ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 11426

В.К.Мельников

ОБ УРАВНЕНИЯХ, ПОРОЖДАЕМЫХ ОПЕРАТОРНЫМ СООТНОШЕНИЕМ

1978

P2 - 11426

В.К.Мельников

ОБ УРАВНЕНИЯХ, ПОРОЖДАЕМЫХ ОПЕРАТОРНЫМ СООТНОШЕНИЕМ

Направлено в журнал "Математический сборник"

Мельников В.К. Р2 - 11426

Об уравнениях, порождаемых операторным соотношением

Рассмотрена система уравнений, порождаемая операторным соотношением, аналогичным операторному представлению Лакса для уравнения Картевега–де Вриза. Показано, что полученная таким образом система уравнений имеет несколько бесконечных серий законов сохранения. Найдены условия существования и единственности аналитического решения этой системы. Рассмотрение проведено для случая произвольного числа пространственных переменных.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Melnikov V.K. P2 - 11426

On Equations Generated by the Operator Relation

A system of equations generated by the operator relation analogous to the operator Lax representation for the Korteweg–de Vries equation is considered. It is shown that the system of equations thus obtained has several infinite series of conservation laws. The conditions for the existence and uniqueness of the analytic solution of this system are found. An arbitrary number of space variables is considered.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

В настоящей работе речь будет идти о системе нелинейных эволюционных уравнений, порождаемой операторным соотношением вида

$$\frac{\partial L}{\partial t} + [\mathcal{A}, L] = \Lambda^{-1}[\Lambda, \mathcal{A}](L - i\zeta^{k_0+1}), \qquad /1/$$

где Λ - диагональная матрица с различными диагональными элементами $\lambda_r \in \mathbf{C}$, $r = 1, \dots, r_0$; ζ - комплексный параметр, а целое число $k_0 \geq 0$. При этом мы будем предполагать, что операторы L и $\mathcal{A}$ имеют вид

$$L = \Lambda^{-1}\Big(\sum_{\alpha=1}^{\alpha_0} Q_\alpha \partial_\alpha + u\Big), \qquad /2/$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_n = \sum_{m=0}^{n} A_m \zeta^{n-m} + \sum_{\alpha=1}^{\alpha_0} R_\alpha \partial_\alpha + v, \qquad /2'/$$

где ∂_α - оператор дифференцирования по пространственной переменной x_α, а $Q_\alpha = Q_\alpha(\zeta)$ и $R_\alpha = R_\alpha(\zeta)$ - рациональные функции параметра ζ, $\alpha = 1, \dots, \alpha_0$. Кроме того, мы будем предполагать, что $u = u(x,t)$ и $v = v(x,t)$ - квадратные матрицы порядка r_0, элементы которых зависят рационально от параметра ζ, $A_m = A_m(x,t)$ - квадратные матрицы того же порядка r_0, элементы которых от ζ не зависят, и $x = (x_1, \dots, x_{\alpha_0})$. Далее, мы будем предполагать, что в комплексной плоскости ζ полюса матрицы u отличны от полюсов матрицы v, причем в бесконечно удаленной точке матрица u имеет полюс порядка $k_0 \geq 0$, а матрица v обращается в нуль в этой точке. Короче говоря, мы будем предполагать, что матрицы u и v допускают разложение

$$u = \sum_{k=0}^{k_0} u_k(x,t)\zeta^{k_0-k} + \sum_{\mu=1}^{\mu_0}\sum_{p=1}^{p_\mu} \frac{u_{\mu p}(x,t)}{(\zeta-\zeta_\mu)^p},$$

$$v = \sum_{\nu=1}^{\nu_0}\sum_{q=1}^{q_\nu} \frac{v_{\nu q}(x,t)}{(\zeta-\zeta'_\nu)^q}, \qquad /3/$$

где точки $\zeta_1,\dots,\zeta_{\mu_0},\zeta'_1,\dots,\zeta'_{\nu_0}$ лежат в комплексной плоскости ζ и все различны. Наконец, мы будем предполагать, что функции Q_α могут иметь полюса только в точках $\zeta_1,\dots,\zeta_{\mu_0}$, а функции R_α могут иметь полюса только в точках $\zeta'_1,\dots,\zeta'_{\nu_0}$, причем порядки этих полюсов не превосходят соответственно $p_1,\dots,p_{\mu_0}$ и $q_1,\dots,q_{\nu_0}$. В частности, мы будем предполагать, что в бесконечно удаленной точке функции Q_α и R_α не имеют особенностей. Иначе говоря, справедливы выражения

$$Q_\alpha = Q_{\alpha 0} + \sum_{\mu=1}^{\mu_0}\sum_{p=1}^{p_\mu} \frac{Q_{\alpha\mu p}}{(\zeta-\zeta_\mu)^p},$$

$$R_\alpha = R_{\alpha 0} + \sum_{\nu=1}^{\nu_0}\sum_{q=1}^{q_\nu} \frac{R_{\alpha\nu q}}{(\zeta-\zeta'_\nu)^q}. \qquad /4/$$

Положим теперь

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x,t)\zeta^{k_0-k}, \quad v = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x,t)\zeta^{-k}, \qquad /5/$$

$$Q_\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} Q_{\alpha k}\zeta^{-k}, \quad R_\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} R_{\alpha k}\zeta^{-k}, \qquad /6/$$

где u_k при $k>k_0$ и v_k при $k>0$ соответственно равны

$$u_k = \sum_{\mu=1}^{\mu_0}\sum_{p=1}^{p^*_{\mu k}} \frac{(k-k_0-1)!}{(k-k_0-p)!\,(p-1)!}\zeta_\mu^{k-k_0-p}\, u_{\mu p}(x,t),$$

$$v_k = \sum_{\nu=1}^{\nu_0}\sum_{q=1}^{q_{\nu k}} \frac{(k-1)!}{(k-q)!\,(q-1)!}\zeta'^{\,k-q}_\nu\, v_{\nu q}(x,t), \qquad /7/$$

а $Q_{\alpha k}$ и $R_{\alpha k}$ при $k>0$ соответственно равны

$$Q_{\alpha k} = \sum_{\mu=1}^{\mu_0}\sum_{p=1}^{p_{\mu k}} \frac{(k-1)!}{(k-p)!\,(p-1)!}\zeta_\mu^{k-p}\, Q_{\alpha\mu p},$$

$$R_{\alpha k} = \sum_{\nu=1}^{\nu_0}\sum_{q=1}^{q_{\nu k}} \frac{(k-1)!}{(k-q)!\,(q-1)!}\zeta'^{\,k-q}_\nu R_{\alpha\nu q}. \qquad /8/$$

При этом $p_{\mu k} = \min(p_\mu,k)$, $q_{\nu k} = \min(q_\nu,k)$, $p^*_{\mu k} = \min(p_\mu,k-k_0)$.

Предположим теперь, что существует бесконечная последовательность матриц A_m, таких, что при $m=0$ выполняется соотношение

$$[\Lambda, A_0] = 0, \qquad /9/$$

при $1 \le m \le k_0$, если $k_0 > 0$, выполняется соотношение

$$i[\Lambda, A_m] - \sum_{k=0}^{m-1}[u_k, A_{m-k-1}] = 0, \qquad /10/$$

а при $m > k_0$ выполняется соотношение

$$i[\Lambda, A_m] - \sum_{k=0}^{m-1}[u_k, A_{m-k-1}] - \sum_{k=0}^{m-k_0-1}\sum_{\alpha=1}^{\alpha_0} Q_{\alpha k}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}A_{m-k_0-k-1} = 0. \qquad /11/$$

В этой ситуации соотношение /1/ эквивалентно системе нелинейных эволюционных уравнений, которая получается следующим образом. В силу равенств /2/ и /2′/ соотношение /1/ может быть представлено в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{\alpha_0} R_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}-\sum_{\alpha=1}^{\alpha_0}\sum_{m=0}^{n} Q_\alpha \frac{\partial A_m}{\partial x_\alpha}\zeta^{n-m}-$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{\alpha_0} Q_\alpha \frac{\partial v}{\partial x_\alpha}-[u-i\zeta^{k_0+1}\Lambda,\ v+\sum_{m=0}^{n} A_m\zeta^{n-m}]=0. \qquad /12/$$

Левая часть этого равенства в силу равенств /3/ и /4/ будет рациональной функцией параметра ζ с полюсами в точках $\zeta_1,\dots,\zeta_{\mu_0}$, $\zeta'_1,\dots,\zeta'_{\nu_0}$ и в бесконечно удаленной точке, причем порядки этих полюсов не превосходят соответственно $p_1,\dots,p_{\mu_0}$, $q_1,\dots,q_{\nu_0}$ и $n+k_0+1$. Это значит, что левая часть равенства /12/ может быть представлена в виде

$$\sum_{\ell=0}^{n+k_0+1} C_\ell\zeta^\ell+\sum_{\mu=1}^{\mu_0}\sum_{p=1}^{p_\mu}\frac{M_{\mu p}}{(\zeta-\zeta_\mu)^p}+\sum_{\nu=1}^{\nu_0}\sum_{q=1}^{q_\nu}\frac{N_{\nu q}}{(\zeta-\zeta'_\nu)^q}. \qquad /13/$$

Посмотрим теперь, каковы условия обращения в нуль коэффициентов разложения /13/. Нетрудно видеть, что $C_{n+k_0+1}=0$ в силу равенства /9/. Далее, имеем

$C_{n-m+k_0+1}=0$ при $1\le m\le\min(k_0,n)$ в силу равенства /10/ и при $k_0+1\le m\le n$ в силу равенства /11/, если $n>k_0$. Рассмотрим теперь коэффициент C_{k_0}. Из условия $C_{k_0}=0$ в силу равенства /10/, если $n<k_0$, и в силу равенства /11/, если $n\ge k_0$, следует уравнение

$$\frac{\partial u_0}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{\alpha_0} R_{\alpha 0}\frac{\partial u_0}{\partial x_\alpha}=i[\Lambda,A_{n+1}]-i[\Lambda,v_1]. \qquad /14/$$

Далее, рассмотрим коэффициент C_{k_0-k} при $1\le k\le k_0$, если $k_0>0$. С учетом равенства /10/, если $n+k<k_0$, и равенства /11/, если $n+k\ge k_0$, из условия $C_{k_0-k}=0$ следует уравнение

$$\frac{\partial u_k}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{\alpha_0}\sum_{\kappa=0}^{k} R_{\alpha\kappa}\frac{\partial u_{k-\kappa}}{\partial x_\alpha}=i[\Lambda,A_{n+k+1}]-$$

$$-\sum_{\kappa=0}^{k-1}[u_\kappa,A_{n+k-\kappa}]-i[\Lambda,v_{k+1}]+\sum_{\kappa=0}^{k-1}[u_\kappa,v_{k-\kappa}], \qquad /15/$$

$$1\le k\le k_0.$$

Рассмотрим, наконец, коэффициенты $M_{\mu p}$ и $N_{\nu q}$. Нетрудно видеть, что из условий $M_{\mu p}=0$ и $N_{\nu q}=0$ следуют уравнения

$$\frac{\partial u_{\mu p}}{\partial t}+\sum_{s=0}^{p_\mu-p}\{\sum_{\alpha=1}^{\alpha_0}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\hat R_{\alpha\mu s}u_{\mu,p+s}-Q_{\alpha\mu,p+s}V_{\mu s})+$$

$$+[V_{\mu s},u_{\mu,p+s}]\}=0, \qquad /16/$$

$$\sum_{s=0}^{q_\nu-q}\{\sum_{\alpha=1}^{\alpha_0}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\hat Q_{\alpha\nu s}v_{\nu,q+s}-R_{\alpha\nu,q+s}U_{\nu s})+[U_{\nu s},v_{\nu,q+s}]\}=0, \qquad /17/$$

где $U_{\nu s}$ и $\hat Q_{\alpha\nu s}$ равны соответственно значениям величин

$$\frac{1}{s!}\frac{\partial^s}{\partial\zeta^s}(u-i\zeta^{k_0+1}\Lambda) \quad \text{и} \quad \frac{1}{s!}\frac{\partial^s Q_\alpha}{\partial\zeta^s} \quad \text{в точке } \zeta=\zeta'_\nu,$$

а $V_{\mu s}$ и $\hat R_{\alpha\mu s}$ равны соответственно значениям величин

$$\frac{1}{s!}\frac{\partial^s}{\partial\zeta^s}(\sum_{m=0}^{n} A_m\zeta^{n-m}+v) \quad \text{и} \quad \frac{1}{s!}\frac{\partial^s R_\alpha}{\partial\zeta^s} \quad \text{в точке } \zeta=\zeta_\mu.$$

Кроме того, входящие в уравнения /14/-/17/ матрицы u_k /при $k>k_0$ / и v_k необходимо выразить через матрицы $u_{\mu p}$ и $v_{\nu q}$ с помощью равенств /7/, а величины $Q_{\alpha k}$ и $R_{\alpha k}$, входящие в эти уравнения, нужно при $k>0$ выразить через величины $Q_{\alpha\mu p}$ и $R_{\alpha\nu q}$ с помощью равенств /8/. Полученная таким образом система уравнений будет содержать только коэффициенты разложений /3/ и /4/. Однако заметим сразу, что в дальнейшем мы будем в основном пользоваться коэффициентами разложений /5/, /6/, а не коэффициентами разложений /3/, /4/. Более того, в дальнейшем наравне с уравнениями /16/, /17/ мы воспользуемся равенством для $k>k_0$:

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{\alpha_0}\sum_{\kappa=0}^{k} R_{\alpha\kappa}\frac{\partial u_{k-\kappa}}{\partial x_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha_0}\sum_{\kappa=0}^{k-k_0-1} Q_{\alpha\kappa}\frac{\partial}{\partial x_\alpha} v_{k-k_0-\kappa} +$$

$$+\sum_{\kappa=k}^{n+k}[u_\kappa, A_{n+k-\kappa}] +$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{\alpha_0}\sum_{\kappa=k-k_0}^{n+k-k_0} Q_{\alpha\kappa}\frac{\partial}{\partial x_\alpha} A_{n+k-k_0-\kappa} +$$

$$+\sum_{\kappa=0}^{k-1}[u_\kappa, v_{k-\kappa}] - i[\Lambda, v_{k+1}], \qquad /18/$$

которое следует из уравнений /16/, /17/ или, говоря точнее, является условием обращения в нуль величины

$$\sum_{\mu=1}^{\mu_p}\sum_{p=1}^{p^*_{\mu k}} \frac{(k-k_0-1)!}{(k-k_0-p)!\,(q-1)!}\,\zeta_\mu^{k-k_0-p} M_{\mu p} +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\nu_0}\sum_{q=1}^{q^*_{\nu k}} \frac{(k-k_0-1)!}{(k-k_0-q)!(q-1)!}\,\zeta'^{\,k-k_0-q}_{\nu} N_{\nu q},$$

где $M_{\mu p}$ и $N_{\nu q}$ - коэффициенты разложения /13/, $p^*_{\mu k} = \min(p_\mu, k-k_0)$, $q^*_{\nu k} = \min(q_\nu, k-k_0)$.

Система уравнений /14/-/17/ зависит еще от целочисленного параметра n, входящего в равенство /2'/. Она обладает рядом замечательных свойств. Прежде всего, оказывается, что для любой постоянной /т.е. не зависящей от x / диагональной матрицы A_0 существует бесконечная последовательность матриц A_m, $m>0$, удовлетворяющих соответственно соотношениям /10/ и /11/, элементы которых являются полиномами от элементов матриц u_k, $0\le k\le m-1$, и их производных по $x=(x_1,\dots,x_{\alpha_0})$ соответствующего порядка. Кроме того,

система уравнений /14/-/17/ имеет r_0 бесконечных серий законов сохранения вида

$$\frac{\partial}{\partial t} T_{mr} = \operatorname{div} X_{mr}, \quad m=1,2,\dots;\ r=1,\dots,r_0, \qquad /19/$$

где T_{mr} и $X_{mr}=(X_{mr1},\dots,X_{mr\alpha_0})$ - полиномы от элементов матриц u_k, v_k и их производных по $x=(x_1,\dots,x_{\alpha_0})$ достаточно высокого порядка. При этом T_{mr} не зависят от номера $n\ge 0$ системы /14/-/17/ и от элементов матриц v_k. Кроме того, величины T_{mr} удовлетворяют единственному линейному соотношению

$$\sum_{r=1}^{r_0} T_{mr} = \operatorname{Sp} u_{m-1}, \quad m=1,2,\dots . \qquad /20/$$

Доказательство всех приведенных выше утверждений основывается на следующем. Пусть A_0 - диагональная матрица с различными диагональными элементами $a_r\in\mathbf{C}$, $r=1,\dots,r_0$. Предположим, что все a_r не зависят от x, t и параметра ζ. Положим $\hat A_0 = A_0$. Определим далее бесконечную последовательность матриц $\hat A_m$ так, чтобы при $m>0$ выполнялось рекуррентное соотношение

$$i[\Lambda, \hat A_m] - [u, \hat A_{m-1}] - \sum_{\alpha=1}^{\alpha_0} Q_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\hat A_{m-1} = 0 . \qquad /21/$$

Кроме того, потребуем, чтобы матрицы $\hat A_m$ при $m\ge 0$ удовлетворяли соотношению, которое получается следующим образом. Возьмем полином

$$p(z) = \det |A_0 - zE| = \sum_{r=0}^{r_0} p_r z^r ,$$

подставим в него вместо z ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \hat{A}_m \eta^{-m}$$

и после приведения членов с одинаковыми степенями η приравняем нулю коэффициент при $\eta^{-m}, m>0$. В результате получим соотношение

$$\sum_{r=1}^{r_0} p_r \sum_{s=0}^{r-1} A_0^{r-s-1} \hat{A}_m A_0^s = P_m(A_0, \hat{A}_1, \ldots, \hat{A}_{m-1}), \quad /22/$$

где P_m - полином от матриц $A_0, \hat{A}_1, \ldots, \hat{A}_{m-1}$, причем $P_1 = 0$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Если элементы матрицы u обладают непрерывными частными производными по $x = (x_1, \ldots, x_{\alpha_0})$ любого порядка, то существует единственный набор матриц $\hat{A}_m, m > 0$, удовлетворяющих соотношениям /21/ и /22/. При этом элементы матриц $\hat{A}_m$ либо равняются нулю, либо являются квазиоднородными полиномами ранга m от элементов матрицы u и ее частных производных по пространственным переменным до $(m-1)$ -го порядка, а коэффициенты этих полиномов не зависят от x и t*.

Доказательство этой теоремы содержится в §1 этой работы. Из него следует, что для матрицы u, определяемой равенством /3/, и функций Q_α, определяемых равенством /4/, элементы матриц $\hat{A}_m$ при $m>0$ будут рациональными функциями параметра ζ с полюсами в точках $\zeta_1, \ldots, \zeta_{\mu_0}$. Кроме того, элементы матриц $\hat{A}_m$ могут иметь полюс в бесконечно удаленной точке, причем порядок этого полюса не превосходит mk_0. Это значит, что справедливо разложение

$$\hat{A}_m = \sum_{k=0}^{\infty} A_{mk} \zeta^{mk_0 - k}, \quad /23/$$

где матрицы A_{1k} при любом $k \geq 0$ удовлетворяют соотношению

$$i[\Lambda, A_{1k}] - [u_k, A_0] = 0, \quad /24/$$

а при $m > 1$ матрицы A_{mk} удовлетворяют соотношению

$$i[\Lambda, A_{mk}] - \sum_{\kappa=0}^{k} [u_\kappa, A_{m-1, k-\kappa}] = 0, \quad /25/$$

если $0 \leq k \leq k_0 - 1$ и $k_0 > 0$, и соотношению

$$i[\Lambda, A_{mk}] - \sum_{\kappa=0}^{k} [u_\kappa, A_{m-1, k-\kappa}] - \sum_{\alpha=1}^{\alpha_0} \sum_{\kappa=0}^{k-k_0} Q_{\alpha\kappa} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} A_{m-1, k-k_0-\kappa} = 0, \quad /26/$$

если $k \geq k_0$. С помощью этих соотношений легко устанавливается, что матрицы

$$A_m = \sum_{\mu=1}^{m} A_{\mu, m-\mu} \quad /27/$$

при $1 \leq m \leq k_0$, если $k_0 > 0$, удовлетворяют соотношению /10/, а при $m > k_0$ удовлетворяют соотношению /11/.

Положим теперь для $m > 1$

$$T_m = \mathrm{Sp}(A_0 u_{m-1}) + \sum_{\mu=2}^{m} \frac{i}{\mu - 1} \mathrm{Sp}(\Lambda A_{\mu, m-\mu}), \quad /28/$$

а для $m = 1$

---

* Полином Ω от элементов матрицы u и ее частных производных по $x = (x_1, \ldots, x_{\alpha_0})$ называется квазиоднородным ранга m, если при подстановке в него величины $z^{1+s_1+\ldots+s_{\alpha_0}}$ вместо элементов матрицы $\frac{\partial^{s_1+\ldots+s_{\alpha_0}} u}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_{\alpha_0}^{s_{\alpha_0}}}$ каждый одночлен Ω_ℓ примет вид $C_\ell z^m$, где C_ℓ - отличная от нуля константа.

$$T_1 = Sp(A_0 u_0). \qquad /29/$$

Положим далее для $r=1,\ldots,r_0$

$$T_{mr} = \frac{\partial T_m}{\partial a_r}, \qquad /30/$$

где a_r - диагональные элементы матрицы A_0. Пусть, наконец,

$$\frac{\delta T_{mr}}{\delta \tilde{u}_k} = \sum_{(s)} (-1)^{s_1+\ldots+s_{\alpha_0}} \frac{\partial^{s_1+\ldots+s_{\alpha_0}}}{\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_{\alpha_0}^{s_{\alpha_0}}} \frac{\partial T_{mr}}{\partial \tilde{u}_k^{(s_1,\ldots,s_{\alpha_0})}}, \qquad /31/$$

где суммирование ведется по всем наборам (s) неотрицательных целых чисел $s_1,\ldots,s_{\alpha_0}$, $u_k^{(s_1,\ldots,s_{\alpha_0})} = \frac{\partial^{s_1+\ldots+s_{\alpha_0}} u}{\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_{\alpha_0}^{s_{\alpha_0}}}$, а знак "~" над матрицей u_k означает транспонирование. Поскольку выражение для T_{mr} содержит производные матриц u_k не выше $(m-1)$-го порядка, то в правой части равенства /31/ стоит конечная сумма. Более тщательный анализ, основанный на равенствах /24/-/26/, /28/ и /29/, показывает, что выражение для T_{mr} при $1\leq m\leq k_0+1$ вообще не содержит производных, а при $m>k_0+1$ содержит производные не выше $(m-k_0-1)$-го порядка. Отсюда, в частности, следует, что при $1\leq m\leq k_0+1$ справедливо равенство

$$\frac{\delta T_{mr}}{\delta \tilde{u}_k} = \frac{\partial T_{mr}}{\partial \tilde{u}_k}. \qquad /32/$$

Определенные с помощью равенств /28/-/30/ величины T_{mr} удовлетворяют следующему равенству:

$$\frac{\delta T_{mr}}{\delta \tilde{u}_k} = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial a_r} A_{m-k-1}, & \text{если } m-k-1\geq 0, \\ 0, & \text{если } m-k-1<0. \end{cases} \qquad /33/$$

Справедливость этого равенства устанавливается в §2 этой статьи.

Возьмем теперь какое-нибудь достаточно гладкое решение системы /14/-/17/ и посмотрим, как будут меняться со временем величины T_{mr}, если в них подставить взятое нами решение системы /14/-/17/. Согласно теореме 1 имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} T_{mr} = \sum_{(s)} \sum_{k=0}^{\infty} Sp\left(\frac{\partial T_{mr}}{\partial \tilde{u}_k^{(s_1,\ldots,s_{\alpha_0})}} \frac{\partial}{\partial t} u_k^{(s_1,\ldots,s_{\alpha_0})}\right), \qquad /34/$$

где суммирование ведется по всем наборам (s) неотрицательных целых чисел $s_1,\ldots,s_{\alpha_0}$, не превосходящих некоторого /зависящего только от m / целого числа. Более того, с помощью равенств /24/-/26/, /28/ и /29/ нетрудно убедиться, что выражение для T_{mr} содержит только элементы матриц u_k с номером $k\leq m-1$. Следовательно, в правой части равенства /34/ стоит конечная сумма. При этом производные по времени от матриц u_k в правой части равенства /34/ нужно заменить полученными для них из уравнений /14/, /15/ и /18/ выражениями. Далее, с помощью тождественных преобразований, аналогичных равенству

$$h\frac{\partial w}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(hw) - \frac{\partial h}{\partial x_\alpha} w, \qquad /35/$$

правую часть равенства /34/ преобразуем к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} T_{mr} = \Theta_{mr} + \operatorname{div} Z_{mr}, \qquad /36/$$

где

$$\Theta_{mr} = \sum_{k=0}^{\infty} Sp\left(\frac{\delta T_{mr}}{\delta \tilde{u}_k} \frac{\partial u_k}{\partial t}\right), \qquad /37/$$

а вектор $Z_{mr} = (Z_{mr1},\ldots,Z_{mr\alpha_0})$ определяется, вообще говоря, неоднозначно. Однако произвол в выборе вектора Z_{mr} может быть ликвидирован, если дополнительно потребовать, чтобы при произвольной перестановке пространственных переменных $x=(x_1,\dots,x_{\alpha_0})$ компоненты вектора Z_{mr} преобразовывались бы с помощью этой же перестановки. Важно отметить, что компоненты вектора Z_{mr} будут полиномами от элементов матриц u_k, v_k и их частных производных по $x=(x_1,\dots,x_{\alpha_0})$ до некоторого /зависящего только от m и n/ конечного порядка. При этом для $1\le m\le k_0+1$ в силу равенства /32/ имеем

$$Z_{mr1}=\dots=Z_{mr\alpha_0}\equiv 0. \qquad /38/$$

С учетом равенства /33/ равенство /37/ примет вид

$$\Theta_{mr}=\sum_{k=0}^{m-1}\mathrm{Sp}\Big(\frac{\partial A_{m-k-1}}{\partial a_r}\,\frac{\partial u_k}{\partial t}\Big).$$

Отсюда на основании равенств /14/, /15/ и /18/ следует равенство

$$\Theta_{mr}=\mathrm{Sp}\,F_{mnr}+\mathrm{Sp}\,f_{mr}-\mathrm{Sp}\,g_{mr}, \qquad /39/$$

где при $m>k_0+1$ имеем

$$F_{mnr}=i\frac{\partial A_{m-1}}{\partial a_r}[\Lambda,A_{n+1}]+\sum_{k=1}^{k_0}\frac{\partial A_{m-k-1}}{\partial a_r}\Big(i[\Lambda,A_{n+k+1}]-\sum_{\kappa=0}^{k-1}[u_\kappa,A_{n+k-\kappa}]\Big)+\sum_{k=k_0+1}^{m-1}\frac{\partial A_{m-k-1}}{\partial a_r}\Big(\sum_{\kappa=k}^{n+k}[u_\kappa,A_{n+k-\kappa}]+\sum_{\alpha=1}^{\alpha_0}\sum_{\kappa=k-k_0}^{n+k-k_0}Q_{\alpha\kappa}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}A_{n+k-k_0-\kappa}\Big), \qquad /40/$$

$$f_{mr}=-i\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\partial A_{m-k-1}}{\partial a_r}[\Lambda,v_{k+1}]+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\partial A_{m-k-1}}{\partial a_r}\sum_{\kappa=0}^{k-1}[u_\kappa,v_{k-\kappa}]+\sum_{k=k_0+1}^{m-1}\frac{\partial A_{m-k-1}}{\partial a_r}\sum_{\alpha=1}^{\alpha_0}\sum_{\kappa=0}^{k-k_0-1}Q_{\alpha\kappa}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}v_{k-k_0-\kappa}, \qquad /41/$$

при $2\le m\le k_0+1$ имеем

$$F_{mnr}=i\frac{\partial A_{m-1}}{\partial a_r}[\Lambda,A_{n+1}]+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\partial A_{m-k-1}}{\partial a_r}\Big(i[\Lambda,A_{n+k+1}]-\sum_{\kappa=0}^{k-1}[u_\kappa,A_{n+k-\kappa}]\Big), \qquad /42/$$

$$f_{mr}=-i\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\partial A_{m-k-1}}{\partial a_r}[\Lambda,v_{k+1}]+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\partial A_{m-k-1}}{\partial a_r}\sum_{\kappa=0}^{k-1}[u_\kappa,v_{k-\kappa}], \qquad /43/$$

при $m=1$ имеем

$$F_{1nr}=i\frac{\partial A_0}{\partial a_r}[\Lambda,A_{n+1}],\qquad f_{1r}=-i\frac{\partial A_0}{\partial a_r}[\Lambda,v_1] \qquad /44/$$

и, наконец, при любом $m\ge 1$ имеем

$$g_{mr}=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\partial A_{m-k-1}}{\partial a_r}\sum_{\alpha=1}^{\alpha_0}\sum_{\kappa=0}^{k}R_{\alpha\kappa}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}u_{k-\kappa}. \qquad /45/$$

В §3 этой статьи доказано, что при $m>k_0+1$ справедливы равенства

$$\mathrm{Sp}\,F_{mnr}=\sum_{\alpha=1}^{\alpha_0}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\mathrm{Sp}\Big(\sum_{s=0}^{n}\sum_{k=0}^{m+s-k_0-1}Q_{\alpha k}\frac{\partial A_{m+s-k_0-k-1}}{\partial a_r}A_{n-s}\Big), \qquad /46/$$

$$\mathrm{Sp}\,f_{mr}=\sum_{\alpha=1}^{\alpha_0}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\mathrm{Sp}\Big(\sum_{k=1}^{m-k_0-1}\sum_{\kappa=0}^{m-k_0-k-1}Q_{\alpha k}\frac{\partial A_{m-k_0-k-\kappa-1}}{\partial a_r}v_k\Big), \qquad /47/$$

при $1\le m\le k_0+1$ справедливы равенства

$$\mathrm{Sp}\,F_{mnr}=0,\qquad \mathrm{Sp}\,f_{mr}=0 \qquad /48/$$

и, наконец, при любом $m\ge 1$ справедливо равенство

$$\operatorname{Sp} g_{mr} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha_0} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \sum_{\kappa=0}^{m-1} R_{\alpha\kappa} T_{m-\kappa,r} - $$

$$- \operatorname{div}\Big(\sum_{\alpha=1}^{\alpha_0} \sum_{\kappa=0}^{m-1} R_{\alpha\kappa} G^{(\alpha)}_{m-\kappa,r} \Big), \qquad /49/$$

где вектора $G^{(\alpha)}_{m-\kappa,r} = (G^{(\alpha)}_{m-\kappa,r,1}, \ldots, G^{(\alpha)}_{m-\kappa,r,\alpha_0})$ образуют матрицу /3.12/, удовлетворяющую соотношению /3.13/. Кроме того, при $1 \le m-\kappa \le k_0+1$ справедливо равенство

$$G^{(\alpha)}_{m-\kappa,r,1} = \ldots = G^{(\alpha)}_{m-\kappa,r,\alpha_0} = 0. \qquad /5O/$$

Таким образом, величина Θ_{mr}, определенная с помощью равенства /37/, при любом $m \ge 1$ допускает представление

$$\Theta_{mr} = \operatorname{div} Y_{mr},$$

где вектор $Y_{mr} = (Y_{mr1}, \ldots, Y_{mr\alpha_0})$ согласно равенству /39/ при $m > k_0+1$ определен с помощью равенств /46/, /47/ и /49/, а при $1 \le m \le k_0+1$ определен с помощью равенств /48/-/5O/. В силу /36/ и /38/ отсюда следует, что при $1 \le m \le k_0+1$ справедливо равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} T_{mr} + \sum_{\alpha=1}^{\alpha_0} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \sum_{\kappa=0}^{m-1} R_{\alpha\kappa} T_{m-\kappa,r} = 0.$$

Далее, полагая

$$X_{mr} = Y_{mr} + Z_{mr},$$

мы без труда убеждаемся, что определенные описанным выше образом величины T_{mr} и X_{mr} удовлетворяют соотношению /19/. Суммируя все сказанное выше, мы приходим к следующей теореме.

Тоерема 2. Если у системы уравнений /14/-/17/ в некоторой области G пространства (x,t) существует решение, которое в этой области имеет непрерывные частные производные по $x = (x_1, \ldots, x_{\alpha_0})$ любого порядка, то это решение удовлетворяет в области G всем законам сохранения /19/.

Нелишне отметить, что для того, чтобы решение системы уравнений /14/-/17/ могло удовлетворить нескольким первым законам сохранения /19/, достаточно рассматриваемому решению иметь некоторое конечное число производных по пространственным переменным $x = (x_1, \ldots, x_{\alpha_0})$.

Наконец, в §4 этой статьи рассмотрены вопросы, касающиеся существования и единственности решения системы /14/-/17/.

§1. Доказательство теоремы 1

Рассмотрим уравнение

$$[\hat{A}, L] = \Lambda^{-1} [\Lambda, \hat{A}] (L - i\eta), \qquad /1.1/$$

где оператор L определен с помощью равенства /2/, а $\hat{A}$ - неизвестная матрица порядка r_0. При сделанных ранее предположениях уравнение /1.1/ эквивалентно следующему:

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha_0} Q_\alpha \frac{\partial \hat{A}}{\partial x_\alpha} + [u, \hat{A}] - i\eta[\Lambda, \hat{A}] = 0. \qquad /1.2/$$

Забудем на время, что величины Q_α и матрица u зависят от параметра ζ. Более того, предположим, что все Q_α действительны и

$$Q^2 = \sum_{\alpha=1}^{\alpha_0} Q_\alpha^2 \ne 0.$$

Далее, возьмем вектор $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{\alpha_0})$, где $\gamma_\alpha = Q_\alpha Q^{-2}$, и положим

$$y = \sum_{\alpha=1}^{\alpha_0} \gamma_\alpha x_\alpha .$$

Предположим теперь, что существует y_0, такое, что в полупространстве $y \le y_0$ элементы матрицы u равны тождественно нулю. Предположим, наконец, что все диагональные элементы матрицы Λ действительны.

Пусть теперь A_0 - диагональная матрица с различными диагональными элементами $a_r \in \mathbf{C}$, $r = 1, \ldots, r_0$. Предположим, что a_r не зависят от $x = (x_1, \ldots, x_{\alpha_0})$ и параметра η. Возьмем решение

$$\hat{A} = \phi A_0 \phi^{-1} \qquad /1.3/$$

уравнения /1.2/, где $\phi = \phi(x, \eta)$ - матричное решение уравнения

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha_0} Q_\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} + u\phi = i\eta\Lambda\phi, \qquad /1.4/$$

удовлетворяющее при $y \le y_0$ условию

$$\phi = \exp(i\eta\Lambda y). \qquad /1.5/$$

Отсюда согласно равенству /1.3/ при $y \le y_0$ имеем

$$\hat{A} = A_0 .$$

Определим теперь последовательность матриц $\hat{A}_m$, удовлетворяющих соотношению /21/, следующим образом. При $m=1$ положим

$$\hat{A}_{1,\mu\nu} = i \frac{a_\mu - a_\nu}{\lambda_\mu - \lambda_\nu} u_{\mu\nu}, \text{ если } \mu \ne \nu, \qquad /1.6/$$

$$\hat{A}_{1,\mu\mu} = 0, \quad \mu = 1, \ldots, r_0 . \qquad /1.7/$$

Продолжая этот процесс далее, мы на m-ом шагу $(m \ge 1)$ положим

$$\hat{A}_{m,\mu\nu} = -\frac{i}{\lambda_\mu - \lambda_\nu} \{ \sum_{\sigma=1}^{r_0} (u_{\mu\sigma} \hat{A}_{m-1,\sigma\nu} - \hat{A}_{m-1,\mu\sigma} u_{\sigma\nu}) +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{\alpha_0} Q_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \hat{A}_{m-1,\mu\nu} \}, \text{ если } \mu \ne \nu, \qquad /1.8/$$

$$\hat{A}_{m,\mu\mu} = -Q^{-2} \sum_{\sigma \ne \mu} \int_{-\infty}^{0} \{ u_{\mu\sigma}(x+\gamma\tau) \hat{A}_{m,\sigma\mu}(x+\gamma\tau) - \hat{A}_{m,\mu\sigma}(x+\gamma\tau) u_{\sigma\mu}(x+\gamma\tau) \} d\tau, \quad \mu = 1, \ldots, r_0, \qquad /1.9/$$

причем в силу сделанного ранее предположения подынтегральное выражение в равенстве /1.9/ отлично от нуля только на конечном интервале значений τ. С помощью равенств /1.6/-/1.9/ нетрудно убедиться, что при $y \le y_0$ матрицы $\hat{A}_m$ тождественно равны нулю.

Покажем теперь, что определенные с помощью равенств /1.6/-/1.9/ матрицы $\hat{A}_m$ являются коэффициентами асимптотического при $\eta \to \pm\infty$ разложения матрицы $\hat{A}$, определенной с помощью равенства /1.3/. Действительно, пусть $\Phi_0 = \Phi_0(x)$ - диагональная матрица с элементами

$$\exp\{-Q^{-2} \int_{-\infty}^{0} u_{rr}(x+\gamma\tau) d\tau\}, \quad r = 1, \ldots, r_0,$$

на главной диагонали. Тогда справедливо равенство

$$\lim_{\eta \to \pm\infty} \phi(x, \eta) \exp(-i\eta\Lambda y) = \Phi_0(x). \qquad /1.10/$$

Отсюда согласно /1.3/ имеем

$$\lim_{\eta \to \pm\infty} \hat{A} = A_0 .$$

Покажем теперь, что при любом $n > 0$ справедливо равенство

$$\lim_{\eta \to \pm\infty} (\hat{A} - \sum_{m=0}^{n} \hat{A}_m \eta^{-m}) \eta^n = 0. \qquad /1.11/$$

С этой целью положим

$$\hat{A} = \sum_{m=0}^{n} \hat{A}_m \eta^{-m} + K_n .$$

Подставляя это равенство в уравнение /1.2/, с учетом соотношения /21/ имеем

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha_0} Q_\alpha \frac{\partial K_n}{\partial x_\alpha} + [u, K_n] - i\eta[\Lambda, K_n] = -i[\Lambda, \hat{A}_{n+1}]\eta^{-n}.$$

Отсюда непосредственно следует

$$K_n = \{\hat{A}_{n+1} - Q^{-2}\phi(x,\eta)\int_{-\infty}^{0} \mathcal{K}_n(x+\gamma\tau,\eta)d\tau\,\phi^{-1}(x,\eta)\}\eta^{-(n+1)},$$

где

$$\mathcal{K}_n = \phi^{-1}(x,\eta)\left(\sum_{\alpha=1}^{\alpha_0} Q_\alpha \frac{\partial \hat{A}_{n+1}}{\partial x_\alpha} + [u, \hat{A}_{n+1}]\right)\phi(x,\eta).$$

В силу /1.10/ отсюда следует справедливость равенства /1.11/.

Возьмем теперь полином $p(z) = \det|A_0 - zE|$. В силу равенства /1.3/ имеем

$$p(\hat{A}) = \phi p(A_0)\phi^{-1} = 0.$$

Отсюда на основании равенства /1.11/ следует, что определенные с помощью /1.6/-/1.9/ матрицы $\hat{A}_m$ удовлетворяют соотношению /22/. Воспользуемся этим фактом. В силу сделанного нами предположения имеем $a_\mu \neq a_\nu$ при $\mu \neq \nu$. Отсюда следует, что в левой части равенства /22/ стоит диагональная матрица с элементами $p'(a_\mu)\hat{A}_{m,\mu\mu}$ на главной диагонали. Поскольку $z = a_\mu$ - простой корень полинома $p(z) = 0$, то $p'(a_\mu) \neq 0$ при $\mu = 1,\dots,r_0$. Следовательно, диагональные элементы матрицы $\hat{A}_m$ выражаются полиномиально через элементы матриц $\hat{A}_1,\dots,\hat{A}_{m-1}$, $m > 1$. Используя этот факт и равенства /1.6/-/1.8/, нетрудно доказать по индукции, что в рассматриваемой нами ситуации элементы матриц $\hat{A}_m$ будут полиномами от элементов матрицы u и ее частных производных по $x = (x_1,\dots,x_{\alpha_0})$ до $(m-1)$-го порядка.

Попробуем теперь отказаться от сделанных в начале этого параграфа ограничений. Прежде всего, ясно, что умножая элементы матрицы u на бесконечно дифференцируемую функцию $\omega = \omega(y)$, равную нулю при $y \leq y_0$ и единице при $y \geq y_1 > y_0$, мы сведем случай произвольной бесконечно дифференцируемой матрицы u к рассмотренному здесь случаю. Отсюда в силу произвольности выбора $y_0 < y_1$ следует существование набора матриц $\hat{A}_m$, $m > 0$, удовлетворяющих соотношениям /21/ и /22/ в случае произвольной бесконечно дифференцируемой матрицы u. При этом элементы матриц $\hat{A}_m$ будут полиномами от элементов матрицы u и ее частных производных по $x = (x_1,\dots,x_{\alpha_0})$. Коэффициенты этих полиномов в силу равенств /1.6/-/1.8/ и соотношения /22/ будут полиномами от величин Q_α, $\alpha = 1,\dots,\alpha_0$, и $\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{\lambda_\mu - \lambda_\nu}$, $\mu \neq \nu$. Рассматривая эти полиномы при произвольных комплексных значениях величин Q_α и $\lambda_\mu \neq \lambda_\nu$, мы получим матрицы $\hat{A}_m$, удовлетворяющие соотношениям /21/ и /22/ при любых комплексных значениях величин Q_α и $\lambda_\mu \neq \lambda_\nu$. Единственность полученного решения следует из равенств /1.6/ и /1.8/ для элементов матрицы $\hat{A}_m$, стоящих вне главной диагонали, и из соотношения /22/ для элементов, стоящих на главной диагонали. Отсюда же следует справедливость содержащихся в формулировке теоремы утверждений о квазиоднородности элементов матриц $\hat{A}_m$ и их зависимости от $x = (x_1,\dots,x_{\alpha_0})$ и t.

Таким образом, теорема 1 полностью доказана.

§2. Доказательство равенства /33/

Доказательство равенства /33/ основывается на сравнении асимптотических при $\eta \to \pm\infty$ разложений производной $\frac{\partial \hat{A}}{\partial \eta}$ решения /1.3/ по параметру η и вариационной производной функционала $\hat{H}$, определенного с помощью равенства

$$\hat{H} = \int_K Sp(\Lambda\hat{A})dx, \qquad /2.1/$$

где $dx = dx_1 \dots dx_{\alpha_0}$, а интегрирование ведется по некоторой ограниченной области K в евклидовом пространстве $x = (x_1,\dots,x_{\alpha_0})$.

Чтобы иметь возможность воспользоваться всеми промежуточными результатами §1, предположим временно, что элементы матрицы u равны нулю всюду, кроме ограниченной области Ω, и обладают непрерывными частными производными по $x=(x_1,\dots,x_{a_0})$ любого порядка. Кроме того, предположим, что диагональные элементы матрицы Λ и все величины Q_α действительны, причем $Q^2=\sum_{\alpha=1}^{a_0} Q_\alpha^2 \neq 0$. Пусть теперь область $K\supset\Omega$, по которой ведется интегрирование в равенстве /2.1/, будет кубом с ребром, параллельным вектору $Q=(Q_1,\dots,Q_{a_0})$. Возьмем вектор $\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_{a_0})$, где $\gamma_\alpha=Q_\alpha Q^{-2}$, и положим $y=\sum_{\alpha=1}^{a_0}\gamma_\alpha x_\alpha$. Тогда грани K_0 и K_1 куба K, ортогональные вектору Q, будут расположены соответственно в гиперплоскостях $y=y_0$ и $y=y_1$. Предположим, что $y_0<y_1$ и, следовательно, область Ω расположена целиком в полосе $y_0<y<y_1$.

Найдем теперь приращение $\delta\hat{H}$ функционала $\hat{H}$ при варьировании матрицы u в области Ω. Согласно равенству /1.3/ имеем

$$\delta\hat{H}=\int_K \mathrm{Sp}(\Lambda\delta\phi A_0\phi^{-1}+\Lambda\phi A_0\delta\phi^{-1})dx, \qquad /2.2/$$

где вариация $\delta\phi$ решения $\phi=\phi(x,\eta)$ уравнения /1.4/ удовлетворяет уравнению

$$\sum_{\alpha=1}^{a_0} Q_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\delta\phi+u\delta\phi-i\eta\Lambda\delta\phi=-\delta u\phi,$$

а $\delta\phi^{-1}=-\phi^{-1}\delta\phi\phi^{-1}$. Кроме того, в силу условия /1.5/ имеем $\delta\phi=0$ при $y\le y_0$. Положим теперь

$$\delta\phi=\phi\Phi,\quad \delta\phi^{-1}=-\Phi\phi^{-1}. \qquad /2.3/$$

Тогда для Φ получим уравнение

$$\sum_{\alpha=1}^{a_0} Q_\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial x_\alpha}=-\phi^{-1}\delta u\phi,$$

т.е.

$$\Phi=-Q^{-2}\int_{\tau_0}^{0}\phi^{-1}(x+\gamma\tau,\eta)\delta u(x+\gamma\tau)\phi(x+\gamma\tau,\eta)d\tau, \qquad /2.4/$$

где $\tau_0=\tau_0(x)$ взято так, что $x+\gamma\tau_0\in K_0$. Согласно равенствам /2.2/ и /2.3/ имеем

$$\delta\hat{H}=-\int_K \mathrm{Sp}\{[\phi^{-1}(x,\eta)\Lambda\phi(x,\eta),A_0]\Phi(x,\eta)\}dx.$$

Отсюда согласно равенству /2.4/ следует равенство

$$\frac{\delta\hat{H}}{\delta\tilde{u}}=Q^{-2}\phi(x,\eta)\int_0^{\tau_1}[\phi^{-1}(x+\gamma\tau,\eta)\Lambda\phi(x+\gamma\tau,\eta),A_0]d\tau\phi^{-1}(x,\eta), \qquad /2.5/$$

где $\tau_1=\tau_1(x)$ взято так, что $x+\gamma\tau_1\in K_1$.

Найдем теперь производную $\partial\hat{A}/\partial\eta$. Согласно уравнению /1.2/ имеем уравнения для производной

$$\sum_{\alpha=1}^{a_0} Q_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\hat{A}}{\partial\eta}+[u,\frac{\partial\hat{A}}{\partial\eta}]-i\eta[\Lambda,\frac{\partial\hat{A}}{\partial\eta}]=i[\Lambda,\hat{A}]. \qquad /2.6/$$

Кроме того, из условия /1.5/ следует, что при $y\le y_0$ имеем

$$\hat{A}=A_0,\quad \text{т.е.}\quad \frac{\partial\hat{A}}{\partial\eta}=0. \qquad /2.7/$$

Положим теперь

$$\frac{\partial\hat{A}}{\partial\eta}=\phi B\phi^{-1},$$

где $\phi=\phi(x,\eta)$ - матричное решение уравнения /1.4/, удовлетворяющее условию /1.5/. Тогда соласно равенствам /1.3/ и /1.4/ уравнение /2.6/ примет вид

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha_0} Q_\alpha \frac{\partial B}{\partial x_\alpha} = i[\phi^{-1}\Lambda\phi, A_0].$$

Отсюда с учетом /2.7/ имеем

$$B = iQ^{-2}\int_{\tau_0}^{0} [\phi^{-1}(x+\gamma\tau,\eta)\Lambda\phi(x+\gamma\tau,\eta), A_0]d\tau,$$

где τ_0 взято то же самое, что и в равенстве /2.4/. Таким образом, справедливо выражение

$$\frac{\partial\hat{A}}{\partial\eta} = iQ^{-2}\phi(x,\eta)\int_{\tau_0}^{0} [\phi^{-1}(x+\gamma\tau,\eta)\Lambda\phi(x+\gamma\tau,\eta), A_0]d\tau\phi^{-1}(x,\eta).$$

Сравнивая полученное равенство с равенством /2.5/, получаем:

$$\frac{\delta\hat{H}}{\delta\tilde{u}} - i\frac{\partial\hat{A}}{\partial\eta} = Q^{-2}\phi(x,\eta)J(x,\eta)\phi^{-1}(x,\eta), \qquad /2.8/$$

где

$$J = \int_{\tau_0}^{\tau_1} [\phi^{-1}(x+\gamma\tau,\eta)\Lambda\phi(x+\gamma\tau,\eta), A_0]d\tau. \qquad /2.9/$$

Покажем теперь, что при любом $x\in K$ интеграл /2.9/ стремится к нулю при $\eta\to\pm\infty$ быстрее любой отрицательной степени η, т.е.

$$\lim_{\eta\to\pm\infty} J(x,\eta)\eta^n = 0 \text{ при любом } n>0. \qquad /2.10/$$

Интеграл /2.9/ зависит от $x\in K$ таким образом, что он принимает постоянное значение на любом отрезке, параллельном вектору Q. Следовательно, нам достаточно рассмотреть значения $x\in K_0$, т.е. при $y=y_0$. Но при $y=y_0$ имеем $\frac{\partial\hat{A}}{\partial\eta}=0$. Далее, согласно результатам §1 ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty}\hat{A}_m\eta^{-m}$$

является асимптотическим при $\eta\to\pm\infty$ разложением матрицы $\hat{A}$. Следовательно, ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty}\hat{H}_m\eta^{-m}, \text{ где } \hat{H}_m = \int_K Sp(\Lambda\hat{A}_m)dx, \qquad /2.11/$$

будет асимптотическим при $\eta\to\pm\infty$ разложением функционала $\hat{H}$. Отсюда следует, что ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\delta\hat{H}_m}{\delta\tilde{u}}\eta^{-m} \qquad /2.12/$$

будет асимптотическим при $\eta\to\pm\infty$ разложением вариационной производной $\frac{\delta\hat{H}}{\delta\tilde{u}}$. Покажем теперь, что все члены ряда /2.12/ обращаются в нуль при $y=y_0$. Действительно, в силу равенства /2.11/ имеем

$$\frac{\delta\hat{H}_m}{\delta\tilde{u}} = \sum_{(s)}(-1)^{s_1+\ldots+s_{\alpha_0}}\frac{\partial^{s_1+\ldots+s_{\alpha_0}}}{\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_{\alpha_0}^{s_{\alpha_0}}}\frac{\partial Sp(\Lambda\hat{A}_m)}{\partial\tilde{u}^{(s_1,\ldots,s_{\alpha_0})}}, \qquad /2.13/$$

где согласно теореме 1 суммирование ведется по всем наборам (s) неотрицательных целых чисел $s_1,\ldots,s_{\alpha_0}$, не превосходящих некоторого /зависящего только от m/ целого числа. При $m>1$ правая часть равенства /2.13/ обращается в нуль при $y=y_0$, так как согласно теореме 1 элементы матрицы $\hat{A}_m$ являются квазиоднородными полиномами ранга $m>1$ от элементов матрицы u и ее частных производных по $x=(x_1,\ldots,x_{\alpha_0})$, а согласно сделанному нами предположению при $y=y_0$ матрица u равна нулю вместе со всеми частными производными по $x=(x_1,\ldots,x_{\alpha_0})$. Далее, в силу равенства /1.7/ имеем $H_1\equiv 0$. И, наконец, $\frac{\delta\hat{H}_0}{\delta\tilde{u}}=0$, поскольку $\hat{H}_0=\int_K Sp(\Lambda A_0)dx$ и от u вообще не зависит. Таким образом, для любого $x \in K_0$ левая часть равенства /2.8/ стремится к нулю при $\eta \to \pm\infty$ быстрее любой отрицательной степени η. Значит, согласно равенству /1.5/ для любого $x \in K_0$ матрица

$$\phi^{-1}(x,\eta)\left(\frac{\delta \hat{H}}{\delta \tilde{u}} - i\frac{\partial \hat{A}}{\partial \eta}\right)\phi(x,\eta)$$

стремится к нулю при $\eta \to \pm\infty$ быстрее любой отрицательной степени η. Отсюда следует справедливость равенства /2.10/. Таким образом, с учетом равенства /2.10/ из равенств /2.8/ и /2.9/ следует, что асимптотические при $\eta \to \pm\infty$ разложения матриц $\frac{\delta \hat{H}}{\partial \tilde{u}}$ и $i\frac{\partial \hat{A}}{\partial \eta}$ совпадают всюду в области Ω. Далее, с помощью уравнения /2.6/ нетрудно убедиться, что ряд

$$-\sum_{m=1}^{\infty} m\hat{A}_m \eta^{-(m+1)}$$

является асимптотическим при $\eta \to \pm\infty$ разложением матрицы $\frac{\partial \hat{A}}{\partial \eta}$. Следовательно, при любом $m > 0$ справедливо равенство

$$\frac{\delta \hat{H}_{m+1}}{\delta \tilde{u}} = -im\hat{A}_m. \qquad /2.14/$$

Равенство /2.14/ есть равенство между двумя наборами полиномов от элементов матрицы u и ее частных производных по $x=(x_1,\dots,x_{a_0})$. Коэффициенты этих полиномов согласно теореме 1 сами являются полиномами от величин Q_a, $a = 1,\dots, a_0$, и $\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{\lambda_\mu - \lambda_\nu}$, $\mu \neq \nu$. Из факта совпадения этих полиномов при произвольных действительных значениях величин Q_a, $a = 1,\dots,a_0$, и $\lambda_\mu \neq \lambda_\nu$ при $\mu \neq \nu$ следует, что они совпадают и при любых комплексных значениях этих величин. Следовательно, равенство /2.14/ справедливо при любых комплексных значениях величин Q_a и $\lambda_\mu \neq \lambda_\nu$. Из равенства /2.14/ согласно равенству /5/ имеем

$$\frac{\delta \hat{H}_{m+1}}{\delta \tilde{u}_k} = -im\zeta^{k_0-k}\hat{A}_m.$$

Отсюда с учетом равенства /23/ следует равенство

$$\frac{\delta}{\delta \tilde{u}_k}\mathrm{Sp}(\Lambda A_{m\kappa}) = \begin{cases} -i(m-1)A_{m-1,\kappa-k}, & \text{если } \kappa \ge k, \\ 0, & \text{если } \kappa < k. \end{cases} \qquad /2.15/$$

Положим теперь для $m > 1$

$$H_m = \sum_{\mu=2}^{m} \frac{i}{\mu-1}\mathrm{Sp}(\Lambda A_{\mu,\, m-\mu}).$$

С учетом равенств /2.15/ и /27/ имеем

$$\frac{\delta H_m}{\delta \tilde{u}_k} = \begin{cases} A_{m-k-1}, & \text{если } m-k-1 > 0, \\ 0, & \text{если } m-k-1 \le 0. \end{cases}$$

Отсюда в силу равенств /28/ и /30/ при $m-k-1 > 0$ имеем

$$\frac{\delta T_{mr}}{\partial \tilde{u}_k} = \frac{\partial}{\partial a_r}\frac{\delta H_m}{\delta \tilde{u}_k} = \frac{\partial A_{m-k-1}}{\partial a_r},$$

а при $k = m-1$ непосредственно из равенств /28/-/30/ имеем

$$\frac{\delta T_{mr}}{\delta \tilde{u}_{m-1}} = \frac{\partial A_0}{\partial a_r}.$$

Таким образом, равенство /33/ полностью доказано в случае, когда элементы матрицы u есть бесконечно дифференцируемые финитные функции. Однако, умножив элементы матрицы u на подходящим образом выбранную финитную функцию, мы сведем случай произвольной бесконечно дифференцируемой матрицы u к раасмотренному здесь случаю. Значит, справедливость равенства /33/ полностью доказана.

§3. Доказательство равенств /46/-/49/

Возьмем $m>k_0+1$ и рассмотрим величину F_{mnr}, определенную согласно равенству /40/. Далее, заменим в этом равенстве m на $m+1$, а n на $n-1$, если $n>0$. С помощью полученной таким образом величины $F_{m+1,n-1,r}$ образуем разность

$$\Lambda_{mnr} = F_{mnr} - F_{m+1,n-1,r}.$$

С учетом соотношения /11/ для $m=n+k_0+1$ имеем

$$\Lambda_{mnr} = -i\frac{\partial A_m}{\partial a_r}[\Lambda, A_n] + \sum_{k=0}^{m-1}\frac{\partial A_{m-k-1}}{\partial a_r}[u_k, A_n] + \sum_{k=0}^{m-k_0-1}\frac{\partial A_{m-k_0-k-1}}{\partial a_r}\sum_{\alpha=1}^{\alpha_0} Q_{\alpha k}\frac{\partial A_n}{\partial x_\alpha}. \qquad /3.1/$$

Далее, согласно соотношению /11/ при $m>k_0$ имеем

$$i[\Lambda, \frac{\partial A_m}{\partial a_r}] - \sum_{k=0}^{m-1}[u_k, \frac{\partial A_{m-k-1}}{\partial a_r}] - \sum_{\alpha=1}^{\alpha_0}\sum_{k=0}^{m-k_0-1} Q_{\alpha k}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial A_{m-k_0-k-1}}{\partial a_r} = 0. \qquad /3.2/$$

С учетом этого соотношения равенство /3.1/ примет вид

$$\Lambda_{mnr} = -i[\Lambda, \frac{\partial A_m}{\partial a_r}A_n] + \sum_{k=0}^{m-1}[u_k, \frac{\partial A_{m-k-1}}{\partial a_r}A_n] + \sum_{\alpha=1}^{\alpha_0}\sum_{k=0}^{m-k_0-1}Q_{\alpha k}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\frac{\partial A_{m-k_0-k-1}}{\partial a_r}A_n),$$

т.е.

$$Sp\,\Lambda_{mnr} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha_0}\frac{\partial}{\partial x_\alpha} Sp(\sum_{k=0}^{m-k_0-1} Q_{\alpha k}\frac{\partial A_{m-k_0-k-1}}{\partial a_r}A_n).$$

Используя это равенство как рекуррентное соотношение между величинами $Sp\,F_{mnr}$ с соседними значениями индексов m и n, легко получаем равенство

$$Sp\,F_{mnr} = Sp\,F_{m+n,0,r} + \sum_{\alpha=1}^{\alpha_0}\frac{\partial}{\partial x_\alpha} Sp(\sum_{s=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{m+s-k_0-1} Q_{\alpha k}\frac{\partial A_{m+s-k_0-k-1}}{\partial a_r}A_{n-s}). \qquad /3.3/$$

Далее, согласно равенству /40/ имеем

$$F_{m+n,0,r} = i\frac{\partial A_{m+n-1}}{\partial a_r}[\Lambda, A_1] + \sum_{k=1}^{k_0}\frac{\partial A_{m+n-k-1}}{\partial a_r}(i[\Lambda, A_{k+1}] - \sum_{\kappa=0}^{k-1}[u_\kappa, A_{k-\kappa}] + \sum_{k=k_0+1}^{m+n-1}\frac{\partial A_{m+n-k-1}}{\partial a_r}[u_k, A_0].$$

Согласно соотношению /10/ и соотношению /11/ для $m=k_0+1$ это равенство преобразуется к виду

$$F_{m+n,0,r} = \sum_{k=0}^{m+n-1}\frac{\partial A_{m+n-k-1}}{\partial a_r}[u_k, A_0].$$

С учетом соотношения /3.2/ для $\frac{\partial A_{m+n}}{\partial a_r}$ отсюда следует равенство

$$F_{m+n,0,r} = -i[\Lambda, \frac{\partial A_{m+n}}{\partial a_r}A_0] +$$

$$+\sum_{k=0}^{m+n-1}[u_k, \frac{\partial A_{m+n-k-1}}{\partial a_r}A_0] +$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{\alpha_0}\sum_{k=0}^{m+n-k_0-1} Q_{\alpha k}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial A_{m+n-k_0-k-1}}{\partial a_r}A_0 ,$$

т.е.

$$Sp\, F_{m+n,0,r} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha_0}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}Sp(\sum_{k=0}^{m+n-k_0-1} Q_{\alpha k}\frac{\partial A_{m+n-k_0-k-1}}{\partial a_r}A_0).$$

Отсюда с учетом равенства /3.3/ следует справедливость равенства /46/.

Пусть теперь $2 \leq m \leq k_0+1$, если $k_0>0$. Рассмотрим величину F_{mnr}, определенную согласно равенству /42/. Далее, заменим в этом равенстве m на $m-1$, если $m>2$, а n – на $n+1$. С помощью полученной таким образом величины $F_{m-1,n+1,r}$ образуем разность

$$\delta_{mnr} = F_{mnr} - F_{m-1,n+1,r} .$$

Нетрудно убедиться, что справедливо равенство

$$\delta_{mnr} = i\frac{\partial A_{m-1}}{\partial a_r}[\Lambda, A_{n+1}] - \sum_{k=0}^{m-2}\frac{\partial A_{m-k-2}}{\partial a_r}[u_k, A_{n+1}]. \qquad /3.4/$$

Далее, согласно соотношению /10/ имеем при $2\leq m\leq k_0+1$

$$i[\Lambda, \frac{\partial A_{m-1}}{\partial a_r}] - \sum_{k=0}^{m-2}[u_k, \frac{\partial A_{m-k-2}}{\partial a_r}] = 0 .$$

С учетом этого соотношения равенство /3.4/ преобразуется к виду

$$\delta_{mnr} = i[\Lambda, \frac{\partial A_{m-1}}{\partial a_r}A_{n+1}] -$$

$$-\sum_{k=0}^{m-2}[u_k, \frac{\partial A_{m-k-2}}{\partial a_r}A_{n+1}],$$

т.е.

$$Sp\,\delta_{mnr} = 0 .$$

Отсюда следует цепочка равенств

$$Sp\, F_{k_0+1,n,r} = \ldots = Sp\, F_{2,n+k_0-1,r} . \qquad /3.5/$$

Далее, согласно равенству /42/ имеем

$$F_{2,n+k_0-1,r} = i\sum_{k=0}^{1}\frac{\partial A_k}{\partial a_r}[\Lambda, A_{n+k_0-k+1}] -$$

$$-\frac{\partial A_0}{\partial a_r}[u_0, A_{n+k_0}] .$$

Отсюда на основании равенства

$$i[\Lambda, \frac{\partial A_1}{\partial a_r}] - [u_0, \frac{\partial A_0}{\partial a_r}] = 0$$

имеем

$$F_{2,n+k_0-1,r} = i\sum_{k=0}^{1}[\Lambda, \frac{\partial A_k}{\partial a_r}A_{n+k_0-k+1}] -$$

$$-[u_0, \frac{\partial A_0}{\partial a_r}A_{n+k_0}],$$

т.е.

$$Sp\, F_{2,n+k_0-1,r} = 0 .$$

Отсюда с учетом равенства /3.5/ следует справедливость первого из равенств /48/ при $2\le m\le k_0+1$. Непосредственно из равенств /44/ следует справедливость обоих равенств /48/ при $m=1$.

Рассмотрим теперь величину f_{mr}, определенную при $m>k_0+1$ согласно равенству /41/. Изменим порядок суммирования во втором и в третьем слагаемых в правой части этого равенства. Тогда в силу соотношения $[\Lambda,\frac{\partial A_0}{\partial a_r}]=0$ равенство /41/ преобразуется к виду

$$f_{mr}=-i\sum_{k=0}^{m-1}[\Lambda,\frac{\partial A_{m-k-1}}{\partial a_r}v_{k+1}]+$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{\kappa=0}^{m-k-1}[u_\kappa,\frac{\partial A_{m-k-\kappa-1}}{\partial a_r}v_k]+ \qquad /3.6/$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}(i[\Lambda,\frac{\partial A_{m-k}}{\partial a_r}]-\sum_{\kappa=0}^{m-k-1}[u_\kappa,\frac{\partial A_{m-k-\kappa-1}}{\partial a_r}])v_k+$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{\alpha_0}\sum_{k=1}^{m-k_0-1}\sum_{\kappa=0}^{m-k_0-k-1}Q_{\alpha\kappa}\frac{\partial A_{m-k_0-k-\kappa-1}}{\partial a_r}\frac{\partial v_k}{\partial x_\alpha}.$$

Согласно /10/ при $m-k_0\le k\le m-1$

$$i[\Lambda,\frac{\partial A_{m-k}}{\partial a_r}]-\sum_{\kappa=0}^{m-k-1}[u_\kappa,\frac{\partial A_{m-k-\kappa-1}}{\partial a_r}]=0, \qquad /3.7/$$

а при $1\le k<m-k_0$ согласно соотношению /11/

$$i[\Lambda,\frac{\partial A_{m-k}}{\partial a_r}]-\sum_{\kappa=0}^{m-k-1}[u_\kappa,\frac{\partial A_{m-k-\kappa-1}}{\partial a_r}]-$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{\alpha_0}\sum_{\kappa=0}^{m-k_0-k-1}Q_{\alpha\kappa}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial A_{m-k_0-k-\kappa-1}}{\partial a_r}=0.$$

С учетом этих соотношений равенство /3.6/ примет вид

$$f_{mr}=-i\sum_{k=0}^{m-1}[\Lambda,\frac{\partial A_{m-k-1}}{\partial a_r}v_{k+1}]+$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{\kappa=0}^{m-k-1}[u_\kappa,\frac{\partial A_{m-k-\kappa-1}}{\partial a_r}v_k]+ \qquad /3.8/$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{\alpha_0}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\sum_{k=1}^{m-k_0-1}\sum_{\kappa=0}^{m-k_0-k-1}Q_{\alpha\kappa}\frac{\partial A_{m-k_0-k-\kappa-1}}{\partial a_r}v_k).$$

Отсюда сразу следует справедливость равенства /47/.

В том случае, когда $2\le m\le k_0+1$, величина f_{mr}, определенная с помощью равенства /43/, тем же самым путем приводится к виду /3.6/, но без последнего слагаемого в правой части. Отсюда на основании равенства /3.7/ следует равенство /3.8/, но также без последнего слагаемого в правой части. Таким образом, справедливость второго из равенств /48/ при $1\le m\le k_0+1$ доказана.

Рассмотрим, наконец, величину g_{mr}, определенную с помощью равенства /45/. Согласно /33/ при $0\le\kappa\le k\le m-1$ имеем

$$\frac{\partial A_{m-k-1}}{\partial a_r}=\frac{\delta T_{m-\kappa,r}}{\delta\tilde{u}_{k-\kappa}}. \qquad /3.9/$$

Следовательно, справедливо выражение

$$g_{mr}=\sum_{\alpha=1}^{\alpha_0}\sum_{\kappa=0}^{m-1}\sum_{k=\kappa}^{m-1}R_{\alpha\kappa}\frac{\delta T_{m-\kappa,r}}{\delta\tilde{u}_{k-\kappa}}\frac{\partial u_{k-\kappa}}{\partial x_\alpha}.$$

С другой стороны, справедливо равенство

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}T_{m-\kappa,r}=\mathrm{Sp}\{\sum_{(s)}\sum_{k=\kappa}^{m-1}\frac{\partial T_{m-\kappa,r}}{\partial\tilde{u}_{k-\kappa}^{(s_1,\dots,s_{\alpha_0})}}\times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial x_\alpha} u_{k-\kappa}^{(s_1,\dots,s_{\alpha_0})} \}, \qquad /3.10/$$

где суммирование ведется по всем наборам (s) неотрицательных целых чисел $s_1,\dots,s_{\alpha_0}$, не превосходящих некоторого /зависящего только от $m-\kappa$/ целого числа. С помощью тождественных преобразований, аналогичных /35/, равенство /3.10/ преобразуется к виду

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} T_{m-\kappa,r} = \mathrm{Sp}\Big(\sum_{k=\kappa}^{m-1} \frac{\delta T_{m-\kappa,r}}{\delta \tilde{u}_{k-\kappa}} \frac{\partial u_{k-\kappa}}{\partial x_\alpha}\Big) + \operatorname{div} G^{(\alpha)}_{m-\kappa,r}, \qquad /3.11/$$

где вектора $G^{(\alpha)}_{m-\kappa,r} = (G^{(\alpha)}_{m-\kappa,r,1},\dots,G^{(\alpha)}_{m-\kappa,r,\alpha_0}),\ \alpha=1,\dots,\alpha_0$, определяются, вообще говоря, неоднозначно. Однако произвол в выборе векторов $G^{(\alpha)}_{m-\kappa,r}$ может быть ликвидирован, если потребовать, чтобы при любой перестановке пространственных переменных $x=(x_1,\dots,x_{\alpha_0})$ матрица

$$G_{m-\kappa,r} = \begin{Vmatrix} G^{(1)}_{m-\kappa,r,1} & G^{(1)}_{m-\kappa,r,2} & \dots & G^{(1)}_{m-\kappa,r,\alpha_0} \\ G^{(2)}_{m-\kappa,r,1} & G^{(2)}_{m-\kappa,r,2} & \dots & G^{(2)}_{m-\kappa,r,\alpha_0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G^{(\alpha_0)}_{m-\kappa,r,1} & G^{(\alpha_0)}_{m-\kappa,r,2} & \dots & G^{(\alpha_0)}_{m-\kappa,r,\alpha_0} \end{Vmatrix} \qquad /3.12/$$

преобразовывалась бы в матрицу

$$G^*_{m-\kappa,r} = \pi G_{m-\kappa,r}\pi^{-1}, \qquad /3.13/$$

где π - матрица, реализующая перестановку переменных $x=(x_1,\dots,x_{\alpha_0})$, т.е. $x^*=\pi x$. Заметим сразу, что компоненты векторов $G^{(\alpha)}_{m-\kappa,r}$ будут полиномами от элементов матриц u_k и их частных производных по $x=(x_1,\dots,x_{\alpha_0})$ до некоторого /зависящего только от $m-\kappa$/ конечного порядка. С учетом равенства /3.11/ из равенства /3.9/ следует справедливость равенства /49/. Кроме того, в силу равенства /32/ при $1\le m-\kappa\le k_0+1$, $\kappa\le k\le m-1$, справедливо равенство

$$\frac{\delta T_{m-\kappa,r}}{\delta \tilde{u}_{k-\kappa}} = \frac{\partial T_{m-\kappa,r}}{\partial \tilde{u}_{k-\kappa}}.$$

Отсюда в силу равенств /3.10/ и /3.11/ следует, что при $1\le m-\kappa\le k_0+1$ справедливо равенство /50/.

§4. *Существование и единственность решения системы /14/-/17/*

Пусть вектор $\Gamma_\nu=(\Gamma_{\nu 1},\dots,\Gamma_{\nu\alpha_0})$ равен значению в точке $\zeta=\zeta'_\nu$ вектора $Q=(Q_1,\dots,Q_{\alpha_0})$, входящего в равенство /2/, $\nu=1,\dots,\nu_0$. Предположим, что при любом $\nu=1,\dots,\nu_0$ справедливо неравенство

$$|\Gamma_\nu|^2 = \sum_{\alpha=1}^{\alpha_0} |\Gamma_{\nu\alpha}|^2 \ne 0.$$

Пусть, далее, вектора $\ell_\alpha=(\ell_{\alpha 1},\dots,\ell_{\alpha\alpha_0})$, $\alpha=2,\dots,\alpha_0$, таковы, что при добавлении к ним любого из векторов Γ_ν получается линейно независимая система векторов, т.е. определитель

$$\Delta_\nu = \det \begin{vmatrix} \Gamma_{\nu 1} & \Gamma_{\nu 2} & \dots & \Gamma_{\nu\alpha_0} \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \dots & \ell_{2\alpha_0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \ell_{\alpha_0 1} & \ell_{\alpha_0 2} & \dots & \ell_{\alpha_0\alpha_0} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad /4.1/$$

при любом $\nu = 1,\dots,\nu_0$.

Предположим теперь, что в точке $x=x^\circ=(x_1^\circ,\dots,x_{\alpha_0}^\circ), t=t_0$ заданы значения матриц u_k $(0\le k\le k_0)$, матриц $u_{\mu p}$ $(p=1,\dots,p_\mu; \mu=1,\dots,\mu_0)$ и всех их частных производных по пространственным переменным $x=(x_1,\dots,x_{\alpha_0})$. Предположим далее, что в этой же точке $x=x^\circ, t=t_0$ заданы значения матриц $v_{\nu q}$ $(q=1,\dots,q_\nu; \nu=1,\dots,\nu_0)$ и всех их производных вида $\dfrac{\partial^{s_0+s_2+\dots+s_{\alpha_0}} v_{\nu q}}{\partial t^{s_0}\partial\ell_2^{s_2}\dots\partial\ell_{\alpha_0}^{s_{\alpha_0}}}$, где $\dfrac{\partial}{\partial\ell_\alpha}$ - производная в направлении вектора ℓ_α, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial\ell_\alpha} = \ell_{\alpha 1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \ell_{\alpha\alpha_0}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha_0}}, \quad \alpha = 2,\dots,\alpha_0 .$$

Предположим, наконец, что названные выше значения матриц u_k, $u_{\mu p}$, $v_{\nu q}$ и их производных удовлетворяют неравенствам вида

$$\left\|\frac{\partial^{s_1+\dots+s_{\alpha_0}} u_k}{\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_{\alpha_0}^{s_{\alpha_0}}}\right\| \le (s_1+\dots+s_{\alpha_0})!\, C\rho^{s_1+\dots+s_{\alpha_0}},$$

$$\left\|\frac{\partial^{s_1+\dots+s_{\alpha_0}} u_{\mu p}}{\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_{\alpha_0}^{s_{\alpha_0}}}\right\| \le (s_1+\dots+s_{\alpha_0})!\, C\rho^{s_1+\dots+s_{\alpha_0}},$$

$$\left\|\frac{\partial^{s_0+s_2+\dots+s_{\alpha_0}} v_{\nu q}}{\partial t^{s_0}\partial\ell_2^{s_2}\dots\partial\ell_{\alpha_0}^{s_{\alpha_0}}}\right\| \le (s_0+s_2+\dots+s_{\alpha_0})!\, C\rho^{s_0+s_2+\dots+s_{\alpha_0}},$$

где $C>0$ и $\rho>0$ - константы, а норма $\|W\|$ матрицы $W=|w_{ij}|$ определена с помощью равенства

$$\|W\| = \max_i \sum_j |w_{ij}| .$$

Тогда найдется $\rho_0>0$, такое, что в области $|x_\alpha - x_\alpha^\circ|<\rho_0$, $\alpha=1,\dots,\alpha_0$, $|t-t_0|<\rho_0$ существует и единственно аналитическое по $x=(x_1,\dots,x_{\alpha_0})$ и t решение системы /14/-/17/, у которого названные выше производные принимают в точке $x=x^\circ$, $t=t_0$ заданные значения.

Доказательство этого утверждения весьма сходно с доказательством теоремы Коши-Ковалевской.

Действительно, с помощью уравнения /17/ мы найдем значения матриц $\sum_{\alpha=1}^{\alpha_0}\Gamma_{\nu\alpha}\dfrac{\partial v_{\nu q}}{\partial x_\alpha}$ $(q=1,\dots,q_\nu; \nu=1,\dots,\nu_0)$ в точке $x=x^\circ$, $t=t_0$. Присоединяя к ним значения производных $\dfrac{\partial v_{\nu q}}{\partial\ell_\alpha}$, $\alpha=2,\dots,\alpha_0$, мы на основании неравенства /4.1/ найдем значения матриц $\dfrac{\partial v_{\nu q}}{\partial x_\alpha}$, $\alpha=1,\dots,\alpha_0$, в точке $x=x^\circ$, $t=t_0$. Далее, взяв производную по направлению $\ell_{\alpha'}$, $\alpha'=2,\dots,\alpha_0$, от левой части уравнения /17/, мы с помощью полученного таким образом равенства найдем значения матриц $\sum_{\alpha=1}^{\alpha_0}\Gamma_{\alpha\nu}\dfrac{\partial^2 v_{\nu q}}{\partial x_\alpha\partial\ell_{\alpha'}}$ в точке $x=x^\circ$, $t=t_0$.

Присоединяя к ним значения производных $\frac{\partial^2 v_{\nu q}}{\partial \ell_a \partial \ell_{a'}}$, $a, a'=2,\dots,a_0$, мы на основании неравенства /4.1/ находим значения матриц $\frac{\partial^2 v_{\nu q}}{\partial x_a \partial \ell_{a'}}$ $(a=1,\dots,a_0; a'=2,\dots,a_0)$ в точке $x=x^\circ$, $t=t_0$. Продифференцировав после этого левую часть уравнения /17/ по x_a, $a=1,\dots,a_0$, мы найдем в результате этого значения матриц $\sum_{a'=1}^{a_0} \Gamma_{\nu a'} \frac{\partial^2 v_{\nu q}}{\partial x_{a'} \partial x_a}$ в точке $x=x^\circ$, $t=t_0$. Присоединив к ним найденные ранее значения матриц $\frac{\partial^2 v_{\nu q}}{\partial x_a \partial \ell_{a'}}$, мы согласно неравенству /4.1/ сможем теперь определить значения матриц $\frac{\partial^2 v_{\nu q}}{\partial x_a \partial x_{a'}}$, $a,a'=1,\dots,a_0$, в точке $x=x^\circ$, $t=t_0$. Аналогичным образом находятся значения частных производных третьего и более высокого порядка матриц $v_{\nu q}$ по пространственным переменным $x=(x_1,\dots,x_{a_0})$, т.е. значения всех частных производных вида $\frac{\partial^{s_1+\dots+s_{a_0}} v_{\nu q}}{\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_{a_0}^{s_{a_0}}}$ в точке $x=x^\circ$, $t=t_0$.

С учетом полученного результата уравнения /14/-/16/ позволяют легко найти значения всех частных производных вида $\frac{\partial^{1+s_1+\dots+s_{a_0}}}{\partial t \partial x_1^{s_1}\dots\partial x_{a_0}^{s_{a_0}}}$ матриц u_k и $u_{\mu p}$ в точке $x=x^\circ$, $t=t_0$.

Продифференцируем теперь левую часть уравнения /17/ по t. Полученное в результате этого равенство позволяет нам теперь найти значения всех частных производных вида $\frac{\partial^{1+s_1+\dots+s_{a_0}} v_{\nu q}}{\partial t \partial x_1^{s_1}\dots\partial x_{a_0}^{s_{a_0}}}$ в точке $x=x^\circ, t=t_0$ в

соответствии с теми же самыми правилами, с помощью которых ранее мы нашли значения производных вида $\frac{\partial^{s_1+\dots+s_{a_0}} v_{\nu q}}{\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_{a_0}^{s_{a_0}}}$.

Из сказанного выше ясно, что с помощью этой процедуры мы сможем последовательно определить значения в точке $x=x^\circ, t=t_0$ всех частных производных по $x=(x_1,\dots,x_{a_0})$ и t матриц u_k, $u_{\mu p}$ и $v_{\nu q}$. Именно, дифференцируя левую часть уравнения /17/ s_0 раз по t, мы с помощью полученных равенств найдем значения в точке $x=x^\circ, t=t_0$ всех частных производных по пространственных переменным матриц $\frac{\partial^{s_0} v_{\nu q}}{\partial t^{s_0}}$, а продифференцировав после этого s_0 раз левые части уравнений /14/-/16/, мы с помощью полученных равенств найдем значения в точке $x=x^\circ, t=t_0$ всех частных производных по пространственным переменным матриц $\frac{\partial^{s_0+1} u_k}{\partial t^{s_0+1}}$ и $\frac{\partial^{s_0+1} u_{\mu p}}{\partial t^{s_0+1}}$.

С помощью стандартных методов легко доказывается, что полученные в результате этого разложения матриц u_k, $u_{\mu p}$ и $v_{\nu q}$ по степеням разностей $x_a - x_a^\circ$, $a=1,\dots,a_0$, $t-t_0$ будут равномерно сходиться в некоторой окрестности точки $x=x^\circ, t=t_0$.

В заключение сделаем несколько замечаний. Прежде всего отметим, что отправным пунктом для настоящей работы послужило полученное Лаксом операторное представление для уравнения Кортевега-де Вриза /1/. Соотношение /1/ является одним из возможных обобщений этого представления. С другой стороны, как нетрудно убедиться, соотношение /1/ эквивалентно условию коммутации операторов

$$L_1 = \Lambda L - i\zeta^{k_0+1}\Lambda \quad \text{и} \quad L_2 = \frac{\partial}{\partial t} + \mathfrak{A},$$

где операторы L и $\mathfrak{A}$ определены с помощью равенств /2/ и /2'/. Этот подход, берущий начало в работах Абловица и др. /см. /2/ /, явился источником ряда новых идей.

Далее, метод этой работы применим и в том случае, когда у матрицы Λ имеются равные диагональные элементы. Однако число бесконечных серий законов сохранения в этом случае уменьшается и равно числу разных диагональных элементов матрицы Λ. Это вызвано тем, что для разрешимости соотношений /21/ и /22/ необходимо матрицу A_0 выбирать так, чтобы равным диагональным элементам матрицы Λ соответствовали равные диагональные элементы матрицы A_0. Отсюда согласно равенству /1.3/ следует, что содержательные результаты возможны до тех пор, пока у матрицы Λ имеется по крайней мере два разных диагональных элемента. Подробнее этот вопрос рассмотрен в работе /3/ для более частного случая. Однако высказанные там соображения применимы и в данном случае.

Рассмотрим, наконец, соотношение /20/. В силу того, что решение /1.3/ зависит линейно от матрицы A_0, элементы матриц $\hat{A}_m$ будут линейными функциями диагональных элементов матрицы A_0, т.е. справедливо равенство

$$\hat{A}_m = \sum_{r=1}^{r_0} a_r \frac{\partial \hat{A}_m}{\partial a_r}.$$

Отсюда в силу равенства /1.3/ при $m>0$ имеем

$$\sum_{r=1}^{r_0} \frac{\partial \hat{A}_m}{\partial a_r} \equiv 0,$$

т.е. согласно равенству /23/ при любом $k \geq 0$

$$\sum_{r=1}^{r_0} \frac{\partial A_{mk}}{\partial a_r} \equiv 0.$$

С учетом равенств /28/-/30/ отсюда следует справедливость равенства /20/.

Покажем теперь, что других линейных соотношений между T_{mr} нет, т.е. из справедливости равенства вида

$$\sum_{r=1}^{r_0} a^*_r T_{mr} = f(u_{m-1}) \qquad (*)$$

при каком-нибудь $m>1$ следует, что $a^*_1 = \ldots = a^*_{r_0}$. Действительно, из равенства $(*)$ согласно равенству /33/ при $m-k-1>0$ имеем

$$\sum_{r=1}^{r_0} a^*_r \frac{\delta T_{mr}}{\delta \tilde{u}_k} = \sum_{r=1}^{r_0} a^*_r \frac{\partial A_{m-k-1}}{\partial a_r} = 0.$$

При $k = m-2 \geq 0$ отсюда следует равенство

$$A^*_1 = \sum_{r=1}^{r_0} a^*_r \frac{\partial A_1}{\partial a_r} = 0. \qquad (**)$$

Но, с другой стороны, согласно равенству /27/

$$A_1 = A_{1,0}.$$

Отсюда согласно равенства /5/, /1.6/ и /1.7/ имеем

$$A_{1,\mu\nu} = i\frac{a_\mu - a_\nu}{\lambda_\mu - \lambda_\nu} u_{0,\mu\nu}, \quad \text{если } \mu \neq \nu,$$

$$A_{1,\mu\mu} = 0, \quad \mu = 1, \ldots, r_0.$$

Следовательно, согласно равенству(~~xx~~) при $\mu \neq \nu$

$$A^*_{1,\mu\nu} = i \frac{a^*_\mu - a^*_\nu}{\lambda_\mu - \lambda_\nu} u_{0,\mu\nu} = 0,$$

что в силу произвольности элементов матрицы u_0 возможно только при $a^*_1 = \ldots = a^*_{r_0}$.

Литература

1. *Лакс П.Д. Интегралы нелинейных эволюционных уравнений и уединенные волны. Математика, 1969, 13, №5, стр. 128-150.*
2. *Ablowitz M.J. e.a. Phys.Rev.Lett., 1973, 31, No. 2, pp. 125-127.*
3. *Мельников В.К. Об одном семействе вполне интегрируемых эволюционных систем. ОИЯИ, Р2-10966, Дубна, 1977.*

Рукопись поступила в издательский отдел
29 марта 1978 года.