СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 11295

Н.А.Черников, Н.С.Шавохина

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ТЕОРИИ МИРОВЫХ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

1978

P2 - 11295

Н.А.Черников, Н.С.Шавохина

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ТЕОРИИ МИРОВЫХ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Черников Н.А., Шавохина Н.С.

P2 - 11295

Краевая задача в теории мировых минимальных поверхностей

Рассматриваются два точечных тела, взаимодействие между которыми передается через двумерную поверхность, ограниченную мировыми траекториями этих тел. Для таких поверхностей с помощью вариационного метода выводится система уравнений с частными (уравнения минимальных поверхностей) и обыкновенными (краевые условия) производными. Определяется канонический импульс и указывается способ получения сохраняющихся величин. Показано, что при наличии сохраняющейся величины краевые условия один раз интегрируются. Постановка краевой задачи для минимальных поверхностей позволила решить проблему релятивизации уравнений Ньютона для двух тел с потенциалом взаимодействия, пропорциональным расстоянию между телами.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Chernikov N.A., Shavokhina N.S.

P2 - 11295

The Boundary Value Problem in the Theory of World Minimal Surfaces

Two point bodies are considered which interact through a two-dimensional surface bounded by a world trajectories of those bodies. By using the variational method for such surfaces a system of equations is derived with partial (equations of minimal surfaces) and with ordinary (boundary conditions) derivatives. The canonical momentum is determined, and the method for obtaining conserved quantities is pointed out. It is shown that for the conserved quantity the boundary conditions are once integrated. The boundary value problem as stated for minimal surfaces permits the solution of the problem of relativization of the two-body Newton equations with an interaction potential proportional to the distance between bodies.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

Весьма трудным для теории относительности оказался первоначальный вопрос Пуанкаре [1] о том, какие изменения надо внести в уравнения небесной механики

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = m_1 m_2 \gamma \frac{x_2 - x_1}{|x_2 - x_1|^3},$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = m_1 m_2 \gamma \frac{x_1 - x_2}{|x_1 - x_2|^3}$$

для двух тел, подчиняющихся закону всемирного тяготения Ньютона, чтобы должным образом учесть факт постоянства скорости света c. Насколько труден этот вопрос, можно судить по тому, что известное решение Шварцшильда [2], явившееся воистину триумфальным достижением общей теории относительности, дает ответ лишь на предельный случай, когда одну из частиц считают пробной.

Подобный вопрос представляет интерес и в случае уравнений Ньютона

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{\partial}{\partial x_1} U(r), \qquad m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\frac{\partial}{\partial x_2} U(r),$$

описывающих поведение двух тел с каким-либо иным, чем

$$U(r) = -\frac{m_1 m_2 \gamma}{r}, \qquad r = |x_2 - x_1|, \qquad /1/$$

потенциалом взаимодействия $U(r)$. Можно ожидать, что вопрос Пуанкаре окажется проще в случае $U(r) = Gr^2$, где G не зависит от r, когда уравнения Ньютона становятся линейными. Но, казалось бы, нет никаких оснований думать, что вопрос окажется довольно простым в случае $U(r) = Gr$, поскольку уравнения Ньютона с таким потенциалом решаются значительно труднее, чем с потенциалом /1/.

Тем не менее поиски /3-13/ физического смысла математической теории мировых минимальных поверхностей привели к ответу на вопрос о релятивизации уравнений Ньютона

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = G \frac{x_2 - x_1}{|x_2 - x_1|}, \quad m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = G \frac{x_1 - x_2}{|x_1 - x_2|} \qquad /2/$$

с потенциалом $U(r) = Gr$. Этому вопросу и посвящается данная серия статей под общим названием “Пример релятивистской задачи двух тел“.

В настоящей статье мы изложим общую теорию мировых минимальных поверхностей и поставим краевую задачу, эквивалентную задаче о специальном взаимодействии двух тел. В работе /12/ было показано, что краевая задача для мировой минимальной поверхности сводится к решению уравнений /2/, коль скоро в пространственно-временном мире действует группа преобразований Галилея. Заменяя в краевой задаче преобразования Галилея преобразованиями Лоренца, приходим к аналогичной релятивистской задаче двух тел - главной цели данного исследования.

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

Рассматриваемое взаимодействие двух частиц с мировыми траекториями

$$x = x_1(\tau_1), \qquad x = x_2(\tau_2) \qquad /3/$$

передается через двумерную мировую поверхность

$$x = x_0(u, v), \qquad /4/$$

соединяющую траектории /3/ и ограниченную ими. Поведение частиц определяется двумя плотностями действия

$$\mathcal{L}_n(x, \dot{x}), \qquad n = 1,2, \qquad /5/$$

сосредоточенными на траекториях /3/, и плотностью действия

$$\mathcal{L}_0(x, a, b), \qquad /6/$$

сосредоточенной на поверхности /4/.

Здесь обозначено: $x = \{x^\alpha\}$ - совокупность координат $x^0, x^1, \ldots, x^N$ в $(N+1)$-мерном мире; τ_1 и τ_2 - параметры на траекториях /3/; u, v - параметры на поверхности /4/; наконец, $\dot{x} = \{\dot{x}^\alpha\}$, $a = \{a^\alpha\}$, $b = \{b^\alpha\}$, где

$$\dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}, \quad a^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u}, \quad b^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial v}. \qquad /7/$$

Функция действия рассматриваемой системы равняется

$$S = S_0 + S_1 + S_2, \qquad /8/$$

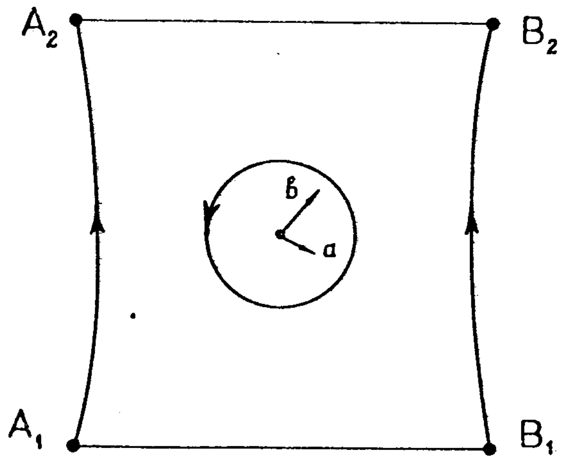
где

$$S_0 = \iint \mathcal{L}_0(x, a, b)\, du\, dv, \qquad /9/$$

$$S_1 = \int \mathcal{L}_1\left(x, \frac{dx}{d\tau_1}\right) d\tau_1, \qquad /10/$$

$$S_2 = \int \mathcal{L}_2\left(x, \frac{dx}{d\tau_2}\right) d\tau_2. \qquad /11/$$

Интеграл /10/ берется по направленному в будущее отрезку $A_1 A_2$ мировой траектории первой частицы, интеграл /11/ - по направленному в будущее отрезку $B_1 B_2$ мировой траектории второй частицы, а интеграл /9/ - по ориентированному куску $A_1 B_1 B_2 A_2 A_1$ поверхности /4/ /см. *рисунок*/.



Говоря о "будущем", подразумеваем, что в $(N+1)$ -мерном мире существует глобальная координата времени t, удовлетворяющая следующим условиям. Весь мир расслаивается на N -мерные поверхности $t = \mathrm{const}$. Всякая такая поверхность пересекает каждую из траекторий /3/ только в одной точке. Из двух событий, лежащих на траектории частицы, более поздним считается событие, отмеченное большим значением координаты t .

Вариация функции действия равна

$$\delta S = \delta S_0 + \delta S_1 + \delta S_2 \,, \qquad /12/$$

где

$$\delta S_0 = \iint \left(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial x^\alpha} \delta x^\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial a^\alpha} \delta a^\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial b^\alpha} \delta b^\alpha \right) du\, dv \,, \qquad /13/$$

$$\delta S_1 = \int_{A_1}^{A_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial x^\alpha} \delta x^\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \dot{x}^\alpha} \delta \dot{x}^\alpha \right) d\tau_1 \,, \qquad /14/$$

$$\delta S_2 = \int_{B_1}^{B_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial x^\alpha} \delta x^\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \dot{x}^\alpha} \delta \dot{x}^\alpha \right) d\tau_2 \,. \qquad /15/$$

Выведем уравнения движения, приравнивая нулю вариацию /12/ всюду, за исключением замкнутых отрезков $A_1 B_1$ и $A_2 B_2$ Для этого проинтегрируем /14/ и /15/ по частям:

$$\delta S_1 = \int_{A_1}^{A_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\tau_1} \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) \delta x^\alpha d\tau_1 + \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \dot{x}^\alpha} \delta x^\alpha \Big|_{A_1}^{A_2} \,, \qquad /16/$$

$$\delta S_2 = \int_{B_1}^{B_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\tau_2} \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) \delta x^\alpha d\tau_2 + \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \dot{x}^\alpha} \delta x^\alpha \Big|_{B_1}^{B_2} \,, \qquad /17/$$

а вариацию /13/ приведем к аналогичному виду с помощью формулы Грина:

$$\delta S_0 = \iint \left(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial a^\alpha} - \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial b^\alpha} \right) \delta x^\alpha du\, dv + \oint \left(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial a^\alpha} dv - \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial b^\alpha} du \right) \delta x^\alpha \,, \qquad /18/$$

где контурный интеграл равен

$$\oint \quad \int_{B_1}^{B_2} - \int_{A_1}^{A_2} - \int_{A_2}^{B_2} + \int_{A_1}^{B_1} \,.$$

Таким образом получаем следующие уравнения движения:

$$0)\ \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial a^\alpha} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial b^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial x^\alpha} = 0\ ,$$

$$1)\ \frac{d}{d\tau_1}\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \dot{x}^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial b^\alpha}\frac{du}{d\tau_1} - \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial a^\alpha}\frac{dv}{d\tau_1}\ ,$$

$$2)\ \frac{d}{d\tau_2}\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \dot{x}^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial a^\alpha}\frac{dv}{d\tau_2} - \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial b^\alpha}\frac{du}{d\tau_2}\ . \qquad /19/$$

Уравнения 1/ и 2/ для мировых траекторий частиц выступают здесь в качестве краевых условий для мировой поверхности, задаваемой уравнениями О/.

2. КАНОНИЧЕСКИЙ ИМПУЛЬС

Если уравнения /19/ удовлетворяются, то вариация /12/ становится равной

$$\delta S = P_{1,\alpha}\,\delta x^\alpha(A_2) + P_{2,\alpha}\,\delta x^\alpha(B_2) + \int_{A_2}^{B_2} P_\alpha(du,dv)\,\delta x^\alpha -$$

$$- P_{1,\alpha}\,\delta x^\alpha(A_1) - P_{2,\alpha}\,\delta x^\alpha(B_1) - \int_{A_1}^{B_1} P_\alpha(du,dv)\,\delta x^\alpha\ , \qquad /2O/$$

где

$$P_{1,\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \dot{x}^\alpha}, \qquad P_{2,\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \dot{x}^\alpha}\ , \qquad /21/$$

$$P_\alpha(du,dv) = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial b^\alpha}\,du - \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial a^\alpha}\,dv\,. \qquad /22/$$

Таким образом приходим к следующему определению канонического импульса. Проведем на поверхности /4/ некоторую линию AB, соединяющую точку A, принадлежащую мировой траектории первой частицы, с точкой B, принадлежащей мировой траектории второй частицы. Согласно /2O/, в точке A сосредоточен импульс $P_{1,\alpha}$, в точке B - импульс $P_{2,\alpha}$, а на участке (du, dv) линии AB распределен импульс $P_\alpha(du, dv)$. Выражения для этих величин представлены формулами /21/-/22/.

Следовательно, если мировая траектория частицы $x = x(\tau)$ лежит на поверхности /4/ и определяется уравнениями

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial a^\alpha}\frac{dv}{d\tau} - \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial b^\alpha}\frac{du}{d\tau}\ , \qquad /23/$$

то этой частице через поверхность /4/ передается каноническая сила, равная

$$f_\alpha = -P_\alpha\left(\frac{du}{d\tau}, \frac{dv}{d\tau}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial a^\alpha}\frac{dv}{d\tau} - \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial b^\alpha}\frac{du}{d\tau}\ . \qquad /24/$$

В этом предложении выражен физический смысл уравнений движения /1/ и 2/, входящих в систему /19/. Что касается уравнений О/, то они говорят о законе распределения канонического импульса по мировой поверхности /4/.

3. ВЕКТОРНЫЕ И КОВЕКТОРНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Говоря о векторных и ковекторных величинах, имеем в виду характер их преобразования, вызываемого преобразованием

$$\tilde{x}^\alpha = \tilde{x}^\alpha(x^0, x^1, \ldots, x^N) \qquad /25/$$

координат в $(N+1)$ -мерном мире. Так, величины $\dot x$, a, b - векторные, поскольку их компоненты /7/ преобразуются по следующему правилу:

$$\dot{\tilde x}^\alpha = \dot x^\mu \frac{\partial \tilde x^\alpha}{\partial x^\mu}, \quad \tilde a^\alpha = a^\mu \frac{\partial \tilde x^\alpha}{\partial x^\mu}, \quad \tilde b^\alpha = b^\mu \frac{\partial \tilde x^\alpha}{\partial x^\mu} \qquad /26/$$

Напротив, производные $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^\alpha}$ от любой функции $\mathfrak{L}=\mathfrak{L}(x)$ составляют ковекторную величину $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x}$, поскольку

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \tilde x^\alpha} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde x^\alpha} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^\mu}. \qquad /27/$$

Пары $(x, \dot x)$ и тройки (x, a, b) можно рассматривать как точки $2(N+1)$ -мерного и $3(N+1)$-мерного пространств, соответственно. В этих пространствах будем рассматривать не произвольные, а только специальные преобразования координат /25/-/26/.

В $2(N+1)$ -мерном пространстве ковекторную величину составляют производные $\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x}, \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot x}\right)$ от всякой функции $\mathfrak{L}=\mathfrak{L}(x, \dot x)$. При специальном преобразовании координат ее компоненты преобразуются следующим образом:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \tilde x^\alpha} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde x^\alpha} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \tilde x^\alpha \, \partial \tilde x^\sigma} \dot{\tilde x}^\sigma \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot x^\mu}, \qquad /28/$$

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\tilde x}^\alpha} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde x^\alpha} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot x^\mu}. \qquad /29/$$

Аналогично, в $3(N+1)$ -мерном пространстве ковекторную величину составляют производные $\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x}, \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial a}, \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial b}\right)$ от всякой функции $\mathfrak{L}=\mathfrak{L}(x, a, b)$. При специальном пре-

образовании координат компоненты этой величины преобразуются следующим образом:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \tilde x^\alpha} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde x^\alpha} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \tilde x^\alpha \, \partial \tilde x^\sigma} \left(a^\sigma \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial a^\mu} + b^\sigma \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial b^\mu} \right), \qquad /30/$$

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \tilde a^\alpha} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde x^\alpha} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial a^\mu}, \qquad \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \tilde b^\alpha} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde x^\alpha} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial b^\mu}. \qquad /31/$$

Согласно /29/ и /31/, части $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot x}$, $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial a}$ и $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial b}$ этих величин, подобно /27/, суть ковекторные величины в $(N+1)$ -мерном мире.

Отсюда немедленно следует, что канонический импульс /21/-/22/ и каноническая сила /24/ - суть ковекторные величины в $(N+1)$ -мерном мире.

Убедимся в том, что левая часть уравнений /23/ также представляет собой ковекторную величину. Действительно, дифференцируя /29/ по τ, находим

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\tilde x}^\alpha} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde x^\alpha} \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot x^\mu} + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \tilde x^\sigma \, \partial \tilde x^\alpha} \dot{\tilde x}^\sigma \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot x^\mu}.$$

Вычитая отсюда /28/, получаем

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\tilde x}^\alpha} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \tilde x^\alpha} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde x^\alpha} \left(\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot x^\mu} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^\mu} \right). \qquad /32/$$

Следовательно, величина

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot x} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} \qquad /33/$$

является ковекторной величиной в $(N+1)$-мерном мире.

С помощью формул /31/ и /30/ аналогично доказывается, что в системе /19/ левая часть уравнений 0/ представляет собой ковекторную величину

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial a}+\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial b}-\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} \qquad /34/$$

в $(N+1)$-мерном мире.

Если в некоторой мировой точке x приложены вектор $\xi=\{\xi^a\}$ и ковектор $p=\{p_a\}$, то свертка $\xi p=\xi^a p_a$ не зависит от преобразования /25/. Эту свертку называем скалярным произведением ковектора p на вектор ξ.

Так, скалярное произведение ковектора /33/ на вектор $\dot{x}$ равно

$$\dot{x}^a\left(\frac{d}{d\tau}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{x}^a}-\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^a}\right)=\frac{d}{d\tau}\left(\dot{x}^a\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{x}^a}-\mathfrak{L}\right), \qquad /35/$$

а скалярные произведения ковектора /34/ на векторы a и b равны

$$a^a\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial a^a}+\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial b^a}-\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^a}\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial u}\left(a^a\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial a^a}-\mathfrak{L}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(a^a\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial b^a}\right),$$

$$b^a\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial a^a}+\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial b^a}-\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^a}\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial u}\left(b^a\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial a^a}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(b^a\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial b^a}-\mathfrak{L}\right). \qquad /36/$$

Рассмотрим еще скалярные произведения ковектора /33/ на векторы a и b, предполагая, что кривая $x=x(\tau)$ лежит на поверхности /4/. В силу этого имеем

$$\dot{x}^a=a^a\frac{du}{d\tau}+b^a\frac{dv}{d\tau}. \qquad /37/$$

Подставляя в $\mathfrak{L}(x,\dot{x})$ выражения /4/ и /37/, получаем

$$\mathfrak{L}(x,\dot{x})=K(u,v,\dot{u},\dot{v}). \qquad /38/$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{\partial K}{\partial u}=a^a\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^a}+\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{x}^a}\left(\frac{\partial a^a}{\partial u}\dot{u}+\frac{\partial b^a}{\partial u}\dot{v}\right),$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{u}}=a^a\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{x}^a}. \qquad /39/$$

Но

$$\frac{\partial a^a}{\partial u}\dot{u}+\frac{\partial b^a}{\partial u}\dot{v}=\frac{\partial a^a}{\partial u}\frac{du}{d\tau}+\frac{\partial a^a}{\partial v}\frac{dv}{d\tau}=\frac{da^a}{d\tau}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial K}{\partial u}=a^a\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^a}+\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{x}^a}\frac{da^a}{d\tau}.$$

С другой стороны, дифференцируя /39/, получаем

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial K}{\partial \dot{u}}=a^a\frac{d}{d\tau}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{x}^a}+\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{x}^a}\frac{da^a}{d\tau}.$$

Сравнивая два последних выражения, находим

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial K}{\partial \dot{u}}-\frac{\partial K}{\partial u}=a^a\left(\frac{d}{d\tau}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{x}^a}-\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^a}\right). \qquad /40/$$

В результате получилось скалярное произведение ковектора /33/ на вектор a. Аналогично получается скалярное произведение ковектора /33/ на вектор b, а именно:

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial K}{\partial \dot{v}}-\frac{\partial K}{\partial v}=b^a\left(\frac{d}{d\tau}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{x}^a}-\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^a}\right). \qquad /41/$$

Здесь мы применили метод Лагранжа /14/.

4. ВЫВОД ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

Рассмотрим, как в наших условиях реализуется известная теорема Нетер /15/. Возьмем наугад какую-либо однопараметрическую группу преобразований

$$\tilde{x}^{\alpha} = \phi^{\alpha}(x^0, x^1, \ldots, x^N; \epsilon) \qquad /42/$$

мировых координат, где ϵ - аддитивный параметр группы. В результате дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} \phi^{\alpha}(x^0, x^1, \ldots, x^N; \epsilon) = \lambda^{\alpha}(\phi^0, \phi^1, \ldots, \phi^N) \qquad /43/$$

получаем векторное поле $\lambda^{\alpha}(x^0, x^1, \ldots, x^N)$ в $(N+1)$-мерном мире. По формулам /26/ продолжим группу /42/ до группы преобразований координат в $2(N+1)$-мерном пространстве пар $(x, \dot{x})$ и в $3(N+1)$ -мерном пространстве троек (x, a, b). Если при всех таких преобразованиях функции /5/ и /6/ оказываются неизменными, так что

$$\mathcal{L}_n(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}) = \mathcal{L}_n(x, \dot{x}), \; \mathcal{L}_0(\tilde{x}, \tilde{a}, \tilde{b}) = \mathcal{L}_0(x, a, b), \qquad /44/$$

то функция действия /8/ не зависит от группового параметра ϵ, а тогда при подстановке в /13/, /14/ и /15/ выражений

$$\delta x^{\alpha} = \lambda^{\alpha}, \quad \delta \dot{x}^{\alpha} = \frac{\partial \lambda^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \dot{x}^{\mu},$$
$$\delta a^{\alpha} = \frac{\partial \lambda^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} a^{\mu}, \quad \delta b^{\alpha} = \frac{\partial \lambda^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} b^{\mu} \qquad /45/$$

вариация /12/ оказывается равной нулю. Из выражения /20/ для той же вариации следует, что в таком случае в процессе движения сохраняется величина $\mathfrak{M}$, равная

$$\mathfrak{M} = \lambda^{\alpha} P_{1,\alpha}(A) + \lambda^{\alpha} P_{2,\alpha}(B) + \int_A^B \lambda^{\alpha} P_{\alpha}(du, dv). \qquad /46/$$

Применим доказанную теорему к случаю, когда одна из мировых координат циклична, т.е. когда от нее не зависят функции /5/ и /6/. Для определенности пусть это будет координата x^0. Вместо общего выражения /42/ полагаем $\tilde{x}^0 = x^0 + \epsilon$, $\tilde{x}^k = x^k$. Отсюда по формулам /26/ получаем $\dot{\tilde{x}} = \dot{x}$, $\tilde{a} = a$, $\tilde{b} = b$. Следовательно, условия /44/ соблюдаются, так что сохраняется компонента $\mathcal{P}_0$ суммарного импульса системы, равная

$$\mathcal{P}_0 = P_{1,0}(A) + P_{2,0}(B) + \int_A^B P_0(du, dv). \qquad /47/$$

Если $x^0 = t$, где t - координата времени, то энергия системы равна $\mathcal{E} = -\mathcal{P}_0$.

Представляет также интерес вывод законов сохранения непосредственно из уравнений движения /19/. Пусть условия /44/ выполняются. От функций, стоящих в левых частях равенств /44/, возьмем производные по ϵ при $\epsilon = 0$:

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}_n}{\partial \epsilon} = \frac{\partial \mathcal{L}_n}{\partial x^{\alpha}} \delta x^{\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}_n}{\partial \dot{x}^{\alpha}} \delta \dot{x}^{\alpha},$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}_0}{\partial \epsilon} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial x^{\alpha}} \delta x^{\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial a^{\alpha}} \delta a^{\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial b^{\alpha}} \delta b^{\alpha}.$$

В силу условий /44/ все они равны нулю. Здесь δx^{α}, $\delta \dot{x}^{\alpha}$, δa^{α}, δb^{α} суть /45/, а потому на мировой траектории частицы и на мировой поверхности

$$\delta x^{\alpha} = \lambda^{\alpha}, \quad \delta \dot{x}^{\alpha} = \frac{d\lambda^{\alpha}}{d\tau}, \quad \delta a^{\alpha} = \frac{\partial \lambda^{\alpha}}{\partial u}, \quad \delta b^{\alpha} = \frac{\partial \lambda^{\alpha}}{\partial v}.$$

Таким образом, при условиях /44/ имеем

$$-\lambda^{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}_n}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial \mathcal{L}_n}{\partial \dot{x}^{\alpha}} \frac{d\lambda^{\alpha}}{d\tau},$$

$$-\lambda^{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial a^{\alpha}} \frac{\partial \lambda^{\alpha}}{\partial u} + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial b^{\alpha}} \frac{\partial \lambda^{\alpha}}{\partial v}.$$

Воспользовавшись этим, умножим скалярно обе части уравнений /19/ на векторное поле λ^α В результате получим

$$0)\quad \frac{\partial}{\partial u}(\lambda^\alpha \frac{\partial \mathfrak{L}_0}{\partial a^\alpha}) + \frac{\partial}{\partial u}(\lambda^\alpha \frac{\partial \mathfrak{L}_0}{\partial b^\alpha}) = 0 ,$$

$$1)\quad \frac{d}{d\tau_1}(\lambda^\alpha \frac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial \dot{x}^\alpha}) = \lambda^\alpha P_\alpha (\frac{du}{d\tau_1}, \frac{dv}{d\tau_1}) ,$$

$$2)\quad \frac{d}{d\tau_2}(\lambda^\alpha \frac{\partial \mathfrak{L}_2}{\partial \dot{x}^\alpha}) = -\lambda^\alpha P_\alpha (\frac{du}{d\tau_2}, \frac{dv}{d\tau_2}) . \qquad /48/$$

Из полученного уравнения 0/ следует, что скалярное произведение канонического импульса /22/ на векторное поле λ^α является полным дифференциалом некоторой функции $\Psi = \Psi(u,v)$:

$$\lambda^\alpha P_\alpha (du, dv) = d\Psi . \qquad /49/$$

Значит, величина /46/ равна

$$\mathfrak{M} = \lambda^\alpha P_{1,\alpha}(A) + \lambda^\alpha P_{2,\alpha} + \Psi(B) - \Psi(A) . \qquad /50/$$

Ввиду /49/ заключаем также, что в системе /48/ уравнения 1/ и 2/ по одному разу интегрируются:

$$\begin{aligned} &1)\quad \lambda^\alpha P_{1,\alpha}(A) = \Psi(A) + C_1 , \\ &2)\quad \lambda^\alpha P_{2,\alpha}(B) = -\Psi(B) + C_2 . \end{aligned} \qquad /51/$$

Здесь C_1 и C_2 - константы интегрирования. Подставляя /51/ в /50/, получаем

$$\mathfrak{M} = C_1 + C_2 . \qquad /52/$$

Таким образом, снова приходим к тому, что величина /46/ сохраняется. Наличие двух констант интегрирования вместо одной константы $\mathfrak{M}$ объясняется тем, что

функция Ψ определена как раз с точностью до аддитивной постоянной.

5. *НЕЗАВИСИМОСТЬ ФУНКЦИИ ДЕЙСТВИЯ ОТ ВЫБОРА ПАРАМЕТРОВ*

Понятно, что функция действия /8/ должна не зависеть от выбора параметров τ_1, τ_2, u, v. Но для этого мало исключить непосредственную от них зависимость функций /5/ и /6/, что мы уже сделали с самого начала. Нужно еще считать, что функции /5/ и /6/ удовлетворяют следующим условиям однородности. При умножении всех производных $\dot{x}^\alpha$ на одно и то же произвольно взятое число m должно выполняться равенство

$$\mathfrak{L}_n(x, m\dot{x}) = |m|\, \mathfrak{L}_n(x, \dot{x}) . \qquad /53/$$

Что касается функции /6/, то при замене a^α, b^α на $a'^\alpha = pa^\alpha + qb^\alpha$, $b'^\alpha = ra^\alpha + sb^\alpha$, где p, q, r, s - произвольно взятые числа, должно выполняться равенство

$$\mathfrak{L}_0(x, a', b') = |ps - qr|\, \mathfrak{L}_0(x, a, b) . \qquad /54/$$

В таком случае при замене параметра τ на $\tau' = f(\tau)$ получаем

$$\mathfrak{L}_n(x, \frac{dx}{d\tau}) = \mathfrak{L}_n(x, \frac{dx}{d\tau'}) \left|\frac{d\tau'}{d\tau}\right| , \qquad /55/$$

а при замене параметров u, v на $u' = f(u,v)$, $v' = g(u,v)$ получаем

$$\mathfrak{L}_0(x, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}) = \mathfrak{L}_0(x, \frac{\partial x}{\partial u'}, \frac{\partial x}{\partial v'}) \left|\frac{\partial(u', v')}{\partial(u, v)}\right| . \qquad /56/$$

Дифференцируя равенство /53/ по m при $m = 1$, находим, что обе функции /5/ удовлетворяют уравнению Эйлера

$$\dot x^{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot x^{\alpha}} = \mathcal{L} . \qquad /57/$$

Аналогично, дифференцируя равенство /54/ по p, q, r, s при $p = 1$, $q = 0$, $r = 0$, $s = 1$, находим, что функция /6/ удовлетворяет следующей системе уравнений

$$\begin{aligned} a^{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a^{\alpha}} &= \mathcal{L} , & b^{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a^{\alpha}} &= 0 , \\ a^{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b^{\alpha}} &= 0 , & b^{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b^{\alpha}} &= \mathcal{L} . \end{aligned} \qquad /58/$$

Уравнение Эйлера /57/ означает, что скалярное произведение ковектора $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot x}$ на вектор $\dot x$ равно $\mathcal{L}$. Аналогично читаются обобщенные* уравнения Эйлера /58/. Интересно и другое толкование уравнений Эйлера: параметрический тензор энергии-импульса равен нулю.

Далее, если функция $\mathcal{L}(x, \dot x)$ удовлетворяет уравнению /57/, то скалярное произведение /35/ равно нулю, т.е. в этом случае ковектор /33/ ортогонален к вектору $\dot x$. Точно так, если функция $\mathcal{L}(x, a, b)$ удовлетворяет уравнениям /58/, то скалярные произведения /36/ равны нулю, т.е. в этом случае ковектор /34/ ортогонален к векторам a, b. Значит, в системе /19/ уравнения O/ дважды зависимы. Что касается остальных уравнений, то в каждой группе 1/ и 2/ имеется по одной зависимости. Действительно, как мы видели, в уравнениях /23/ левая часть ортогональна к вектору $\dot x$, если выполняются условия /57/. Но и правая часть,

*Условие однородности очевидным образом формулируется для общего случая K-мерной поверхности в $(N+1)$-мерном мире.

представленная ковектором /24/, ортогональна к вектору /37/, в чем нетрудно убедиться. Действительно, согласно /58/

$$a^{\alpha} f_{\alpha} = \mathcal{L}_0 \frac{dv}{d\tau} , \qquad b^{\alpha} f_{\alpha} = -\mathcal{L}_0 \frac{du}{d\tau} , \qquad /59/$$

а значит, $\dot x^{\alpha} f_{\alpha} = 0$.

На основании /59/, /40/ и /41/ из уравнений /23/ получаем два следствия, а именно:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \frac{\partial K}{\partial \dot u} - \frac{\partial K}{\partial u} &= \mathcal{L}_0 \frac{dv}{d\tau} , \\ \frac{d}{d\tau} \frac{\partial K}{\partial \dot v} - \frac{\partial K}{\partial v} &= - \mathcal{L}_0 \frac{du}{d\tau} . \end{aligned} \qquad /60/$$

Отметим, что уравнения /60/ зависимы: умножая первое на $\dot u$, второе - на $\dot v$ и складывая, получаем в результате нуль и слева, и справа.

Функции /5/ и /6/, удовлетворяющие условиям однородности /53/ и /54/, допускают следующее, восходящее к Риману [16], геометрическое истолкование: $\mathcal{L}_n(x, \dot x)$ определяет длину вектора $\dot x$, а $\mathcal{L}_0(x, a, b)$ - площадь параллелограмма со сторонами a и b. Таким образом, условия однородности приводят нас к общей теории минимальных поверхностей [17].

6. ОБЩИЙ ВИД ОДНОРОДНЫХ ФУНКЦИЙ

Функцию $\mathcal{L}_n(x, \dot x)$ удовлетворяющую условию /53/, можно представить в виде

$$\mathcal{L}_n(x, \dot x) = |\dot x^0| \, L_n\left(x; \frac{\dot x^1}{\dot x^0}, \dots, \frac{\dot x^N}{\dot x^0}\right) , \qquad /61/$$

где L_n - произвольная функция от x и от N аргументов $\xi^k = \dot x^k / \dot x^0$, $k = 1, \dots, N$. Для доказательства надо положить $m = 1 / \dot x^0$.

Точно так и функцию $\mathcal{L}_0(x,a,b)$, удовлетворяющую условию /54/, можно представить в виде

$$\mathcal{L}_0(x,a,b) = |J^{10}|\, F\left(x;\ \frac{J^{20}}{J^{10}},\dots,\frac{J^{N0}}{J^{10}};\ \frac{J^{12}}{J^{10}},\dots,\frac{J^{1N}}{J^{10}}\right), \qquad /62/$$

где $J^{\alpha\beta}$ суть комбинации

$$J^{\alpha\beta} = a^{\alpha} b^{\beta} - b^{\alpha} a^{\beta}, \qquad /63/$$

а F - произвольная функция от x и от $2(N-1)$ аргументов $\eta^s = J^{s0}/J^{10}$, $\zeta^s = J^{1s}/J^{10}$, $s = 2,\dots,N$. Для доказательства надо положить

$$p = \frac{b^0}{J^{10}}, \quad q = -\frac{a^0}{J^{10}}, \quad r = -\frac{b^1}{J^{10}}, \quad s = \frac{a^1}{J^{10}}.$$

Поскольку бивектор /63/ простой, то

$$J^{\alpha\beta} J^{\gamma\delta} + J^{\gamma\beta} J^{\delta\alpha} + J^{\delta\beta} J^{\alpha\gamma} = 0. \qquad /64/$$

Полагая здесь $\alpha = 0$, $\beta = 1$, видим, что всякая положительно однородная первой степени функция $\mathcal{F}(x,J)$ от совокупности $J = \{J^{\alpha\beta}\}$ аргументов /63/ приводится к виду /62/. Следовательно, всегда

$$\mathcal{L}_0(x,a,b) = \mathcal{F}(x,J). \qquad /65/$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пуанкаре А. О динамике электрона. В сб.: "Принцип относительности". Атомиздат, М., 1973, с.90,118.*
2. *Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. ГИТТЛ, М., 1958, §§57,58.*
3. *Барбашов Б.М., Черников Н.А. ОИЯИ, Р-2151, Дубна, 1965.*
4. *Барбашов Б.М., Черников Н.А. ЖЭТФ, 1966, 50, вып. 5, с.1296-1308.*

5. *Барбашов Б.М., Черников Н.А. ЖЭТФ, 1966, 51, вып. 8, с.658-668.*
6. *Барбашов Б.М., Черников Н.А. Commun. Math.Phys., 1966, v.3, p.313.*
7. *Барбашов Б.М., Черников Н.А. Взаимодействие двух плоских волн в электродинамике Борна-Инфельда. В сб.: "Труды Международной школы по теоретической физике", "Наукова думка", Киев, 1967.*
8. *Барбашов Б.М., Черников Н.А. ОИЯИ, Р2-7832, Дубна, 1974.*
9. *Chodos A., Thorn C.B. Nucl.Phys., 1974, B72, p.509.*
10. *Rabbi C. Phys.Rep., C, 1974, v.12, p.3.*
11. *Шелест В.П., Зиновьев Б.М., Миранский В.А. Модели сильно взаимодействующих элементарных частиц. Атомиздат, М., 1976, т.2.*
12. *Черников Н.А., Шавохина Н.С. ОИЯИ, Р2-10375, Дубна, 1977.*
13. *Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. "Мир", М., 1977.*
14. *Аппель П. Теоретическая механика. Физматгиз, М., 1960, с.400.*
15. *Нетер Э. Инвариантные вариационные задачи. В сб.: "Вариационные принципы механики". Физматгиз, М., 1959.*
16. *Риман Б. О гипотезах, лежащих в основании геометрии, В сб.: "Об основаниях геометрии". ГИТТЛ., М., 1956.*
17. *Кабанов Н.И. Дифференциально-геометрические методы в вариационном исчислении. В сб.: "Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1968". ВИНИТИ, М., 1970.*

Рукопись поступила в издательский отдел
31 января 1978 года.