирующий множитель /10/ принимает знакомую форму

$$2\left[\frac{(2L+1)(L-M_1)(L+M_1)!}{2(L-M_2)!(L+M_2)!}\right]^{\frac{1}{2}},$$

и таким образом мы получаем

$$\Psi_{Kj_1j_2}(\Phi) = 2(-1)^{M_1-M_2}\left[\frac{2L+1}{\sin 2\Phi}\right]^{\frac{1}{2}} d_{M_1M_2}^{L}(2\Phi). \qquad /12/$$

Фактор $(\sin 2\Phi)^{-\frac{1}{2}}$ возникает из-за разной нормировки полинома Якоби и d-функции. Он исчезнет при переходе от шестимерного элемента объема $\cos^2\Phi \sin^2\Phi\, d\Phi$ к d-функции, нормированной в обычном трехмерном пространстве и имеющей меру $\sin 2\Phi\, d\sin 2\Phi$. Появление d-функции в /9/ облегчает интерпретацию разных формул в настоящей работе с помощью шестимерных вращений.

Вернемся сейчас к паре векторов $\vec{\xi}'$, $\vec{\eta}'$. Разложим $\Phi_{KJM}^{j_1j_2}(\vec{\eta}',\vec{\xi}')$ по функциям исходных векторов:

$$\Phi_{KJM}^{j_1j_2}(\vec{\eta}',\vec{\xi}') = \sum_{j_1'j_2'} \langle j_1'j_2'|j_1j_2\rangle_{KJ}^{\phi} \Phi_{KJM}^{j_1'j_2'}(\vec{\eta},\vec{\xi}). \qquad /13/$$

В дальнейшем мы будем изучать коэффициент $\langle j_1'j_2'|j_1j_2\rangle_{KJ}^{\phi}$. Заметим здесь, что и в [3], и в [4] используются преобразования, несколько отличающиеся от наших /ортогональных/ преобразований. В [4]

$$\vec{\eta}' = \cos\phi\vec{\eta} + \sin\phi\vec{\xi},$$
$$\qquad /14/$$
$$\vec{\xi}' = \sin\phi\vec{\eta} - \cos\phi\vec{\xi}.$$

Соответствующий коэффициент будет иметь вид

$$\langle j_1'j_2'|j_1j_2\rangle_{KJ}^{\phi} (-1)^{j_1}.$$

В работе [3] рассматривается преобразование

$$\vec{\eta}' = -\cos\phi\vec{\eta} + \sin\phi\vec{\xi},$$
$$\vec{\xi}' = -\sin\phi\vec{\eta} - \cos\phi\vec{\xi}, \qquad /15/$$

для которого коэффициент преобразования выражается как

$$\langle j_1' j_2' | j_1 j_2 \rangle^{\phi-\pi}_{KJ} = (-1)^K \langle j_1' j_2' | j_1 j_2 \rangle^{\phi}_{KJ}.$$

3. ВЫВОД КОЭФФИЦИЕНТА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

При выводе изучаемого коэффициента мы следуем работе [4]. Вычисление производится в два этапа. Сначала рассматриваем коэффициент, соответствующий представлению, в котором вектор $\vec{\eta}$ разложен по двум "новым" векторам $\vec{\xi}'$, $\vec{\eta}'$, а потом делаем то же самое для второго вектора $\vec{\xi}$. Итак, пусть у нас имеется специальная функция деревьев $\Phi^{j_1}_{K_1 j_1 m_1}(\vec{\eta})$ с компонентами только в подпространстве $\vec{\eta}$. Вращение /7/ переводит $\vec{\eta}$ в $\vec{\xi}'$ и $\vec{\eta}'$, и мы придем к функции $\Phi^{pq}_{K_1 j_1 m_1}(\vec{\eta}', \vec{\xi}')$. Как показано в [4], соответствующий коэффициент имеет вид

$$\langle pq | j_1 0 \rangle^{\phi}_{K_1 j_1} = (-1)^{\frac{K_1+j_1}{2}} 2^{\frac{K_1-j_1}{2}} \times$$
$$\times \left[\frac{\left(\frac{K_1-p-q}{2}\right)!\left(\frac{K_1+p+q}{2}+1\right)!\left(\frac{K_1-j_1}{2}\right)!(K_1+j_1+1)!!}{(K_1-p+q+1)!!(K_1+p-q+1)!!\left(\frac{K_1+j_1}{2}+1\right)!(K_1-j_1+1)!!} \right]^{1/2} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} p & q & j_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} [(2p+1)(2q+1)]^{1/2} (\cos\phi)^p (\sin\phi)^q \times$$
$$\times P^{(p+1/2,\, q+1/2)}_{\frac{K_1-p-q}{2}}(-\cos 2\phi) \qquad /16/$$

и является на самом деле функцией деревьев в SO(6). Формула /16/ похожа на формулу, описывающую SO(2) вращение, которая преобразует полином Лежандра с помощью функции $D^J_{OM} = P_{JM}$, являющейся функцией деревьев в SO(2). Факторы, стоящие перед функцией $(\cos\phi)^p (\sin\phi)^q P^{(p+1/2,q+1/2)}_{\frac{K_1-p-q}{2}}(-\cos 2\phi)$, связаны с нормировкой и упрощаются при переходе к d-функции.

Таким образом, мы получили коэффициент преобразования $\Phi^{j_1}_{K_1 j_1 m_1}(\vec{\eta})$ в $\Phi^{pq}_{K_1 j_1 m_1}(\vec{\eta}', \vec{\xi}')$. Такая же процедура может быть проделана для функции, имеющей компоненты только в подпространстве $\vec{\xi}$. Коэффициент преобразования, соответствующий этому случаю, пишется в виде

$$\langle rs | 0 j_2 \rangle^{\phi}_{K_2 j_2} = (-1)^{\frac{K_2+r-s}{2}} 2^{\frac{K_2-j_2}{2}} \times$$
$$\times \left[\frac{\left(\frac{K_2-r-s}{2}\right)!\left(\frac{K_2+r+s}{2}+1\right)!\left(\frac{K_2-j_2}{2}\right)!(K_2+j_2+1)!!}{(K_2-r+s+1)!!(K_2+r-s+1)!!\left(\frac{K_2+j_2}{2}+1\right)!(K_2-j_2+1)!!} \right]^{1/2} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} s & r & j_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} [(2s+1)(2r+1)]^{1/2} \cdot (\cos\phi)^s (\sin\phi)^r \times$$
$$\times P^{(s+1/2,\, r+1/2)}_{\frac{K_2-s-r}{2}}(-\cos 2\phi). \qquad /17/$$

Каждое из преобразований трехмерных векторов $\vec{\eta}$ и $\vec{\xi}$ ведет к возникновению новой пары векторов в обоих подпространствах с моментом $j_1 \to p+q$ и $j_2 \to r+s$ соответственно. После этого нам надо собрать моменты по схеме $p+r=j_1'$ и $q+s=j_2'$. При этом мы все время находимся внутри "мультиплета" с полным моментом J /и, конечно, с данным $K=K_1+K_2$ /.

Почти очевидно, что после суммирования по всем магнитным квантовым числам все эти операции сводятся к $9j$ -коэффициенту. Основная идея заключается тут в использовании вращений для преобразования одного момента в два, а также в сложении этих двух моментов в один с помощью коэффициентов Клебша-Гордана.

Не вдаваясь в подробности, отметим лишь, что в настоящем расчете вращения в шестимерном пространстве и коэффициенты Клебша-Гордана в трехмерном пространстве фигурируют в некотором смысле как дополнительные величины. Этот факт может быть использован для вывода различных соотношений. /Подобного рода исследования будут рассмотрены в другой работе/.

После получения специальных случаев /16/, /17/ коэффициента преобразования мы можем написать общий вид коэффициента, следуя схеме, описанной выше:

$$\langle j_1' j_2' | j_1 j_2 \rangle^{\phi}_{KJ} = \frac{\pi}{4} (-1)^{J + \frac{K+j_1+j_2}{2}} \times$$

$$\times \left(\frac{K_1-j_1}{2}\right)! \left(\frac{K_1+j_1+1}{2}\right)! \left(\frac{K_2-j_2}{2}\right)! \left(\frac{K_2+j_2+1}{2}\right)! \times$$

$$\times \left[\frac{\left(\frac{K-j_1'-j_2'}{2}\right)! \left(\frac{K+j_1'+j_2'}{2}+1\right)! (K-j_1'+j_2'+1)!! (K+j_1'-j_2'+1)!!}{\left(\frac{K-j_1-j_2}{2}\right)! \left(\frac{K+j_1+j_2}{2}+1\right)! (K-j_1+j_2+1)!! (K+j_1-j_2+1)!!} \right]^{1/2} \times$$

$$\times \sum_{prqs} \left\{\!\!\left\{ \begin{matrix} p & r & j_1' \\ q & s & j_2' \\ j_1 & j_2 & J \end{matrix} \right\}\!\!\right\} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{K_1-p+q}{2}+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{K_1+p-q}{2}+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{K_2-r+s}{2}+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{K_2+r-s}{2}+\frac{3}{2}\right)} \times$$

$$\times (\cos\phi)^{p+s} (\sin\phi)^{q+r} \times$$

$$\times P^{(p+1/2,\, q+1/2)}_{\frac{K_1-p-q}{2}} (-\cos 2\phi) P^{(s+1/2,\, r+1/2)}_{\frac{K_2-s-r}{2}} (-\cos 2\phi). \qquad /18/$$

Здесь мы ввели обозначение

$$\left\{\!\!\left\{ \begin{matrix} p & r & j_1' \\ q & s & j_2' \\ j_1 & j_2 & J \end{matrix} \right\}\!\!\right\} = [(2j_1+1)(2j_2+1)(2j_1'+1)(2j_2'+1)]^{1/2} \times$$

$$\times (2p+1)(2q+1)(2s+1)(2r+1) \times \qquad /19/$$

$$\times \begin{pmatrix} p & q & j_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & r & j_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & r & j_1' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & s & j_2' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} p & r & j_1' \\ q & s & j_2' \\ j_1 & j_2 & J \end{matrix} \right\},$$

которое подчеркивает способ преобразования моментов. Выражение /18/ совпадает с формулой /38/ в /4/.

Переписывая /18/ в терминах d-функций, имеем:

$$\langle j_1' j_2' | j_1 j_2 \rangle^{\phi}_{KJ} = \frac{\pi}{2} (-1)^{J+1} \times$$

$$\times \left(\frac{K_1-j_1}{2}\right)! \left(\frac{K_1+j_1+1}{2}\right)! \left(\frac{K_2-j_2}{2}\right)! \left(\frac{K_2+j_2+1}{2}\right)! \times$$

$$\times\left[\frac{\left(\frac{K-j_1'-j_2'}{2}\right)!\left(\frac{K+j_1'+j_2'}{2}+1\right)!\left(\frac{K-j_1'+j_2'+1}{2}\right)!\left(\frac{K+j_1'-j_2'+1}{2}\right)!}{\left(\frac{K-j_1-j_2}{2}\right)!\left(\frac{K+j_1+j_2}{2}+1\right)!\left(\frac{K-j_1+j_2+1}{2}\right)!\left(\frac{K+j_1-j_2+1}{2}\right)!}\right]^{1/2}\times$$

$$\times\sum_{prqs}\left[\left(\frac{K_1-p+q+1}{2}\right)!\left(\frac{K_1+p-q+1}{2}\right)!\left(\frac{K_1-p-q}{2}\right)!\left(\frac{K_1+p+q}{2}+1\right)\right]^{-1/2}\times$$

$$\times\left[\left(\frac{K_2-s+r+1}{2}\right)!\left(\frac{K_2+s-r+1}{2}\right)!\left(\frac{K_2-r-s}{2}\right)!\left(\frac{K_2+r+s}{2}+1\right)!\right]^{-1/2}\times$$

$$\times\left\{\!\!\left\{\begin{matrix} p & r & j_1' \\ q & s & j_2' \\ j_1 & j_2 & J\end{matrix}\right\}\!\!\right\}\frac{1}{\sin 2\phi}\, d^{\frac{K_1+1}{2}}_{\frac{q+p+1}{2},\frac{p-q}{2}}(2\phi)\, d^{\frac{K_2+1}{2}}_{\frac{r+s+1}{2},\frac{s-r}{2}}(2\phi). \qquad /20/$$

Как уже было отмечено, фактор $(\sin 2\phi)^{-1}$ связан с нормировкой: он исчезнет, как только мы будем рассматривать d-функции, нормированные в трехмерном пространстве вместо шестимерного.

В формулах /18/ и /20/ на самом деле имеется свобода выбора K_2. Если, например, положить $K_2=j_2$ /в случае чего только $j_2=s+r$ даст член, отличный от нуля/, выражение для коэффициента преобразования становится намного проще. Параметр K_2 не имеет физического значения и не входит в конечную формулу. Неудивительно, что выбор $K_2=j_2=s+r$, который сводится к равенству верхнего индекса и одного из нижних индексов второй d-функции в /20/, и дает самый простой результат. Окончательная формула таким образом может быть написана в виде

$$\langle j_1' j_2' | j_1 j_2\rangle^{\phi}_{KJ} = \frac{\pi}{2}(-1)^{J+1}\frac{(j+\frac{1}{2})!}{[(j_2+1)!]^{1/2}}\times$$

$$\times\left[\frac{\left(\frac{K-j_1-j_2}{2}\right)!\left(\frac{K+j_1-j_2+1}{2}\right)!\left(\frac{K-j_1'-j_2'}{2}\right)!\left(\frac{K+j_1'+j_2'}{2}+1\right)!\left(\frac{K-j_1'+j_2'+1}{2}\right)!\left(\frac{K+j_1'-j_2'+1}{2}\right)!}{\left(\frac{K+j_1+j_2}{2}+1\right)!\left(\frac{K-j_1+j_2+1}{2}\right)!}\right]^{1/2}\times$$

$$\times\sum_{prq}\left[\left(\frac{K-j_2-p+q+1}{2}\right)!\left(\frac{K-j_2+p-q+1}{2}\right)!\left(\frac{K-j_2-q-p}{2}\right)!\left(\frac{K-j_2+q+p}{2}+1\right)!\right]^{-1/2}\times$$

$$\times\left[\left(r+\frac{1}{2}\right)!\left(j_2-r+\frac{1}{2}\right)!\right]^{-1/2}\cdot\left\{\!\!\left\{\begin{matrix} p & r & j_1' \\ q & j_2-r & j_2' \\ j_1 & j_2 & J\end{matrix}\right\}\!\!\right\}\times$$

$$\times\frac{1}{\sin 2\phi}\, d^{\frac{K-j_2+1}{2}}_{\frac{q+p+1}{2},\frac{p-q}{2}}(2\phi)\, d^{\frac{j_2+1}{2}}_{\frac{j_2+1}{2},\frac{j_2}{2}-r}(2\phi). \qquad /21/$$

/В терминах полиномов Якоби это означает, что второй из них становится равным единице/.

Существуют другие возможности выбора K_2, они подробно рассматриваются в /4/.

4. СРАВНЕНИЕ С ФОРМУЛОЙ РЕЙНАЛЯ И РЕВАИ

В дальнейшем мы покажем, каким образом можно преобразовать /18/ к виду, полученному в /3/. Используя выражения /5/

$$J_{p+1/2}(2i\cos\phi)J_{q+1/2}(2\sin\phi) =$$

$$= \sum_{K_1} P^{(p+1/2,\,q+1/2)}_{\frac{K_1-p-q}{2}}(-\cos 2\phi)\frac{i^{K_1-q+1/2}(\cos\phi)^{p+1/2}(\sin\phi)^{q+1/2}}{\Gamma\left(\frac{K_1+p-q}{2}+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{K_1-p+q}{2}+\frac{3}{2}\right)}.$$

$$J_{s+1/2}(2i\cos\phi)J_{r+1/2}(2\sin\phi) =$$

$$= \sum_{K_2} P^{(s+1/2,\, r+1/2)}_{\frac{K_2-s-r}{2}}(-\cos 2\phi)\frac{i^{K_2-r+1/2}(\cos\phi)^{s+1/2}(\sin\phi)^{r+1/2}}{\Gamma\left(\frac{K_2+s-r}{2}+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{K_2-s+r}{2}+\frac{3}{2}\right)}. \qquad /22/$$

и выбирая только член с определенным значением К, можно переписать формулу /18/ в виде

$$\langle j_1' j_2' | j_1 j_2 \rangle^{\phi}_{KJ} = \frac{4}{\pi}(-1)^{\frac{3J+j_2+j_2'}{2}} \times$$

$$\times \left(\frac{K_1-j_1}{2}\right)!\left(\frac{K_1+j_1+1}{2}\right)!\left(\frac{K_2-j_2}{2}\right)!\left(\frac{K_2+j_2+1}{2}\right)! \times$$

$$\times \left[\frac{\left(\frac{K-j_1'-j_2'}{2}\right)!\left(\frac{K+j_1'+j_2'}{2}+1\right)!\left(\frac{K-j_1'+j_2'+1}{2}\right)!\left(\frac{K+j_1'-j_2'+1}{2}\right)!}{\left(\frac{K-j_1-j_2}{2}\right)!\left(\frac{K+j_1+j_2}{2}+1\right)!\left(\frac{K-j_1+j_2+1}{2}\right)!\left(\frac{K+j_1-j_2+1}{2}\right)!}\right]^{1/2} \times$$

$$\times \sum_{prqs} \left\{\!\!\left\{\begin{matrix} p & r & j_1' \\ q & s & j_2' \\ j_1 & j_2 & J \end{matrix}\right\}\!\!\right\} j_p(2i\cos\phi)j_q(2\sin\phi)j_s(2i\cos\phi)j_r(2\sin\phi). \qquad /23/$$

По определению,

$$\left\{\begin{matrix} p & r & j_1' \\ q & s & j_2' \\ j_1 & j_2 & J \end{matrix}\right\} = [(2j_1+1)(2j_2+1)(2j_1'+1)(2j_2'+1)]^{-1/2} \times$$

$$\times \sum_{m_1 m_2 m_1' m_2'} C^{JM}_{j_1 m_1 j_2 m_2} C^{JM}_{j_1' m_1' j_2' m_2'} \times$$

$$\times \sum_{\pi\rho\kappa\sigma} C^{j_1' m_1'}_{p\pi r\rho} C^{j_2' m_2'}_{q\kappa s\sigma} C^{j_1 m_1}_{p\pi q\kappa} C^{j_2 m_2}_{r\rho s\sigma}. \qquad /24/$$

Последние четыре коэффицента Клебша-Гордана мы заменяем выражениями типа

$$C^{j_1 m_1}_{p\pi q\kappa} C^{j_1 0}_{p0q0} = \left[\frac{4\pi(2j_1+1)}{(2p+1)(2q+1)}\right]^{1/2} \times$$

$$\times \int Y_{p\pi}(\hat{P}_i)Y_{q\kappa}(\hat{P}_i)Y^{*}_{j_1 m_1}(\hat{P}_i)d\hat{P}_i. \qquad /25/$$

Кроме этого, введением трехмерных единичных векторов P_i, P_k, Q_i, Q_k можно переписать функции Бесселя в /21/ в форме $j_p(2iP_iP_k\cos\phi)$, $j_s(2iQ_iQ_k\cos\phi)$, $j_q(2P_iQ_k\sin\phi)$, $j_r(2Q_iP_k\sin\phi)$.

Используя хорошо известное разложение плоской волны, приходим к выражению

$$\langle j_1' j_2' | j_1 j_2 \rangle^{\varphi}_{KJ} = 16\pi(-1)^{\frac{3J+j_2+j_2'}{2}} \times$$

$$\times \left(\frac{K_1-j_1}{2}\right)!\left(\frac{K_1+j_1+1}{2}\right)!\left(\frac{K_2-j_2}{2}\right)!\left(\frac{K_2+j_2+1}{2}\right)! \times$$

$$\times \left[\frac{\left(\frac{K-j_1'-j_2'}{2}\right)!\left(\frac{K+j_1'+j_2'}{2}+1\right)!\left(\frac{K-j_1'+j_2'+1}{2}\right)!\left(\frac{K+j_1'-j_2'+1}{2}\right)!}{\left(\frac{K-j_1-j_2}{2}\right)!\left(\frac{K+j_1+j_2}{2}+1\right)!\left(\frac{K-j_1+j_2+1}{2}\right)!\left(\frac{K+j_1-j_2+1}{2}\right)!}\right]^{1/2} \times$$

$$\times \sum_{m_1 m_2 m_1' m_2'} C^{JM}_{j_1 m_1 j_2 m_2} C^{JM}_{j_1' m_1' j_2' m_2'} \times$$

$$\times \int e^{-2P_i P_k \cos\phi - 2Q_i Q_k \cos\phi + 2iQ_i P_k \sin\phi + 2iP_i Q_k \sin\phi} \times$$

$$\times Y_{j_1 m_1}(\hat{P}_i) Y_{j_2 m_2}(\hat{Q}_i) Y^*_{j_1' m_1'}(\hat{P}_k) Y^*_{j_2' m_2'}(\hat{Q}_k) d\hat{P}_i d\hat{Q}_i d\hat{P}_k d\hat{Q}_k \ . \qquad /26/$$

Написав эту формулу, мы практически пришли к той форме коэффициента, которая дана в работе /3/. Здесь коэффициент преобразования определен как интеграл перекрытия $\Phi^{j_1' j_2'}_{KJM}(\vec{\eta},\vec{\xi})$ и $\Phi^{j_1 j_2}_{KJM}(\vec{\eta}',\vec{\xi}')$/см. формулу /33/ в /3/ /.

$$\langle j_1' j_2' | j_1 j_2 \rangle^{\phi}_{KJ} = \sum_{m_1 m_2 m_1' m_2'} C^{JM}_{j_1 m_1 j_2 m_2} C^{JM}_{j_1' m_1' j_2' m_2'} \times$$

$$\times \int (\Phi_k^{j_1' j_2' m_1' m_2'}(\vec{\eta},\vec{\xi}))^* \Phi_k^{j_1 j_2 m_1 m_2}(\vec{\eta}',\vec{\xi}') d\vec{\eta}\, d\vec{\xi}. \qquad /27/$$

Без детального обсуждения отметим тот факт,что,подставляя в это выражение /34/ и /35/ из работы /3/ , мы приходим к формуле, совпадающей с /26/. Отличается только нормирующий множитель, который объясняется лишней суммой в работе Рейналя и Реваи, эквивалентной сумме по K_2 в нашей формуле /18/.

Таким образом, наша цель достигнута: разные формы коэффициента преобразования сведены друг к другу. Однако в этом месте становится ясно, что существует более простой способ вывода этого коэффициента. В самом деле, если применить преобразование /14/ к шестимерным векторам P и iQ

$$iQ_k = \cos\phi\, iQ_i + \sin\phi P_i \ ,$$

$$P_k = \sin\phi\, iQ_i - \cos\phi P_i \ ,$$

то в /26/ можно написать

$$e^{-2P_i P_k \cos\phi - 2Q_i Q_k \cos\phi + 2iQ_i P_k \sin\phi + 2iP_i Q_k \sin\phi} = e^{2(P^2 - Q^2)}$$

с условием $P^2 - Q^2 = 0$, которое определяет шестимерный конус. Легко видеть, что коэффициент преобразования выводится просто, если начать с экспоненциальной функции $e^{2(P^2-Q^2)}$ вместо интеграла перекрытия, а потом шаг за шагом проделать все преобразования, описанные выше, читая настоящую работу в обратном направлении. Применив преобразование /14/ и разложив результат по функциям Бесселя, приходим к сумме, каждый из членов которой состоит из 4 функций Бесселя и из 8 функций Лежандра. Положив $P^2 = Q^2 = 1$, произведение двух функций Бесселя преобразуем в ряд по полиномам Якоби. Суммируя по магнитным квантовым числам соответственно 9j коэффициенту, выделяем квантовые числа j_1, j_2, j_1', j_2', J, M.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали два способа для вывода коэффициента преобразования в шестимерном пространстве. Второй способ: замена интеграла перекрытия матричным элементом некоторой экспоненциальной функции /равной на самом деле единице/ дает возможность для обобщения разных коэффициентов в теории угловых моментов.

Вычисленный нами матричный элемент завершает серию коэффициентов преобразования так называемых функций деревьев. Вместе с T-коэффициентами, полученными Кильдюшовым, которые реализуют преобразования между разными деревьями, коэффициент $\langle j_1' j_2' | j_1 j_2 \rangle^{\phi}_{KJ}$ дает нам все факторы функции Вигнера для всевозможных линейных преобразований волновой функции системы трех свободных частиц /или трех частиц с гармоническим взаимодействием/. Применение результатов настоящей работы к задаче трех тел будет изложено в другом месте.

Отметим еще, что мы не рассматривали преобразований, которые перемешивают разные компоненты $\vec{\xi}$ и $\vec{\eta}$. Соответствующее обобщение почти очевидно, но оно не нужно в задаче трех тел.

Авторы выражают благодарность Я.Реваи за многочисленные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Виленкин Н.Я., Кузнецов Г.И., Смородинский Я.А. ЯФ, 1965, 2, с. 9О6.*
2. *Кильдюшов М.С. ЯФ, 1972, 15, с. 198.*
3. *Raynal J., Revai J. Nuovo Cimento, (1970), A68, p.612.*
4. *Смородинский Я.А., Эфрос В.Д. ЯФ, 1973, 17, с. 21О.*
5. *Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1963.*

Рукопись поступила в издательский отдел
3О марта 1978 года.