СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P2 - 11398

И.С.Златев

О СМЫСЛЕ ФАЗОВЫХ КВАЗИРАСПРЕДЕЛЕНИЙ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

1978

P2 - 11398

И.С.Златев

О СМЫСЛЕ ФАЗОВЫХ КВАЗИРАСПРЕДЕЛЕНИЙ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Златев И.С. P2 - 11398

О смысле фазовых квазираспределений в квантовой механике

Работа посвящена исследованию некоторых проблем квазивероятностных распределений, т.е. распределений, отличающихся от вероятностных только тем, что они не являются положительно определенными. Цель работы - доказать, что квазираспределения можно интерпретировать как настоящие распределения вероятностей.

В работе проведен анализ требования положительной определенности распределения вероятностей и тех ограничений, которые это требование накладывает на выбор переменных, описывающих исследуемый объект.

В дальнейшем исследуется возможность нахождения такой замены переменных (не взаимно однозначной, вообще говоря), которая дала бы возможность получить из квазираспределения, записанного при помощи новых переменных, неотрицательную функцию. Основной результат состоит в том, что найдены такие переменные, при помощи которых в случае квазираспределения Вигнера можно, пользуясь стандартной для теории вероятностей процедуры, найти неотрицательную функцию распределения. Тем самым и обосновывается возможность рассмотрения квазираспределений как вероятностей.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.
Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Zlatev I.S. P2 - 11398

On the Sense of Phase Space Quasidistributions in Quantum Mechanics

The present paper formulates an interpretation of the quantum mechanical quasidistributions as probability distributions in a space of variables inadequate to the objects described by the distributions. It is argued that a solid background for such an interpretation is the statement, proved in the paper, that in the case of Wigner's quasidistributions one can obtain nonnegative functions introducing certain set of suitable variables and making use of the standard methods of probability theory.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

В ряде работ (см., например, [I-I3]) делаются попытки сформулировать квантовую механику как статистическую теорию классического типа. Общая идея подобных попыток заключается в сопоставлении данной квантово-механической системе подходящим образом построенной функции $W(q_1,..q_s,p_1,..p_s,t)$ координат $q_1,\dots q_s$, импульсов $p_1,\dots p_s$ и времени t, которую формально можно рассматривать как распределение в фазовом пространстве.

Основания для поиска такой формулировки квантовой механики различны. Во-первых, возможно, что некоторая новая формулировка квантовой механики в терминах классической статистики позволит устранить, хотя бы с формальной точки зрения, "необычность" квантовой механики. Разумеется, если бы результат состоял только в этом, то преимущество такого пересмотра носило бы исключительно психологический характер.

Во-вторых, более серьезный мотив состоит в возможности использования новой формулировки для получения конкретных результатов. При этом в некоторых случаях она может оказаться удобнее традиционной схемы. Впервые квантово-механическое фазовое распределение было введено в работе [I] именно для таких целей. В ней, как и в ряде более поздних работ [I4-24], показано, что в известных случаях квантово-механические фазовые распределения являются удобным и полезным аппаратом.

В-третьих, можно надеяться, что новая формулировка позволит объяснить определенные сложности, возникающие при традиционном рассмотрении, и даже избежать их. В качестве примера укажем на правила соответствия, с помощью которых механическим величинам - функциям координат и импульсов - ставятся в соответствие эрмитовые операторы. Следует отметить, что в рамках стандартной формулировки квантовой механики нет четких указаний на то, какое из имеющихся правил следует использовать в том или ином конкретном случае /26-28/. В этой связи важно, что введение, в частности, квантово-механических фазовых распределений позволяет раскрыть интересные аспекты в объяснении существующей ситуации и преодолении связанных с ней трудностей /29-33,23/.

Наконец, возможно, что новая формулировка не только прояснит смысл традиционной формальной схемы квантовой механики, но и позволит глубже понять физическую сущность обеих схем. Следовательно, речь идет как о получении новых аргументов, подтверждающих данную интерпретацию, так и о решении вопросов, связанных с основами квантовой механики.

На первый взгляд кажется, что вводя квантовомеханические фазовые распределения, мы намечаем основу для некоторых физических рассуждений, связанных с основами квантовой механики. Однако, пока предварительно не решен вопрос о физическом смысле квантово-механических фазовых распределений, все интерпретации и выводы, сделанные без учета этого обстоятельства, остаются иллюзорными. К сожалению, как показывает опыт, всякая попытка приписать им смысл истинных распределений наталкивается на непреодолимые трудности, поскольку эти математические объекты вообще не являются неотрицательными и, следовательно, их нельзя рассматривать как истинные распределения. Поэтому будет уместнее использовать для них другой термин: "квазираспределения".

Невозможность непосредственной интерпретации квазираспределений как распределений в фазовом пространстве бросает тень на саму идею трактовки квантовой механики в духе классической статистики. Разумеется, мы можем рассматривать квазираспределения как чисто математические объекты в некотором новом формализме, при этом формально нет никаких причин, которые требовали бы физической интерпретации. Однако даже в таком подходе само существование формализма, в котором из квазираспределений,

рассматриваемых формально в качестве распределений, получаются истинные распределения /34/, приводит опять же к вопросу об их физическом смысле. Несмотря на то, что в данном случае этот вопрос предварительно не поставлен и все рассуждения можно проводить независимо от него, отсутствие ответа вызывает чувство неудовлетворенности.

В /35/ наряду с необходимой аргументацией была кратко изложена идея одной возможной и приемлемой физической интерпретации квазираспределений, которая позволяет придать физический смысл как квазираспределениям, так и проводимым с ними операциям. В настоящей работе эта интерпретация подробно излагается и подкрепляется более детальной аргументацией.

Основная идея, на основе которой строится предлагаемая интерпретация, состоит в том, что величины (например, координаты и импульсы), которые мы по аналогии с классической механикой используем для описания поведения квантовомеханических объектов, не являются подходящими для этой цели. Стремление проводить все рассмотрения в терминах классической механики приводит к специфической ситуации, состоящей в том, что квантовомеханическим объектам приписываются не свойственные им механические величины. Такая неадекватность в выборе величин, которыми нам в дальнейшем придется оперировать, и является причиной "странностей" в поведении квантовомеханических объектов с точки зрения классической механики. Этим же обусловливается и то, что квазираспределения оказываются не обязательно неотрицательными, с чем связаны описанные выше трудности в их интерпретации. Введение понятия "величин, неадекватных рассматриваемому объекту", вместе с общими рассуждениями, касающимися описания поведения рассматриваемого физического объекта, содержится во II части работы. В III части даны общая формулировка предлагаемой интерпретации и предварительная аргументация в ее пользу. Основное утверждение, доказательство которого делает данную интерпретацию приемлемой и возможной, сформулировано в части IУ. Собственно доказательство дается в У и УI частях. В части УП делаются некоторые замечания по поводу доказанного утверждения, а также указываются его возможные обобщения.

II

Пусть дан физический объект S. Предположим, что S являет-ся классическим объектом, его состояние полностью определяется за-данием определенного числа подходяще выбранных классических вели-чин $v_1, v_2, \dots v_n$. Для простоты рассуждений предположим, что множество систем значений величин $v_1, v_2, \dots v_n$, которые задают состояние (т.е. с их заданием информация об объекте S будет исчерпывающей), есть область $D_v \subset R_n$. Таким образом, всякой точке $(v_1, \dots v_n) \in D_v \subset R_n$ соответствует одно определенное состояние объекта S и наоборот – – всякому состоянию S соответствует точка в области D_v.

Введем m новых величин $u_1, \dots u_m$, связанных с величи-нами $v_1, \dots v_m$ соотношениями

$$u_i = \varphi_i(v_1, \dots v_n) \;;\; i = 1, 2, \dots m; \quad m \leq n, \tag{II.I}$$

где φ_i – реальные функции. Обозначим через $D_u \subset R_m$ множество точек $(u_1, \dots u_m)$, которые получаются из (II.I), если $(v_1, \dots v_n) \in D_v$. Соотношения (II.I) определяют соответствие между точками D_v и D_u. В зависимости от числа и вида функций φ_i возможны различные случаи.

Пусть $m = n$ и φ_i однозначны во всей области D_v и (II.I) однозначно обратимы во всей области D_u, т.е. между точками D_v и D_u существует однозначное и обратимое соответствие. В таком случае величины $u_1, \dots u_m$ и $v_1, \dots v_n$ полностью эквивалентны относи-тельно способа описания состояния объекта S.

Рассмотрим случай, когда $m < n$ и функции φ_i однознач-ны во всей области D_v. И в этом случае всякой точке $(v_1, \dots v_n)$ (т.е. всякому состоянию) отвечает одна точка $(u_1, \dots u_m) \in D_u$. Од-нако всякой точке $(u_1, \dots u_m) \in D_u$ уже соответствует множество то-чек $(v_1, \dots v_n) \in D_v$, т.е. множество состояний S. В данном слу-чае величины $u_1, \dots u_m$ описывают не отдельные состояния S, а целые группы (множества) его состояний. Таким образом, величины $u_1, \dots u_m$ несут в себе меньшую информацию об объекте S по сравне-нию с максимально полной, которую дают величины $v_1, \dots v_n$. В этом

смысле величины $u_1, \dots u_m$ "хуже" величин $v_1, \dots v_n$. Однако, с другой стороны, величины $u_1, \dots u_n$ описывают реально существующие группы физических состояний, и, следовательно, при оперировании такими величинами какие-либо принципиальные неясности и вопросы не воз-никают, поскольку ясно, каким образом надо с ними обращаться и какой смысл содержится в результатах, выраженных через них.

Все выглядит подобным же образом, если $m = n$, но система (II.I) независимо от выбора $u_1, \dots u_m$ всегда имеет больше одного ре-шения относительно $v_1, \dots v_n$. И в этом случае величины $u_1 \dots u_m$ несут в себе меньшую информацию об объекте S по сравнению с той, которую дают величины $v_1, \dots v_n$, так как они описывают не от-дельные состояния S, а одновременно целые дискретные множест-ва (конечные или бесконечные) таких состояний.

Совокупность величин, описывающих как отдельные состояния данного объекта S (например, величины $v_1, \dots v_n$), так и целые группы (непрерывные или дискретные множества) таких состояний (например, величины $u_1, \dots u_m$), назовем величинами, адекватными объекту S.

Условимся, что величины $u_1, \dots u_m$ введены таким образом, что всякой точке $u_1, \dots u_m$ из некоторой области $D_u \subset R_m$ соответ-ствует одна точка $(v_1, \dots v_n) \in D_v \subset R_n$, но обратное не верно, т.е. всякой точке из D_v соответствует больше чем одна точка из D_u. Например, если заданы связи

$$v_i = f_i(u_1, \dots u_m) \;,\; i = 1, 2, \dots n; \quad n \leq m, \tag{II.2}$$

где f_i – однозначная функция, то мы получим как раз такое много-значное соответствие при $n < m$ или при $n = m$, если урав-нения (II.2) имеют больше одного решения.

В первом из этих случаев каждой точке $(v_1, \dots v_n) \in D_v$ соответ-ствует непрерывное множество точек $(u_1, \dots u_m)$ из D_u. Во втором – – точкам $(v_1, \dots v_n)$ из области D_v будут соответствовать дискретные множества точек $(u_1, \dots u_m)$ из области D_u (конечные или бесконеч-ные). Ясно, что теперь величины $u_1, \dots u_m$ должны были бы содержать больше информации об объекте S , чем величины $v_1,\dots v_n$. Однако мы приняли, что максимальную физическую информацию об объекте дают величины $v_1,\dots v_n$,так как эти величины описывают отдельные состояния S . Дополнительная информация об объекте, которую несут величины $u_1,\dots u_m$, состоит в том, что физические состояния реально отличимые одно от другого (описанные с помощью $v_1,\dots v_n$), расщепляются на самостоятельно не существующие, физически не различимые подсостояния. Их появление может быть обусловлено исключительно математическими операциями, связанными с выбором величин, с помощью которых описывается изучаемый объект.

Совокупность величин,описывающих самостоятельно не существующие подсостояния, на которые расщепляются состояния данного объекта S , или множества таких подсостояний, которые не совпадают ни с отдельными состояниями S , ни с множествами его состояний, назовем величинами, неадекватными объекту S .

В качестве иллюстрации к вышесказанному рассмотрим одномерное движение материальной точки. Состояние материальной точки (т.е. исчерпывающая информация о ней) полностью определено, если заданы ее координата q и импульс p . С помощью следующих соотношений введем новые величины u_1, u_2:

$$q = \ln u_1^2 , \qquad p = \frac{1}{2} u_1 u_2 . \tag{II.3}$$

Отсюда следует, что каждому состоянию (q,p) некоторой точки отвечают две системы значений (u_1, u_2) :

$$u_1^{(1)} = \sqrt{e^q} , \quad u_1^{(2)} = -\sqrt{e^q} , \qquad u_2^{(1)} = \frac{2p}{\sqrt{e^q}} , \quad u_2^{(2)} = -\frac{2p}{\sqrt{e^q}} . \tag{II.4}$$

Таким образом, при оперировании величинами (u_1, u_2) каждое физическое состояние (q,p) расщепляется на физически не различимые подсостояния $(u_1^{(1)}, u_2^{(1)})$ и $(u_1^{(2)}, u_2^{(2)})$. С физической точки зрения ставить вопрос о том, которое из них реализуется, если реализовано состояние (q,p), совершенно бессмысленно, так как отдельно они не имеют физического

смысла и вообще не существуют. Существует лишь состояние (q,p) , которое мы искусственно расщепили на два физически не различимые подсостояния неподходящим (неадекватным) выбором величин u_1, u_2 .

Ш

Рассуждения, проведенные во II части настоящей работы, дают возможность более строго и точно сформулировать ту интерпретацию, которую мы считаем необходимой дать квазираспределениям.

Квазираспределения являются распределениями в пространстве величин, неадекватных рассматриваемому объекту.

В пользу этой интерпретации могут быть приведены различные более или менее веские аргументы. Основные предварительные аргументы содержатся уже в самом ходе рассуждений, приводящих к квазираспределениям. Исходя из положения, что квантовая механика дает вероятностные распределения значений механических величин, мы сделали попытку построить вероятностные распределения в фазовом пространстве. Следовательно, квазираспределения поначалу строились как <u>распределения</u>. Но возможность прямой интерпретации квазираспределений как распределений исключается тем обстоятельством, что они вообще не оказываются неотрицательными. В любом другом отношении квазираспределения как математические объекты формально ничем не отличаются от истинных распределений. По условию с помощью квазираспределений обычными методами теории вероятности мы должны получать средние значения различных механических величин. В сущности, это как раз то основное требование, из которого выводятся квазираспределения. В [34] было показано, что квазираспределения обладают еще одним важным для распределений свойством.

Пусть $W(q,p)$ есть такое квазираспределение, для которого операторы $\hat{A}, \widehat{A^2},\dots \widehat{A^n},\dots$ сопоставленные некоторой механической величине $A(q,p)$ и ее степеням $A^n(q,p)$ $n=2,3,\dots$, подчиняются условию

$$\widehat{A^n} = \hat{A}^n , \qquad n = 1,2,\dots$$

Тогда вероятностное распределение $W(A)$ величины А выражается в виде

$$W(A) = \iint W(q,p)\,\delta(A - A(q,p))\,dq\,dp\,.$$

Другими словами, используя квазираспределение $W(q,p)$, мы получаем вероятностное распределение $W(A)$ величины А таким способом, как в случае, если бы $W(q,p)$ являлось истинным распределением.

Приведенные аргументы убедительно говорят в пользу того, что квазираспределения все-таки желательно интерпретировать как распределения. Это было бы возможно, если бы нам удалось преодолеть или обойти тот факт, что они вообще не неотрицательны. Все затруднения исчезают, если мы примем , что фазовые переменные (координата и импульс),- величины, неадекватные объектам, которые мы хотим описывать (квантовомеханическим объектам). В таком случае эти величины будут определять самостоятельно не существующие (в классическом смысле) подсостояния рассматриваемого объекта, которые отдельно наблюдаться не могут. К множеству таких самостоятельно не существующих, отдельно не наблюдаемых состояний, рассматриваемых в качестве элементарных событий, приложима общая классическая схема теории вероятностей с единственной оговоркой, что вводимые вероятности не обязательно должны быть неотрицательными. Потому что нет и не может быть таких физических соображений, которые бы требовали неотрицательности этих вероятностей, а следовательно, и неотрицательности некоторого распределения в пространстве величин, неадекватных данному объекту. Требование неотрицательности в традиционной теории вероятностей есть прямое следствие реализуемости элементарных событий и априорной возможности их наблюдения. В случае, когда элементарные событія самостоятельно не существуют и отдельно наблюдаться не могут (в классическом смысле), всякая причина требовать неотрицательности распределения отпадает.

В свете подобных рассуждений предлагаемая интерпретация выглядит уже вполне приемлемой. Но чтобы она стала возможной, необходимо показать, что она не связана с физически бессмысленным или противоречивым результатом.

Изложенными выше рассуждениями мы обосновали возможность включить в совокупность функций распределений такие функции, которые не обязательно неотрицательные. Естественно возникает вопрос, всякая ли функция, которая кроме условия неотрицательности

и следствий из него удовлетворяет стандартным требованиям к распределениям в теории вероятностей, входит в это расширение. Законность такого вопроса связана с тем, что, несмотря на то, что распределения, вошедшие в данное расширение, освобождены от прямого требования неотрицательности, это условие для распределений в собственном смысле накладывает ограничения и на них.

Пусть $v_1,..v_n$ и $u_1,..u_m$ соответственно адекватные и неадекватные данному объекту величины. Согласно вышесказанному распределения $U(u_1,\dots u_m)$ в пространстве неадекватных величин $u_1,\dots u_m$ не обязательно должны быть неотрицательными. Однако полученные из них согласно теории вероятностей распределения в пространстве адекватных величин $V(v_1,\dots v_n)$ обязательно должны быть неотрицательными. Это условие сужает множество функций $U(u_1,\dots u_m)$, которые могут быть функциями распределения в рассмотренном нами смысле. Например, в данном во II части примере в этом смысле функциями распределения могут быть только такие функции $U(u_1,u_2)$, которые подчиняются условию

$$U(u_1,u_2) + U(-u_1,-u_2) \geq 0\,.$$

Ясно, что при таком положении вещей для того, чтобы предлагаемая интерпретация была возможной и свободной от противоречий и неверных следствий, необходимо доказать, что при переходе к адекватным для рассматриваемого объекта величинам квазираспределения приводят к неотрицательным функциям.

В /35/ такое доказательство было намечено в общих чертах. В настоящей работе доказываются теоремы, которые дают возможность показать, что этому необходимому условию удовлетворяет, например, квазираспределение Вегнера.

IУ

Пусть S есть данная квантовомеханическая система с s степенями свободы. Обозначим через $\psi(q_1,\dots q_s,t)$ ее волновую функцию в момент времени t , а через $W(q_1,\dots p_s,t)$-соответствующие квазираспределение Вегнера /I/:

$$W(q_1,\dots p_s,t) = (2\pi)^{-s}\int\dots\int \overset{*}{\psi}(q_1-\tfrac{1}{2}\tau_1 h,\dots q_s-\tfrac{1}{2}\tau_s h,t) \times\exp\{-i\sum_{j=1}^{s} p_j\tau_j\}\,\psi(q_1+\tfrac{1}{2}\tau_1 h,\dots q_s+\tfrac{1}{2}\tau_s h,t)\,d^s\tau\,. \qquad (\text{IУ.I})$$

Пусть $f_i(q_1,\dots p_s,t)$ (i =I,2,...,2s)-однозначные функции, для которых почти во всех точках фазового пространства выполняется условие

$$\frac{\partial(f_1,\dots f_{2s})}{\partial(q_1,\dots p_s)} \neq 0.$$

Рассмотрим выражение

$$V(v_1,\dots v_{2s},t)=\int\dots\int dq^s dp^s\, W(q_1,\dots p_s,t) \times \prod_{j=1}^{s}\delta(v_j - f_j(q_1,\dots p_s,t)), \tag{IУ.2}$$

построенное согласно теории вероятностей как распределение в пространстве величин $v_1,\dots v_s$, связанных с величинами $q_1\dots q_s$, $p_1\dots p_s$ соотношениями

$$v_j = f_j(q_1,\dots p_s,t), \quad j=1,2,\dots 2s. \tag{IУ.3}$$

Справедливо следующее утверждение /A/.

Функции $f_j(q_1,\dots p_s,t)$ могут быть выбраны так, что при произвольной $\psi(q_1,\dots q_s,t)$, выбранной из широкого класса волновых функций, функция $V(v_1,\dots v_{2s},t)$, определенная через (IУ.2), будет неотрицательной.

Утверждение /A/ будет доказано, если мы укажем хотя бы один набор функций $f_j(q_1,\dots p_s,t)$, для которого оно справедливо. Поэтому достаточно ограничиться узким классом функций, в котором по предположению такой набор существует.

Условимся считать функции $f_j(q_1,\dots p_s,t)$ однозначными во всей области $D_{q,p}\subset R_{2s}$ изменения величин $q_1,\dots q_s,p_1,\dots p_s$. Обозначим через $D_v(t)\subset R_{2s}$ область, в которую согласно (IУ.3) область $D_{q,p}$ отображена в момент t. Будем предполагать, что f_j – такие функции, для которых при любом фиксированном t область $D_{q,p}$ можно разделить на $K(t)$ (конечное или бесконечное число) неперекрывающихся подобластей $D^{(k)}_{q,p}(t)$ (k =I,2,...,K), в каждой из которых уравнения (IУ.3) однозначно обратимы. Обозначим через $D^{(k)}_v(t)\in D_v(t)$ область, в которую посредством (IУ.3) отображается область $D^{(k)}_{q,p}$. Согласно сказанному, для $(q_1,\dots p_s)\in D^{(k)}_{q,p}(t)$

$$q_i=\varphi^{(k)}_i(v_1,\dots v_{2s},t), \qquad p_i=\varphi^{(k)}_{s+i}(v_1,\dots v_{2s},t), \qquad i=1,2,\dots s.$$

Здесь через $\varphi^{(k)}_j(v_1,\dots v_{2s},t)$ обозначены функции, описывающие однозначное отображение $D^{(k)}_v(t)$ в $D^{(k)}_{q,p}(t)$. В этих условиях интегрирование в (IУ.2) дает

$$V(v_1,\dots v_{2s},t)=\sum_{k=1}^{K(t)} W[\varphi^{(k)}_1(v_1,\dots v_{2s},t),\dots \varphi^{(k)}_{2s}(v_1,\dots v_{2s},t)] \times\left|\frac{\partial(\varphi^{(k)}_1,\dots\varphi^{(k)}_{2s})}{\partial(v_1,\dots v_{2s})}\right| \theta^{(k)}(v_1,\dots v_{2s},t), \tag{IУ.4}$$

где

$$\theta^{(k)}(v_1,\dots v_{2s},t)=\begin{cases}1, & (v_1,\dots v_{2s})\in D^{(k)}_v(t),\\ 0, & (v_1,\dots v_{2s})\notin D^{(k)}_v(t).\end{cases}$$

Все выглядит еще проще, если соотношения (IУ.3) имеют вид:

$$v_j=q_j-\left[\frac{q_j}{\Delta_j}\right]\Delta_j, \qquad v_{s+j}=p_j-\left[\frac{p_j}{\Delta_{j+s}}\right]\Delta_{s+j}, \qquad j=1,2,\dots s, \tag{IУ.5}$$

где $\Delta_1,\dots\Delta_{2s}$ – положительные числа, а $[x]$ означает наибольшее целое число(положительное, отрицательное или нуль), которое меньше x. В этом случае область D_v является $2s$ -мерным параллелепипедом

$$0\le v_i<\Delta_i, \quad i=1,\dots 2s. \tag{IУ.6}$$

Подобласти, в которых уравнения (IУ.5) однозначно обратимы, имеют вид

$$D^{(k_1,\dots k_{2s})}_{q,p}:\ \begin{cases}k_j\Delta_j\le q_j<(k_j+1)\Delta_j,\\ k_{s+j}\Delta_{s+j}\le p_j<(k_{j+s}+1)\Delta_{j+s},\end{cases} \quad j=1,\dots s,$$

при любых целых $k_1,\dots k_{2s}$. Все они посредством (IУ.5) трансформируются в (IУ.6), т.е. для всех $k_1,\dots k_{2s}$ $D^{(k_1,\dots k_{2s})}_v\equiv D_v$. Уравнения, обратные (IУ.5), которые $D^{(k_1,\dots k_{2s})}_v$ трансформируют в $D^{(k_1,\dots k_{2s})}_{q,p}$, следующие:

$$q_j=v_j+k_j\Delta_j, \qquad p_j=v_{s+j}+k_{s+j}\Delta_{s+j}, \qquad j=1,2,\dots s,$$

и (IУ.4) приобретает упрощенный вид:

$$V(v_1,\dots v_{2s},t)=\sum_{k_1,\dots k_{2s}=-\infty}^{\infty} W(v_1+k_1\Delta_1,\dots v_{2s}+k_{2s}\Delta_{2s},t). \tag{IУ.7}$$

Таким образом, чтобы доказать утверждение /А/, достаточно доказать справедливость утверждения /В/.

Величины $\Delta_1, \dots \Delta_{2s}$ могут быть выбраны так, что при произвольном выборе $\psi(q_1, \dots q_s, t)$ из широкого класса волновых функций функция $V(v_1, \dots v_{2s}, t)$, определяемая (IУ.7), будет неотрицательной.

В следующей части доказывается несколько математических теорем, на основе которых в дальнейшем, используя некоторые оценки для функции Вегнера, доказывается справедливость утверждения /В/ и, следовательно, утверждения /А/. В этих общих математических рассуждениях вместо обозначений $q_1, \dots p_s$ будем использовать обозначения $u_1, \dots u_n$. Кроме того, будем считать, что число этих переменных не обязательно должно быть четным, и не будем ограничиваться рассмотрением только функции Вегнера. Поэтому введем и другое обозначение U вместо W в правой части (IУ.7). Таким образом, все рассуждения, проводимые в следующей части, направлены на доказательство следующего утверждения /С/.

Величины $\Delta_1, \dots \Delta_n$ могут быть выбраны так, что при произвольном выборе $U(u_1, \dots u_n)$ из широкого класса функций функция

$$V(v_1, \dots v_n, t) = \sum_{k_1 \dots k_n = -\infty}^{\infty} U(v_1 + k_1\Delta_1, \dots v_n + k_n\Delta_n, t)$$

будет неотрицательной.

У

Конечную или бесконечную область $D \subset R_n$ будем называть выпуклой, если концы любого содержащегося в ней отрезка также содержатся в ней.

Пусть функция $U(u_1, \dots u_n)$, определенная в выпуклой области D_u, и точка $(u_1^0, \dots u_n^0)$ принадлежат области D_u. Обозначим соответственно через u_i' и u_i'' наименьшее и наибольшее из значений u_i, которые при фиксированных $u_j = u_j^0$ $(j \neq i)$ удовлетворяют условию

$$(u_1^0, \dots u_{i-1}^0, u_i, u_{i+1}^0, \dots u_n^0) \in D_u .$$

С помощью точек $u_i^0 \equiv u_i' \le u_i^{(1)} \le u_i^{(2)} \le \dots \le u_i^{(r-1)} \le u_i^{(r)} \equiv u_i''$ разобьем интервал $[u_i', u_i'']$ (конечный или бесконечный) на подынтервалы и образуем выражение

$$\sum_{k=1}^{r-1} \left| U(u_1^0, \dots u_{i-1}^0, u_i^{(k+1)}, u_{i+1}^0, \dots u_n^0) - U(u_1^0, \dots u_{i-1}^0, u_i^{(k)}, u_{i+1}^0, \dots u_n^0) \right| . \qquad (У.I)$$

Если это выражение остается ограниченным при любом произвольном выборе $u_i^{(k)}$ и r, то будем говорить, что функция U имеет ограниченную вариацию в D_u при $u_j = u_j^0$ $(j \neq i)$. Точную верхнюю границу выражения (У.I) будем называть полной вариацией U по u_i в области D_u при $u_j = u_j^0$ $(j \neq i)$. Обозначим ее символом

$$\mathrm{Var}\left[D_u; u_i; U(u_1^0, \dots u_{i-1}^0, u_i, u_{i+1}^0, \dots u_n^0)\right] .$$

Сразу видно, что эта вариация зависит от значений u_j^0 $(j \neq i)$. Если при всех возможных значениях u_j $(j \neq i)$ существует такое K_i, что

$$\mathrm{Var}\left[D_u; u_i; U(u_1, \dots u_n)\right] \le K_i ,$$

то будем говорить, что $U(u_1, \dots u_n)$ имеет равномерно ограниченную вариацию по u_i в области D_u. Если для любого $i = 1, 2, \dots n$ существует такое K_i, то $\mathrm{Var}[D_u; u_i; U(u_1, \dots, u_n)] \le K$, где $K = \max(K_1, \dots K_n)$. В таком случае говорим, что вариация U равномерно ограничена в области D_u.

Теорема I. Пусть D_u – выпуклая область $0 \le u_i \le L_i$, $i = 1, 2, \dots n$, и функция $U(u_1, \dots u_n)$ имеет равномерно ограниченную вариацию в области D_u, т.е.

$$\mathrm{Var}\left[D_u; u_i; U(u_1, \dots u_n)\right] \le K, \quad i = 1, 2, \dots n .$$

Докажем, что вариация функции

$$V(v_1, \dots v_n) = \sum_{k_j = 0, 1, \dots u_j - 1;\ j = 1, \dots n} U(v_1 + k_1\Delta_1, \dots v_n + k_n\Delta_n) \qquad (У.2)$$

равномерно ограничена в D_v: $0 \le v_i \le \Delta_i = \frac{L_i}{u_i}$, $i = 1, 2, \dots n$, и при этом

$$\mathrm{Var}\left[D_v; v_i; V(v_1, \dots v_n)\right] \le K \prod_{\substack{j = 1, \dots n \\ j \neq i}} u_j , \qquad (У.3)$$

Доказательство: Берем произвольное число $\alpha_i - 1$ произвольных точек $v_i^{(\alpha)}$ $(\alpha = 1, 2, \dots \alpha_i - 1)$, которые удовлетворяют условию:

$$0 \le v_i^{(1)} \le v_i^{(2)} \le \dots v_i^{(\alpha_i - 2)} \le v_i^{(\alpha_i - 1)} \le \Delta_i .$$

Введем обозначения $v_i^{(0)} = 0$ и $v_i^{(\alpha_i)} = \Delta_i$ и запишем выражение (У.12):

$$\delta_i = \sum_{\alpha=1}^{\alpha_i} \left| V(v_1, \dots v_{i-1}, v_i^{(\alpha)}, v_{i+1}, \dots v_n) - V(v_1, \dots v_{i-1}, v_i^{(\alpha-1)}, v_{i+1} \dots v_n) \right| .$$

Согласно (У.2)

$$\delta_i = \sum_{\alpha=1}^{\alpha_i} \Big| \sum_{\substack{k_1 = 0, \dots u_1 - 1 \\ \dots \\ k_n = 0 \dots u_n - 1}} \{ U(v_1 + k_1 \Delta_1, \dots v_{i-1} + k_{i-1}\Delta_{i-1}, v_i^{(\alpha)} + k_i \Delta_i, \dots v_n + k_n \Delta_n) -$$

$$- U(v_1 + k_1 \Delta_1, \dots v_i^{(\alpha-1)} + k_i \Delta_i, \dots v_n + k_n \Delta_n) \} \Big| \le$$

$$\le \sum_{\substack{k_j = 0, 1, \dots u_j - 1 \\ j = 1, \dots i-1, i+1, \dots n}} \quad \sum_{\substack{k_1 = 0, \dots u_1 - 1 \\ \dots \\ k_n = 0, \dots u_n - 1}} \left| U(v_1 + k_1 \Delta_1, \dots v_i^{(\alpha-1)} + k_i \Delta_i, \dots v_n + k_n \Delta_n) - \right. \qquad \text{(У.4)}$$

$$\left. - U(v_1 + k_1 \Delta_1, \dots v_i^{(\alpha)} + k_i \Delta_i, \dots v_n + k_n \Delta_n) \right| .$$

Из способа, по которому выбраны точки $V_i^{(\alpha)}$, ясно, что

$$0 \le v_i^{(0)} \le v_i^{(1)} \le \dots \le v_i^{(\alpha_i - 1)} \le v_i^{(\alpha_i)} \le \Delta_i$$

$$= v_i^{0} + \Delta_i \le v_i^{(1)} + \Delta_i \le \dots \le v_i^{(\alpha_i - 1)} + \Delta_i \le v_i^{(\alpha_i)} + \Delta_i = 2\Delta_i$$

$$= v_i^{0} + 2\Delta_i \le v_i^{(1)} + 2\Delta_i \le \dots$$

$$= v_i^{(0)} + (u_i - 1)\Delta_i \le v_i^{(1)} + (u_i - 1)\Delta_i \le \dots$$

$$\dots \le v_i^{(\alpha_i - 1)} + (u_i - 1)\Delta_i \le v_i^{(\alpha_i)} + (u_i - 1)\Delta_i = u_i \Delta_i = L_i ,$$

т.е. реализовано одно из возможных разделений интервала $[0, L_i]$. Тогда при произвольном выборе $v_i^{(\alpha)}$ и α_i имеем:

$$\sum_{\substack{k_j = 0, 1, \dots u_j - 1 \\ \alpha = 1, \dots \alpha_i}} \left| U(v_1 + k_1 \Delta_1, \dots v_i^{(\alpha)} + k_i \Delta_i, \dots v_n + k_n \Delta_n) - \right.$$

$$\left. - U(v_1 + k_1 \Delta_1, \dots v_i^{(\alpha-1)} + k_i \Delta_i, \dots v_n + k_n \Delta_n) \right| \le$$

$$\le Var \left[D_u ; u_i ; U(v_1 + k_1 \Delta_1, \dots v_{i-1} + k_{i-1}\Delta_{i-1}, u_i, \dots v_n + k_n \Delta_n) \right] \le K .$$

Следовательно, согласно (У.4)

$$\delta_i \le \sum_{\substack{k_j = 0, \dots u_{j-1} \\ j \ne i}} K = K \prod_{\substack{j = 1, \dots n \\ j \ne i}} u_j . \qquad \text{(У.5)}$$

Неравенство (У.5) выполняется при любом произвольном выборе $v_i^{(\alpha)}$ и α_i, и, следовательно, оно справедливо и для точной верхней границы δ_i, которая имеет вид

$$Var \left[D_v ; v_i ; V(v_1, \dots, v_n) \right] ,$$

т.е. (У.3) тоже выполняется.

Теорема 2. Если в условиях теоремы I справедливо

$$\int_{D_u} \dots \int d^n u \; U(u_1, \dots u_n) = A > 0 \qquad \text{(У.6)}$$

и $u_1 \dots u_n$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{u_i} < \frac{A}{K \prod_{i=1 \dots n} L_i} , \qquad \text{(У.7)}$$

то для любой точки области D_v $V(v_1, \dots v_n) > 0$.

Доказательство:

$$\int_{D_u} \dots \int d^n u \; U(u_1, \dots u_n) = \int_{D_v} \dots \int d^n v \sum_{\substack{k_j = 0, \dots u_j - 1 \\ j = 1, \dots n}} U(v_1 + k_1 \Delta_1, \dots v_n + k_n \Delta_n) =$$

$$= \int_{D_v} \dots \int d^n v \; V(v_1, \dots v_n) ,$$

т.е., как следует из (У.6),

$$\int\cdots\int_{D_v} d^n v\, V(v_1,\dots v_n) = A. \qquad (У.8)$$

Однако, с другой стороны,

$$\int\cdots\int_{D_v} d^n v\, V(v_1,\dots v_n) \le \max_{(v_1,\dots v_n)\in D_v} V \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{L_i}{u_i}. \qquad (У.9)$$

Из (У.8) и (У.9) следует, что при любом выборе $u_1,\dots u_n$

$$\max_{(v_1,\dots v_n)\in D_v} V \geqslant A \prod_{i=1}^{n} \frac{u_i}{L_i}. \qquad (У.IO)$$

Пусть $(v_1',\dots v_n')$ и $(v_1'',\dots v_n'')$ есть две точки, принадлежащие D_v. Тогда из теоремы I следует, что

$$|V(v_1',\dots v_n') - V(v_1'',\dots v_n'')| \le$$

$$\le \sum_{i=1,\dots n} |V(v_1'',\dots v_{i-1}'', v_i',\dots v_n') - V(v_1'',\dots v_{i-1}'', v_i'', v_{i+1}'\dots v_n')| \le$$

$$\le \sum_{i=1,2,\dots n} \mathrm{Var}[D_v; v_i; V(v_1,\dots v_n)] \le K \sum_{i=1,\dots n} \prod_{\substack{j=1,\dots n \\ j\ne i}} u_j.$$

В таком случае

$$\max_{(v_1,\dots v_n)\in D_v} V(v_1,\dots v_n) \le K \sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{j=1,\dots n \\ j\ne i}} u_j + \min_{(v_1,\dots v_n)\in D_v} V(v_1,\dots v_n). \qquad (У.II)$$

Предположим, что

$$\min_{(v_1,\dots v_n)\in D_v} V(v_1,\dots v_n) \le 0.$$

Тогда, как следует из (У.II), должно выполняться условие

$$\max_{(v_1,\dots v_n)\in D_v} V(v_1,\dots v_n) \le K \sum_{i=1,\dots n} \prod_{\substack{j=1,\dots n \\ j\ne i}} u_j.$$

Этот результат совместим с (У.IO) только в том случае, если

$$K \sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{j=1,\dots n \\ j\ne i}} u_j \ge A \prod_{i=1,2\dots n} \frac{u_i}{L_i},$$

т.е. если

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{u_i} \ge \frac{A}{K \prod_{i=1,\dots n} L_i}.$$

Однако всегда возможно так выбрать $u_1,\dots u_n$, что обратное неравенство (У.7) будет справедливо. Полученное в данном случае противоречие показывает, что предположение о том, что в какой-то точке функция $V(v_1,\dots v_n)$ может быть неположительной, неверно, т.е. во всех точках D_v $V(v_1,\dots v_n)>0$.

Теорема 3 (основная теорема). Пусть в R_n задана частично непрерывная функция $U(u_1,\dots u_n)$, которая подчиняется условиям

I. $\int\cdots\int_{R_n} d^n u\, U(u_1,\dots u_n) = A > 0$.

2. Вариация $U(u_1,\dots u_n)$ по переменной u_i в интервале $[u_i', u_i'+1]$ при произвольных значениях других переменных не превышает некоторое число χ, которое не зависит ни от выбора переменной u_i, ни от положения интервала $[u_i', u_i'+1]$. Другими словами, существует такое χ, что оценка

$$\mathrm{Var}\,[[u_i', u_i'+1]; u_i; U(u_1,\dots u_n)] < \chi$$

равномерна относительно всех переменных и их значений.

3. Существуют такие $L>0$ и $a>0$, что при $|u_i|<L$ и произвольных u_j $(j\ne i)$

$$|U(u_1,\dots u_n)| < \frac{a}{|u_i|^{\alpha}}, \quad \alpha > n. \qquad (У.I2)$$

Докажем, что существуют такие $l>L$ и целые $m>0$, при которых функция

$$V_{l,m}(v_1,\dots v_n) = \sum_{k_1,\dots k_n=-\infty}^{\infty} U\left(v_1+k_1\frac{l}{m},\dots v_n+k_n\frac{l}{m}\right) \qquad (У.I3)$$

неотрицательна во всей области D_v: $0\le v_i \le \frac{l}{m}$.

Доказательство: Функция $V_{l,m}(v_1,\dots v_n)$ задана с помощью многократного бесконечного ряда. Покажем, что благодаря условию (У.I2) этот ряд абсолютно и равномерно сходится.

Рассмотрим при фиксированных ℓ и m функции

$$V_{\ell,m,s}(v_1,\dots v_n)=\sum_{(k_1,\dots k_n)\in K_{\ell,m,s}} U\left(v_1+k_1\frac{\ell}{m},\dots v_n+k_n\frac{\ell}{m}\right), \qquad (У.14)$$

где $K_{\ell,m,s}$ есть множество

$$-s\le k_i\le s-1,\quad i=1,2,\dots n. \qquad (У.15)$$

Образуем разность

$$V_{\ell,m,s+r}(v_1,\dots v_n)-V_{\ell,m,s}(v_1,\dots v_n)=V_{\ell,m,s,r}(v_1,\dots v_n). \qquad (У.16)$$

Сразу видно, что

$$V_{\ell,m,s,r}(v_1,\dots v_n)=\sum_{(k_1,\dots k_n)\in \tilde K_{\ell,m,s,r}} U\left(v_1+k_1\frac{\ell}{m},\dots v_n+k_n\frac{\ell}{m}\right), \qquad (У.17)$$

где множество $\tilde K_{\ell m s r}=K_{\ell,m,s+r}-K_{\ell,m,s}$ можно представить в виде

$$\tilde K_{\ell,m,s,r}=\sum_{(i_1,\dots i_n)}\tilde K_{\ell,m,s,r}(i_1,\dots i_j|i_{j+1},\dots i_k|i_{k+1},\dots i_n), \qquad (У.18)$$

где $\tilde K_{\ell,m,s,r}(i_1,\dots i_j|i_{j+1},\dots i_k|i_{k+1},\dots i_n)$ есть множество

$$-(r+s)\le k_i\le-(s+1),\qquad i=i_1,\dots i_j,$$
$$-s\le k_i\le s-1,\qquad i=i_{j+1},\dots i_k,$$
$$s\le k_i\le r+s-1,\qquad i=i_k,\dots i_n.$$

Суммирование в (У.18) выполнено с учетом всех возможных способов разбиения чисел 1,2,...n на три группы: $(i_1,\dots i_j),(i_{j+1},\dots i_k),(i_{k+1},\dots i_n)$, за исключением той комбинации, при которой все числа находятся во второй группе. Две комбинации считаются одинаковыми, если соответствующие им группы-одни и те же числа.

Представление (У.18) дает возможность записать функцию $V_{\ell,m,s,r}(v_1,\dots v_n)$ в виде

$$V_{\ell,m,s,r}(v_1,\dots v_n)=\sum_{(i_1,\dots i_n)}\ \sum_{(k_1,\dots k_n)\in\tilde K_{\ell,m,s,r}(i_1,\dots i_j|i_{j+1},\dots i_k|i_{k+1},\dots i_n)} U\left(v_1+k_1\frac{\ell}{m},\dots v_n+k_n\frac{\ell}{m}\right),$$

следовательно,

$$V_{\ell,m,s,r}(v_1,\dots v_n)\le\sum_{(i_1\dots i_n)}\ \sum_{(k_1\dots k_n)\in\tilde K_{\ell,m,s,r}(i_1,\dots i_j|i_{j+1}\dots i_k|i_{k+1}\dots i_n)}\left|U\left(v_1+k_1\frac{\ell}{m},\dots v_n+k_n\frac{\ell}{m}\right)\right|. \qquad (У.19)$$

Выберем произвольные $(v_1,\dots v_n)\in D_v$ и $(k_1\dots k_n)\in\tilde K_{\ell,m,s,r}(i_1,\dots i_j|i_{j+1},\dots i_k|i_{k+1},\dots i_n)$. При $s\ge m$ и $\ell>L(1-\frac{1}{m})-1$ вследствие требования 3 из условия теоремы для таких $v_1,\dots v_n$ и $(k_1,\dots k_n)$ справедливо неравенство

$$\left|U\left(v_1+k_1\frac{\ell}{m},\dots v_n+k_n\frac{\ell}{m}\right)\right|\le$$

$$\le a\left(\left|v_{i_1}+k_{i_1}\frac{\ell}{m}\right|\dots\left|v_{i_j}+k_{i_j}\frac{\ell}{m}\right|\cdot\left|v_{i_{k+1}}+k_{i_{k+1}}\frac{\ell}{m}\right|\dots\left|v_{i_n}+k_{i_n}\frac{\ell}{m}\right|\right)^{-\frac{\alpha}{n-k+j}}.$$

Отсюда видно, что при таких условиях

$$\operatorname{Max}\left|U\left(v_1+k_1\frac{\ell}{m},\dots,v_n+k_n\frac{\ell}{m}\right)\right|\le$$

$$\le a\left(\left|(k_{i_1}+1)\frac{\ell}{m}\right|\dots\left|(k_{i_j}+1)\frac{\ell}{m}\right|\left|k_{i_{k+1}}\frac{\ell}{m}\right|\dots\left|k_{i_n}\frac{\ell}{m}\right|\right)^{-\frac{\alpha}{n-k+j}}=$$

$$=\operatorname{Min} a\left(|z_{i_1}|\dots|z_{i_j}||z_{i_{k+1}}|\dots|z_{i_n}|\right)^{-\frac{\alpha}{n-k+j}},$$

$$(k_i+1)\frac{\ell}{m}\le z_i\le(k_i+2)\frac{\ell}{m},\qquad i=i_1,\dots i_j,$$

$$(k_i-1)\frac{\ell}{m}\le z_i\le k_i\frac{\ell}{m},\qquad i=i_k,\dots i_n.$$

Следовательно, для произвольно выбранных $(v_1,\dots v_n)\in D_v$ и

$$(k_1,\dots k_n)\in\tilde K_{\ell,m,s,r}(i_1,\dots i_j|i_{j+1},\dots i_k|i_{k+1},\dots i_n)$$

$$\left|U\left(v_1+k_1\frac{\ell}{m},\dots v_n+k_n\frac{\ell}{m}\right)\right|<$$

$$<\left(\frac{m}{\ell}\right)^n\int\dots\int a\left(|z_{i_1}|\dots|z_{i_j}||z_{i_k}|\dots|z_{i_n}|\right)^{-\frac{\alpha}{n-k+j}}dz_1\dots dz_n$$

$$(k_i+1)\frac{\ell}{m}\le z_i\le(k_i+2)\frac{\ell}{m},\qquad i=i_1,\dots i_j,$$
$$-s\frac{\ell}{m}\le z_i\le s\frac{\ell}{m},\qquad i=i_{j+1},\dots i_k,$$
$$(k_i-1)\frac{\ell}{m}\le z_i\le k_i\frac{\ell}{m},\qquad i=i_{k+1},\dots i_n.$$

Тогда

$$\sum_{(k_1,\dots k_n)\in\tilde K_{\ell,m,s,r}(i_1,\dots i_j|i_{j+1},\dots i_k|i_{k+1},\dots i_n)}\left|U\left(v_1+k_1\frac{\ell}{m},\dots v_n+k_n\frac{\ell}{m}\right)\right|<$$

$$<2^{k-j}a\,s^{k-j}(s-1)\left(\frac{n-k+j}{\alpha-(n-k+j)}\right)^{n-k+j}\left(\frac{m}{\ell}\right)^{\alpha}.$$

Так как в наших рассуждениях $k \geq j$, то $n-k+j \leq n$ и $\alpha-(n-k+j) \geq \alpha - n$ всегда. Используя эти неравенства, окончательно получаем

$$\sum_{(k_1,\dots k_n)\in \tilde{K}_{\ell,m,s,r}(i_1,\dots i_j|i_{j+1},\dots i_k|i_{k+1},\dots i_n)} \left|U(v_1+k_1\frac{\ell}{m},\dots v_n+k_n\frac{\ell}{m})\right| < \tag{У.20}$$

$$< a\left(\frac{m}{(s-1)\ell}\right)^{\alpha}(2s)^{k-j}(s-1)^{n-k+j}\left(\frac{n}{\alpha-n}\right)^{n-k+j}$$

Эта оценка справедлива при любых $r>0$. Правая часть зависит только от числа $j, k-j$ и $n-k$ тех из чисел I,2,..n, которые находятся соответственно в группах $(i_1,\dots i_j),(i_{j+1},\dots i_k),(i_{k+1},\dots i_n)$, но не зависит от того, какие именно из этих чисел попали в каждую из групп. Это позволяет легко найти верхнюю границу правой части неравенства (У.19). Для этой цели просуммируем обе части (У.20) по всем $\tilde{K}_{\ell,m,s,r}(i_1,\dots i_j|i_{j+1}\dots i_k|i_{k+1},\dots i_n)$, т.е. по всем возможным способам разбиения чисел 1,2,...n на три группы, исключая комбинацию $(0),(1,\dots n),(0)$. При фиксированных j и k число возможных комбинаций равно $\frac{n!}{j!(k-j)!(n-k)!}$. Следовательно, согласно (У.20)

$$\sum_{(i_1,\dots i_n)}\ \sum_{(k_1,\dots k_n)\in \tilde{K}_{\ell,m,s,r}(i_1,\dots i_j|i_{j+1},\dots i_k|i_{k+1},\dots i_n)} \left|U(v_1+k_1\frac{\ell}{m},\dots v_n+k_n\frac{\ell}{m})\right| <$$

$$< \sum_{\substack{0\leq j\leq k\\ 0\leq k\leq n}}\ \frac{n!}{j!(n-k)!(k-j)!}\,2^{k-j}\left(\frac{n}{\alpha-n}\right)^{n-k+j} a\left(\frac{m}{\ell}\right)^{\alpha}\frac{s^n}{(s-1)^{\alpha}} \tag{У.2I}$$
$$(j,k)\neq(0,n)$$

$$< 2^n a\left(\frac{n}{\alpha-n}\right)^n\left(\frac{m}{\ell}\right)^{\alpha}\frac{s^n}{(s-1)^{\alpha}} .$$

Эта оценка также не зависит от выбора $r>0$. Она не зависит и от выбора $(v_1,\dots v_n)\in D_v$. Так как по условию $\alpha>n$, то при $s\to\infty$ правая часть стремится к нулю. Учитывая (У.16), (У.17), (У.19), можно заключить, что ряд в правой части (У.13) абсолютно и равномерно сходится в области D_v.

Доказанная сходимость обеспечивает существование функций, заданных (У.13), и законность производимых с ними в дальнейшем операций.

Теперь оценим разность значений функции $V_{\ell m}(v_1,\dots v_n)$ при данных m и $\ell > L(1-\frac{1}{m})^{-1}$ в двух произвольных точках $(v_1',\dots v_n')$ и $(v_1'',\dots v_n'')$ области D_v. Используя обозначения (У.14), (У.15) и (У.17), при $s=m$, $r=\infty$ имеем

$$|V_{\ell,m}(v_1',\dots v_n') - V_{\ell,m}(v_1'',\dots v_n'')| =$$

$$= |V_{\ell,m,m}(v_1',\dots v_n') + V_{\ell,m,m,\infty}(v_1',\dots v_n') - V_{\ell,m,m}(v_1'',\dots v_n'') - V_{\ell,m,m,\infty}(v_1'',\dots v_n'')| \leq \tag{У.22}$$

$$\leq |V_{\ell,m,m}(v_1',\dots v_n') - V_{\ell,m,m}(v_1'',\dots v_n'')| +$$

$$+ |V_{\ell,m,m,\infty}(v_1',\dots v_n')| + |V_{\ell,m,m,\infty}(v_1'',\dots v_n'')| .$$

Функция $V_{\ell,m,m}(v_1,\dots v_n)$ построена согласно (У.I4) и определена только в области

$$D_u':\ -\ell\leq u_i\leq \ell\ ;\ i=1,2,\dots n\ .$$

При этом вследствие требования условия 2 теоремы

$$Var\left[D_u';u_i;U(u_1,\dots u_n)\right] < 2\ell X .$$

Тогда согласно теореме I

$$Var\left[D_v;v_i;V_{\ell,m,m}(v_1,\dots v_n)\right] < 2\ell X m^{n-1} . \tag{У.23}$$

Так как

$$|V_{\ell,m,m}(v_1',\dots v_n') - V_{\ell,m,m}(v_1'',\dots v_n'')| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1,2,\dots n} |V_{\ell,m,m}(v_1'',\dots v_{i-1}'',v_i',\dots v_n') - V_{\ell,m,m}(v_1'',\dots v_{i-1}'',v_i'',v_{i+1}',\dots v_n')|$$

$$\leq \sum_{i=1,2,\dots n} Var\left[D_v;v_i;V_{\ell,m,m}(v_1,\dots v_n)\right] ,$$

то из результата (У.23) следует

$$|V_{\ell,m,m}(v_1',\dots v_n') - V_{\ell,m,m}(v_1'',\dots v_n'')| < 2n\ell X m^{n-1} .$$

Оценки для двух других членов правой части (У.22) можно сразу получить из (У.I9) и (У.2I) при $s=m$ и $r=\infty$.

Окончательно

$$|V_{\ell,m}(v_1',\dots v_n') - V_{\ell,m}(v_1'',\dots v_n'')| < \qquad\qquad$$

$$< 2n\ell\chi m^{n-1} + 2^{n+1} a \left(\frac{n}{\alpha-n}\right)^n \left(\frac{m}{\ell}\right)^\alpha \frac{m^{n-\alpha}}{(1-\frac{1}{m})^\alpha}\,. \qquad (У.24)$$

Так как оценка (У.24) справедлива при произвольном выборе $(v_1,\dots v_n')\in D_v$ и $(v_1'',\dots v_n'')\in D_v$, то из нее следует, что

$$\max_{(v_1,\dots v_n)\in D_v} V_{\ell,m}(v_1,\dots v_n) < \min_{(v_1,\dots v_n)\in D_v} V_{\ell,m}(v_1,\dots v_n) +$$

$$+ 2n\ell\chi m^{n-1} + 2^{n+1} a \left(\frac{n}{\alpha-n}\right)^n \frac{m^n}{\ell^\alpha}\, \frac{1}{(1-\frac{1}{m})^\alpha}\,.$$

Однако, с другой стороны, для максимального значения $V_{\ell,m}(v_1,\dots v_n)$ имеем

$$\max_{(v_1,\dots v_n)\in D_v} V_{\ell,m}(v_1,\dots v_n) \geq A\left(\frac{m}{\ell}\right)^n,$$

Этот результат следует из того, что согласно условию I теоремы

$$\left(\frac{\ell}{m}\right)^n \max_{(v_1,\dots v_n)\in D_v} V_{\ell,m}(v_1,\dots v_n) \geq \int\limits_{D_v}\!\dots\!\int V_{\ell,m}(v_1,\dots v_n)\, d^n v =$$

$$= \int\limits_{D_v}\!\dots\!\int \sum_{k_1,\dots k_n=-\infty}^{\infty} U\left(v_1+k_1\frac{\ell}{m},\dots v_n+k_n\frac{\ell}{m}\right) d^n v =$$

$$= \sum_{k_1,\dots k_n=-\infty}^{\infty} \int\limits_{k_i\frac{\ell}{m}\leq u_i\leq(k_i+1)\frac{\ell}{m}}\!\dots\!\int U(u_1,\dots u_n)\, d^n u =$$

$$= \int\limits_{R_n}\!\dots\!\int d^n u\; U(u_1,\dots u_n) = A > 0\,.$$

Таким образом, окончательно получаем, что при любом выборе $m>0$ и $\ell > L(1-\frac{1}{m})^{-1}$ должно выполняться неравенство

$$A\left(\frac{m}{\ell}\right)^n \leq \max_{(v_1,\dots v_n)\in D_v} V_{\ell,m}(v_1,\dots v_n) < 2n\ell\chi m^{n-1} + \qquad (У.25)$$

$$+ 2^{n+1} a \left(\frac{n}{\alpha-n}\right)^n \left(1-\frac{1}{m}\right)^{-\alpha} \ell^{n-\alpha} + \min_{(v_1,\dots v_n)\in D_v} V_{\ell,m}(v_1,\dots v_n)\,.$$

Теперь выберем m и $\ell > L(1-\frac{1}{m})^{-1}$ так, что

$$\frac{2n\ell^{n+1}\chi}{m} + 2^{n+1} a \left(\frac{n}{\alpha-n}\right)^n \left(1-\frac{1}{m}\right)^{-\alpha} \ell^{n-\alpha} < \frac{A}{2}\,. \qquad (У.26)$$

Это всегда можно сделать. Действительно, зафиксируем $m=m_1$ и выберем $\ell > L(1-\frac{1}{m_1})^{-1}$ настолько большим по величине, что

$$2^{n+1} a \left(\frac{n}{\alpha-n}\right)^n \left(1-\frac{1}{m_1}\right)^{-\alpha} \ell^{n-\alpha} < \frac{A}{2}\,. \qquad (У.27)$$

При постоянном ℓ выберем $m > m_1$ так, что

$$\frac{2n\ell^{n+1}\chi}{m} < \frac{A}{2}\,. \qquad (У.28)$$

Разумеется, так как выполняется (У.27), с возрастанием m $(1-\frac{1}{m})^{-1}$ уменьшается. Тогда при новом выборе m будем иметь

$$2^{n+1} a \left(\frac{n}{\alpha-n}\right)^n \left(1-\frac{1}{m}\right)^{-\alpha} \ell^{n-\alpha} < \frac{A}{2}\,. \qquad (У.29)$$

Соотношения (У.28) и (У.29) обеспечивают справедливость соотношения (У.26).

Допустим, что при таком выборе m и ℓ $\min\limits_{(v_1,\dots v_n)\in D_v} V_{\ell,m}(v_1,\dots v_n)<0$. Тогда согласно (У.25) должно было бы выполняться

$$A\left(\frac{m}{\ell}\right)^n \leq \max_{(v_1,\dots v_n)\in D_v} V_{\ell,m}(v_1,\dots v_n) <$$

$$< 2n\ell\chi m^{n-1} + 2^{n+1} a \left(\frac{n}{\alpha-n}\right)^n m^n \ell^{-\alpha} \left(1-\frac{1}{m}\right)^{-\alpha},$$

т.е.

$$\frac{2n\chi\ell^{n+1}}{m} + 2^{n+1} a \left(\frac{n}{\alpha-n}\right)^n \left(1-\frac{1}{m}\right)^{-\alpha} \ell^{n-\alpha} > A\,.$$

Но это неравенство противоречит неравенству (У.26), которое обязательно должно выполняться вследствие сделанного выбора m и ℓ. Полученное противоречие показывает, что предположение о возможности для $V_{\ell,m}(v_1,\dots v_n)$ принимать и отрицательные значения неверно. Следовательно, существуют такие m и ℓ, при которых функция $V_{\ell,m}(v_1,\dots v_n)$, заданная (У.13), неотрицательна.

УI

Как видно из доказательства теоремы 3, выбор ℓ и m, при котором функция $V_{\ell,m}(v_1,\dots v_n)$, заданная (У.13), неотрицательна, не зависит от конкретного выбора $U(u_1,\dots u_n)$ из функций, подчиняющихся условиям теоремы. Следовательно, в сущности доказано, что существуют такие $\Delta_1 = \ldots = \Delta_n = \frac{\ell}{m}$, для которых при произвольном выборе $U(u_1, \ldots u_n)$ из широкого класса функций, удовлетворяющих условиям теоремы 3, соответствующая функция $V(v_1, \ldots v_n)$ будет неотрицательной. Это означает, что доказано утверждение /С/ из IУ-ой части и указан один конкретный класс функций $U(u_1, \ldots u_n)$, для которых оно справедливо. Ясно, что для доказательства утверждения /В/, а следовательно и /А/, достаточно показать, что существует широкий класс волновых функций $\psi(q_1, \ldots, q_s, t)$, для которых соответствующие им квазираспределения Вигнера $W(q_1, \ldots p_s, t)$ удовлетворяют условиям теоремы 3, т.е.

$$\int_{R_{2s}} \cdots \int W(q_1, \ldots p_s, t)\, d^s q\, d^s p = A > 0 \qquad (\text{УI.I})$$

при произвольном выборе j , q_j' и p_j' ,

$$Var\left[[q_j', q_j'+1]; q_j; W(q_1, \ldots p_s, t)\right] < \chi , \qquad (\text{УI.2})$$

$$Var\left[[p_j', p_j'+1]; p_j; W(q_1, \ldots p_s, t)\right] < \chi \qquad (\text{У.3})$$

и существуют такие $L > 0$ и $a > 0, \alpha > 2s$, что

$$|W(q_1, \ldots p_s, t)| < a|q_j|^{-\alpha}, \quad |q_j| > L , \qquad (\text{УI.4})$$

$$|W(q_1, \ldots p_s, t)| < a|p_j|^{-\alpha}, \quad |p_j| > L . \qquad (\text{УI.5})$$

Обозначим через $E_s(\lambda, \ell, \beta)$ $(\lambda > 0, \ell > 0$ и $\beta > \frac{s}{2})$ множество нормированных к единице волновых функций $\psi(q_1, \ldots p_s, t)$, подчиняющихся условиям:

$$|\psi(q_1, \ldots q_s, t)| < \frac{\ell}{(q_1^2 + \ldots + q_s^2)^\beta} , \quad q_1^2 + \ldots + q_s^2 > \lambda^2 , \qquad (\text{УI.6})$$

$$|\tilde{\psi}(p_1, \ldots p_s, t)| < \frac{\ell}{(p_1^2 + \ldots + p_s^2)^\beta} , \quad p_1^2 + \ldots + p_s^2 > \lambda^2 . \qquad (\text{УI.7})$$

Здесь

$$\tilde{\psi}(p_1, \ldots p_s, t) = (2\pi h)^{-\frac{s}{2}} \int_{R_s} \cdots \int d^s q\, \psi(q_1 \ldots q_s, t) \exp\left\{-\frac{i}{h} \sum_j q_j p_j\right\} .$$

Докажем, что справедливо утверждение /Д/.

Если $\psi(q_1, \ldots q_s, t)$ есть произвольно выбранная из множества $E_s(\lambda, \ell, \beta)$ функция при $\lambda = L$, $\beta = \frac{\alpha}{2} > s$, то соответствующая

функция Вигнера подчиняется требованиям (УI.I)-(УI.5) при А=I и

$$\chi = \frac{1}{(\pi h)^s} \frac{2}{h} \left[1 + L^2 + \frac{\ell^2 \pi^{s/2}}{(2\alpha - s - 2)\Gamma(1 + \frac{s}{2}) L^{2\alpha - s - 2}} \right], \qquad (\text{УI.8})$$

$$a = \frac{\ell}{(\pi h)^s} \left[1 + \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(\frac{s}{2} + 1)} + \frac{4\ell \pi^{s/2}}{(\alpha - s)\Gamma(\frac{s}{2}) L^{\alpha - s}} \right]. \qquad (\text{УI.9})$$

Для данной волновой функции $\psi(q_1, \ldots q_s, t)$ соответствующая функция Вигнера задается следующими двумя представлениями:

$$W(q_1, \ldots p_s, t) = \frac{1}{(2\pi)^s} \int_{R_s} \cdots \int d^s \tau\, \overset{*}{\psi}\left(q_1 - \frac{\tau_1 h}{2}, \ldots q_s - \frac{\tau_s h}{2}, t\right)$$

$$\times \exp\left\{-i \sum_{j=1}^{s} \tau_j p_j\right\} \psi\left(q_1 + \frac{\tau_1 h}{2}, \ldots q_s + \frac{\tau_s h}{2}, t\right) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^s} \int_{R_s} \cdots \int d^s \theta\, \overset{*}{\tilde{\psi}}\left(p_1 - \frac{\theta_1 h}{2}, \ldots p_s - \frac{\theta_s h}{2}, t\right)$$

$$\times \exp\left\{i \sum_{j=1}^{s} \theta_j q_j\right\} \tilde{\psi}\left(p_1 + \frac{\theta_1 h}{2}, \ldots p_s + \frac{\theta_s h}{2}, t\right).$$

Из вида $W(q_1, \ldots p_s, t)$ и сделанных в /37/ оценок, обобщенных для многомерного случая, следует, что

$$Var\left[[q_j', q_j'+1]; q_j; W(q_1, \ldots p_s, t)\right] \leq \qquad (\text{УI.IO})$$

$$\leq \int_{q_j'}^{q_j'+1} \left|\frac{\partial W}{\partial q_j}\right| dq_j \leq (\pi h)^{-s} \frac{2}{h} \left[\overline{p_j^2} + 1\right] ,$$

$$Var\left[[p_j', p_j'+1]; p_j; W(q_1, \ldots p_s, t)\right] \leq \qquad (\text{УI.II})$$

$$\leq \int_{p_j'}^{p_j'+1} \left|\frac{\partial W}{\partial p_j}\right| dp_j \leq (\pi h)^{-s} \frac{2}{h} \left[\overline{q_j^2} + 1\right] ,$$

где

$$\overline{q_j^2} = \int_{R_s} \cdots \int q_j^2 |\psi(q_1, \ldots q_s, t)|^2 d^s q$$

и

$$\overline{p_j^2} = \int_{R_s} \cdots \int p_j^2 |\tilde{\psi}(p_1, \ldots p_s, t)|^2 d^s p .$$

Если $\psi(q_1, \ldots p_s, t)$ удовлетворяет условиям (УI.6) и (УI.7), то, как вытекает из /36/, справедливы оценки

$$|W(q_1, \ldots p_s, t)| < \frac{2\ell}{(\pi h)^s} \frac{1}{|q_j|^{2\beta}} \int_{R_s} \cdots \int |\psi(q_1, \ldots q_s, t)| d^s q \qquad (\text{УI.I2})$$

при $|q_j| > \lambda$ и

$$|W(q_1,\dots p_s,t)| < \frac{2b}{(\pi h)^s}\,\frac{1}{|p_j|^{2\beta}}\int\limits_{R_s}\!\cdots\!\int |\tilde{\psi}(p_1,\dots p_s,t)|\,d^s p \qquad \text{(УI.I3)}$$

при $|p_j| > \lambda$.

С другой стороны, опять же согласно (УI.6) и (УI.7) и нормировке $\psi(q_1,\dots q_s,t)$ справедливы оценки

$$\overline{p_j^2},\ \overline{q_j^2} < \lambda^2 + \frac{b^2\pi^{s/2}}{(4\beta-s-2)\,\Gamma(\frac{s}{2}+1)\,\lambda^{4\beta-s-2}}\ , \qquad \text{(УI.I4)}$$

$$\int\limits_{R_s}\!\cdots\!\int |\psi(q_1,\dots q_s,t)|\,d^s q,\ \int\limits_{R_s}\!\cdots\!\int |\tilde{\psi}(p_1,\dots p_s,t)|\,d^s p$$
$$< \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(1+s/2)} + \frac{4b\,\pi^{s/2}}{(2\beta-s)\,\Gamma(\frac{s}{2})\,\lambda^{2\beta-s}}\right]. \qquad \text{(УI.I5)}$$

Если $\psi(q_1,\dots q_s,t)$ принадлежит множеству $E_s(\lambda,b,\beta)$, то из соотношений (УI.I0) – (УI.I5) получим:

$$Var[[q_j',q_j'+1];q_j;W(q_1,\dots p_s,t)] < (\pi h)^{-s}\frac{2}{h}\left[1+\lambda^2+\frac{b^2\pi^{s/2}}{(4\beta-s-2)\,\Gamma(1+s/2)\,\lambda^{4\beta-s-2}}\right],$$

$$Var[[q_j,p_j'+1];p_j;W(q_1,\dots p_s,t)] < (\pi h)^{-s}\frac{2}{h}\left[1+\lambda^2+\frac{b^2\pi^{s/2}}{(4\beta-s-2)\,\Gamma(1+s/2)\,\lambda^{4\beta-s-2}}\right],$$

$$|W(q_1,\dots p_s,t)| < |q_j|^{-2\beta}(\pi h)^{-s}\left[1+\frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(1+s/2)}+\frac{4b\,\pi^{s/2}}{(2\beta-s)\,\Gamma(\frac{s}{2})\,\lambda^{2\beta-s}}\right]$$

при $|q_j| > \lambda$,

$$|W(q_1,\dots p_s,t)| < |p_j|^{-2\beta}(\pi h)^{-s}\left[1+\frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(1+s/2)}+\frac{4b\,\pi^{s/2}}{(2\beta-s)\,\Gamma(\frac{s}{2})\,\lambda^{2\beta-s}}\right]$$

при $|q_j| < \lambda$.

Наряду с неравенством $\int\limits_{R_{2s}}\!\cdots\!\int W(q_1,\dots p_s,t)\,d^s q\,d^s p = 1$, которое следует из нормировки волновых функций, эти неравенства показывают, что действительно при любом выборе волновой функции $\psi(q_1,\dots q_s,t)$ из множества $E_s(\lambda,b,\beta)$ при $\lambda = L$ $\beta = \frac{\alpha}{2} > s$ выполняются соотношения (УI.I) – (УI.5) при $A = 1$ и χ и a , определенных из (УI.8) и (УI.9) соответственно. Этим устанавливается верность утверждения /Д/. Следовательно, мы показали, что утверждение /В/, а значит и /А/, действительно выполняется, и, кроме того, указали конкретный широкий класс волновых функций $\psi(q_1,\dots q_s,t)$, для которых оно справедливо.

УП

Доказанные в предыдущих частях утверждения убедительно говорят в пользу предложенной интерпретации квазираспределений как распределений в пространстве величин, неадекватных рассматриваемому объекту. Продемонстрированная возможность получения из квазираспределений Вигнера неотрицательных функций путем введения новых подходящих величин и при использовании стандартной для теории вероятностей процедуры еще раз убедительно доказывает возможность и приемлемость данной интерпретации. Особое значение, которое приобретают в таком свете изложенные доказательства и утверждения, обязывает сделать некоторые замечания к ним.

Основная цель выполненных рассуждений состоит в том, чтобы показать возможность и приемлемость предложенной интерпретации. Цель достигнута путем введения определенного набора величин и проведения рассуждений при этом частном выборе. Сделанный выбор был продиктован единственно соображениями простоты и удобства при проведении доказательств. Мы нигде не утверждаем, что рассмотренные величины являются набором величин, адекватных некоторому объекту, или же, что существуют некоторые физические соображения, которые к ним приводят.

Второе замечание относится к вопросу об общности проведенного рассмотрения. Нетрудно доказать, что для любого квазираспределения Вигнера (при произвольной нормируемой волновой функции) соответствующим образом могут быть введены новые переменные, которые обеспечат неотрицательность получаемой новой функции распределения. Однако только этот факт не может служить убедительным аргументом в пользу предложенной интерпретации, так как он означает лишь то, что при любом выборе волновой функции, т.е. для любого квантовомеханического состояния, такие переменные могут быть введены своим специфическим способом. В свете предложенной интерпретации это означает, то что для любого квантовомеханического состояния адекватные величины следует выбирать, вообще говоря, различными способами. Маловероятно, что подобная ситуация имеет нечто общее с действительностью. Утверждение /А/ доказывается в работе с учетом общих требований к волновым функциям (УI.6) и (УI.7). В результате возможно утверждение, что для каждой волновой функции из рассматриваемого класса соответствующая функция Вигнера не только приводит к неотрицательной функции, но и гарантирует возможность этого при едином выборе новых переменных.

Можно было бы поставить вопрос о замене условий (УI.6) и (УI.7) более слабыми, т.е. доказать утверждение /А/ для более широкого класса волновых функций. Но подобное обобщение, неминуемо связанное с усложнениями в доказательствах, ничего принципиально нового не дает.

Возможность обобщения следует искать в двух следующих направлениях: квазираспределения Вигнера не являются единственно возможными, поэтому и для других квазираспределений надо доказать утверждения, подобные утверждению /А/; с другой стороны, как видно из рассмотрения, проведенного во II разделе, существуют различные способы реализации неоднозначного соответствия между набором новых переменных и переменными $q_1, \dots p_s$. В настоящей работе рассмотрен только тот случай, когда такое соответствие устанавливается соотношением вида (УI.3).

Литература

1. E.Winger . Phys.Rev. 40, 749 (1932).
2. Я.Терлецкий. ЖЭТФ, 7, 1920 (1937).
3. D.I.Blokhintsev. J.Phys. 2, 41 (1940).
4. K.Husimi. Proc.Phys.Math.Soc. Japan. 22, 264 (1940).
5. E.J.Moyal. Proc.Cambr.Phil.Soc. 45, 99 (1949).
6. F.Bopp. Ann.Inst. H.Poincare, 15, 81 (1956).
7. G.A.Baker. Phys.Rev. 109, 2198 (1958).
8. H.Margenau, R.N.Hill. Progr.Theor.Phys. 26, 722 (1961).
9. D.B.Fairlie. Proc.Cambr.Phil.Soc. 60, 581 (1964).
10. L.Cohen. Phil.Sc. 33 (1966).
11. H.Margenau, L.Cohel. Studies in Foundation, Methodology and Philosophy of Science, vol.2 (1967) (ed. M.Bunge).Probabilities in Quantum Mechanics.
12. V.V.Kuryshkin. Int.of Theor.Phys. 7, 451 (1973).
13. А.А.Тяпкин. Сб.:Философские вопросы квантовой физики. Наука, Москва, 1970.
14. J.H.Irving, R.W.Zwanzig. J.Chem.Phys. 19, 1173 (1951).
15. H.Rubin. Proc.Int.Symp. on Axiomatic Method. (North Holland Publ.Co., Inc.Amsterdam, 1959).
16. H.Mori, I.Oppenheim, J.Ross. Studies in Statistical Mechanics. (J. de Boer and G.E.Uhlenbeck Eds) (North Holland Publ. Co., Amsterdam, 1962, N°-1).
17. E.C.G.Sudarshan. Phys.Rev.Lett. 10, 277 (1963).

18. R.Kibo. J.Phys.Soc.Japan, 19, 2127 (1964).
19. Y.Kano. J.Phys. Soc. Japan, 19, 1555 (1964).
20. K.Imre, E.Ozizmir, M.Rosenbaum, P.F.Zweifel. J.Math. Phys., 8, 1097 (1967).
21. C.L.Mehta. J.Phys. A1, 385 (1968).
22. M.Lax, H.Yuen. Phys.Rev. 172, 362 (1968).
23. G.S.Agarwal, S.Wolf. Phys.Rev. D2, 2161 (1970) ;
Phys.Rev. D2, 2187 (1970) ;
Phys.Rev. D2, 2206 (1970).
24. E.Wigner. Prospective in Quantum Theory. (MIT, Cambridge, Mass., 1971).
25. M.Fröhlich, E.Guth. Nature, 136, 179 (1936).
26. H.J.Groenewold. Physica, XII, 405 (1946).
27. J.R.Shewell. Am.J.Phys. 27, 16 (1959).
28. D.Bohm. Quantum Theory. New-York, Prentice-Hall, Incl.1952.
29. E.C.G.Sudershan, T.F.Jordan. Rev.Mod.Phys. 33, 515 (1961).
30. J.R.Klauder. J.Nath.Phys., 4, 1055 (1963).
31. L.Cohen. J.Math.Phys. 11, 3296 (1970).
32. V.V.Kurishkin. Ann.Inst.H.Poincare, 17, 81 (1973).
33. A.Lord Eric, T.S.Shankara. Int.J.Theor.Phys. 7, 301 (1973).
34. I.Zlatev. Compt.rend.Acad.bulg.Sci. 27, 1489 (1974).
35. I.Zlatev. Compt.rend.Acad.bulg.Sci. 28 (1975).
36. I.Zlatev. Compt.rend.Acad.bulg.Sci. 28, 893 (1975).

Рукопись поступила в издательский отдел
17 марта 1978 года.