СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P2 - 11250

А.Г.Бонч-Осмоловский, М.И.Подгорецкий

О РАДИАЦИОННОМ ТОРМОЖЕНИИ ЧАСТИЦ, КАНАЛИРУЮЩИХ В КРИСТАЛЛАХ

1978

P2 - 11250

А.Г.Бонч-Осмоловский, М.И.Подгорецкий

О РАДИАЦИОННОМ ТОРМОЖЕНИИ ЧАСТИЦ, КАНАЛИРУЮЩИХ В КРИСТАЛЛАХ

Бонч-Осмоловский А.Г., Подгорецкий М.И. P2 - 11250

О радиационном торможении частиц, каналирующих в кристаллах

Проведено совместное рассмотрение движения и излучения заряженных релятивистских частиц при их каналировании в кристаллах. Показано, что при достаточно большой начальной энергии частиц затухание поперечных колебаний происходит по закону, заметно отличающемуся от экспоненциального. В этом случае после полного затухания поперечных колебаний конечная энергия частиц зависит от их начальной энергии ($E_К \sim E_Н^{1/3}$), а мощность и спектральный состав излучения меняются по мере прохождения частиц через кристалл.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Bonch-Osmolovsky A.G., Podgoretsky M.I. P2 - 11250

On Radiation Stopping of Particles Channeled in Crystals

The motion and the radiation of charged relativistic particles channeled in a crystal are jointly considered.

It is shown that if the initial energy of the particles is sufficiently high, the damping of transverse oscillations of the particles appreciably differs from the exponential one. In this case the final energy of the particles (after the damping of transverse oscillations) depends on an initial energy ($E_K \sim E_H^{1/3}$) and the intensity and the spectral distribution of radiation are changed as the particles pass the crystal.

The investigation has been performed at the Laboratory of High Energy, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

Каналирование в кристаллах легких заряженных частиц сопровождается, как известно, специфическим излучением, сходным с ондуляторным, но имеющим и ряд существенных отличий от последнего [1-10]. Поскольку излучение вызывается поперечными колебаниями каналирующих частиц, оно приводит не только к торможению продольного движения, но также и к радиационному затуханию указанных колебаний. Хотя оба эти явления тесно связаны друг с другом, они проанализированы пока что только порознь; цель настоящей статьи состоит в их совместном рассмотрении. При этом, в частности, будут выяснены условия, при которых затухание поперечных колебаний происходит без существенного изменения полной энергии каналирующих частиц.

Движение частиц, равно как и создаваемое ими излучение, будут рассматриваться в классическом приближении, которое представляется достаточным для качественного описания явлений, связанных с каналированием. В основном мы будем интересоваться плоскостным каналированием ультрарелятивистских позитронов, хотя аналогичный подход вполне применим и к электронам, движущимся внутри "трубок" или "слоев", образованных тепловыми колебаниями ядер кристалла [9,10,11].

Взаимодействие позитрона с решеткой будем описывать усредненным потенциалом

$$V = \frac{1}{2} k x^2 , \qquad (1)$$

где x – отклонение от положения равновесия в направлении, перпендикулярном к плоскостям, между которыми происходит каналирование, а коэффициент k определяется параметрами и структурой кристалла. При достаточно малом порядковом номере ядер Z выражение (1) не очень сильно отличается от реального усредненного потенциала [12]. Во всяком случае, его можно считать пригодным для выяснения интересующих нас качественных характеристик.

В дальнейшем мы воспользуемся известными явными выражениями для интенсивности излучения и силы радиационного торможения (см., например, [13]). В случае, когда присутствует одно лишь поперечное электростатическое поле, они, с учетом (1), приводят к двум уравнениям, полностью определяющим движение каналирующей частицы:

$$m\frac{d}{dt}(\gamma\dot{x}) = -kx - \frac{2ke^2\gamma\dot{x}}{3mc^3} + \frac{2k^2e^2x^2\dot{x}}{3m^2c^5} - \qquad (2)$$

$$-\frac{2k^2e^2\gamma^2x^2\dot{x}}{3m^2c^5}\left(1-\frac{\dot{x}^2}{c^2}\right) \equiv -kx + f_p^x,$$

$$mc^2\frac{d\gamma}{dt} = -kx\dot{x} - \frac{2k^2e^2\gamma^2x^2}{3m^2c^3}\,\frac{\dot{z}^2}{c^2}\left(1-\frac{\dot{x}^2}{c^2}\right) + \dot{x}f_p^x. \qquad (3)$$

Здесь e и m – заряд и масса позитрона, c – скорость света, $\gamma = \left(1-\frac{\dot{x}^2+\dot{z}^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ – лоренц-фактор, ось z предполагается направленной вдоль продольной скорости частицы.

Подставляя в (2) величину $\frac{d\gamma}{dt}$, выраженную с помощью (3), получим уравнение

$$m\gamma\ddot{x} + kx(1-\dot{x}^2/c^2) + \frac{2ke^2\gamma\dot{x}}{3mc^3}\left(1-\frac{\dot{x}^2}{c^2}\right) = 0. \qquad (4)$$

Нас будет интересовать случай сравнительно слабого затухания, когда с хорошей точностью поперечное движение частицы описывается гармоническим законом

$$x = A\cdot\cos(\omega t+\delta), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m\gamma}}. \qquad (5)$$

При этом почти сохраняется полная поперечная энергия, равная $\frac{1}{2}mc^2\gamma\frac{\dot{x}^2}{c^2} + V(x)$. Следовательно, $\frac{\dot{x}^2_{\text{макс}}}{c^2} \simeq \frac{kx^2_{\text{макс}}}{mc^2\gamma}$, а эта величина много меньше единицы при любых реальных значениях параметра k. Поэтому (4) переходит в

$$\ddot{x} + \frac{2ke^2}{3m^2c^3}\dot{x} + \frac{k}{m\gamma}x = 0. \qquad (6)$$

В этих же условиях уравнение (3) принимает вид

$$\dot{\gamma} = -\frac{2k^2e^2\gamma^2x^2}{3m^3c^5}, \qquad (7)$$

поскольку знакопеременным осциллирующим членом $kx\dot{x}$ (а также членом $\dot{x}f_p^x$) можно пренебречь по сравнению со знакопостоянным членом $\frac{2k^2e^2\gamma^2x^2}{3m^2c^3}$*.

Итак, задача сводится к совместному решению уравнений (6) и (7). Решение (6) будем искать в виде

$$x = e^{-\frac{1}{2}\epsilon t}f(t), \quad \epsilon = \frac{2ke^2}{3m^2c^3}. \qquad (8)$$

---

*Можно показать, что после усреднения по периоду колебаний отношение этих членов по порядку величины равно $1/\gamma^2 \ll 1$; даже без усреднения отношение их мгновенных значений составляет примерно $(mc^2/kr_e^2\gamma^5)^{1/2}$, где $r_e = e^2/mc^2$ – электромагнитный радиус электрона. В интересующей нас области энергий (когда $\gamma > 10^3$) эта величина также очень мала по сравнению с единицей.

Подставляя (8) в (6), приходим к уравнению

$$\ddot{f} + \left(\frac{k}{m\gamma} - \frac{\epsilon^2}{4}\right) f = 0. \qquad (9)$$

В уравнении (7) удобно произвести замену

$$\phi(t) = 1/\gamma(t), \qquad (10)$$

после которой оно переходит в

$$\dot{\phi} = \frac{2k^2e^2}{3m^3c^5} e^{-\epsilon t} f^2(t). \qquad (11)$$

Как уже упоминалось, в реальных условиях амплитуда колебаний затухает медленно, т.е.

$$\frac{\epsilon^2}{4} << \frac{k\phi}{m}. \qquad (12)$$

Предположим еще, что относительное изменение энергии в течение одного периода также мало, т.е. выполнено условие адиабатического приближения

$$\frac{\dot{\phi}}{\phi}\sqrt{\frac{m}{k\phi}} << 1.^{*} \qquad (13)$$

Тогда (9) переходит в уравнение

$$\ddot{f} + \frac{k\phi}{m} f = 0,$$

т.е. в уравнение осциллятора с медленно изменяющейся частотой, имеющее адиабатический инвариант

$$I = \omega A^2 = \sqrt{\frac{k\phi(t)}{m}} \cdot A^2(t). \qquad (14)$$

Здесь $A(t)$ – амплитуда колебаний функции $f(t)$. Опираясь на (14), решение уравнения (9′) можно записать в виде

$$f(t) = A_0 \left(\frac{\phi_0}{\phi}\right)^{1/4} \cos\left(\int_0^t \sqrt{\frac{k\phi}{m}}\, dt + \delta_0\right), \qquad (15)$$

где величины $A_0, \phi_0 = 1/\gamma_0$ и δ_0 определяются начальными условиями, имеющими место при влете позитрона в кристалл.

С учетом (15) уравнение (11) приобретает форму

$$\dot{\phi} = \frac{2k^2e^2A_0^2}{3m^3c^5} e^{-\epsilon t} \left(\frac{\phi_0}{\phi}\right)^{1/2} \cos^2\left(\int_0^t \sqrt{\frac{k\phi}{m}}\, dt + \delta_0\right). \qquad (16)$$

Пользуясь условиями (12) и (13), знакопостоянный и быстро изменяющийся множитель $\cos^2\left(\int_0^t \sqrt{\frac{k\phi}{m}}\, dt + \delta_0\right)$ можно усреднить по периоду колебаний. Это дает

$$\dot{\bar{\phi}} = \frac{2}{3}\epsilon p e^{-\epsilon t}\left(\frac{\phi_0}{\phi}\right)^{1/2}, \quad p = \frac{3kA_0^2}{4mc^2}. \qquad (17)$$

Решение имеет вид

$$\bar{\phi} = \phi_0 \left\{1 + \frac{p}{\phi_0}\left(1 - e^{-\epsilon t}\right)\right\}^{2/3}. \qquad (18)$$

---

* Условие (13) можно записать в виде $\gamma^{3/2} << \left(\frac{mc^2}{kr_e^2}\right)^{1/2} \frac{mc^2}{kx^2}$; для реальных кристаллов оно выполняется при $\gamma << 10^6 \div 10^7$. Условие (12) имеет вид $\gamma << \frac{mc^2}{kr_e^2}$; оно всегда выполнено, если выполнено (13).

Фактически нас интересует не мгновенное значение ϕ, а именно усредненная величина $\bar{\phi}$; кроме того, легко показать, что при слабом затухании относительное отклонение ϕ от $\bar{\phi}$ очень мало, а именно,

$$\frac{|\phi-\bar{\phi}|}{\bar{\phi}} \simeq \frac{kA_0^2}{\gamma mc^2} \ll 1 . \qquad (19)$$

Поэтому (18) означает также

$$\phi = \phi_0 \{1 + \frac{p}{\phi_0}(1-e^{-\epsilon t})\}^{2/3} . \qquad (18)$$

Для лоренц-фактора γ отсюда следует

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{\{1 + p\gamma_0 (1-e^{-\epsilon t})\}^{2/3}} . \qquad (20)$$

Подставляя (18) в (15), получим также окончательное выражение для поперечного смещения частицы:

$$x = A_0[1+p\gamma_0(1-e^{-\epsilon t})]^{-1/6} e^{-\frac{1}{2}\epsilon t} \cos\{\int_0^t \sqrt{\frac{k}{m\gamma_0}[1+p\gamma_0(1-e^{-\epsilon t})]^{2/3}}\, dt + \delta_0\}.$$

Из (21) следует, что поперечные колебания затухают, вообще говоря, неэкспоненциально. Точнее, при малых временах, когда $t < \frac{1}{\epsilon p \gamma_0}$, закон затухания экспоненциален, при $t \sim 1/\epsilon$ экспоненциальность нарушается, и, наконец, при $t > \frac{1}{\epsilon}$ снова возникает экспоненциальный режим, но на другом амплитудном уровне. Имеет, следовательно, место своеобразный скачок амплитуды (сопровождаемый также скачком частоты колебаний и частоты излучения), тем больший, чем больше величина $p\gamma_0$. Скачок становится заметным только при $p\gamma_0 \gg 1$, т.е. при

$$\gamma_0 \gg \frac{1}{p} \simeq \tilde{\gamma} = \frac{mc^2}{kA_0^2} \; * . \qquad (22)$$

Даже в этих условиях скачок сравнительно мал, он равен примерно $(\gamma_0/\tilde{\gamma})^{1/6}$. При каналировании позитронов в кремнии между плоскостями (110) величина $\tilde{\gamma} \simeq 4{,}0 \cdot 10^4$. Поэтому условие (22) выполняется при довольно высоких энергиях, достижимых только на самых больших ускорителях.

После затухания поперечных колебаний прекращается также потеря полной энергии каналирующей частицы. Из (20) следует, что конечная энергия

$$\gamma_\infty = \frac{\gamma_0}{(1+p\gamma_0)^{2/3}} , \qquad (23)$$

а относительная потеря энергии

$$(\Delta\gamma/\gamma_0)_{t\to\infty} = 1 - \frac{1}{(1+p\gamma_0)^{2/3}} \qquad (24)$$

Начальная амплитуда A_0 зависит от места и угла влета каналирующей частицы в кристалл. Положим для определенности $A_0 \sim d/3$, где d – постоянная решетки. Тогда в (22) входит величина

$$\tilde{\gamma} \simeq \frac{10 mc^2}{kd^2} . \qquad (22')$$

При $\gamma_0 \ll \tilde{\gamma}$ из (24) следует

$$\Delta\gamma/\gamma_0 \simeq \gamma_0/\tilde{\gamma} . \qquad (25)$$

Таким образом, относительные потери энергии очень

---

* Легко убедиться, что при $\gamma \approx \tilde{\gamma}$ в системе координат, движущейся со скоростью, совпадающей со средней продольной скоростью частицы, поперечное движение частицы является релятивистским /11/.

малы; в этом случае можно говорить о "радиационном охлаждении" каналирующих позитронов, не сопровождаемом заметными потерями энергии. Наоборот, при $\gamma_0 \gg \tilde{\gamma}$ потери велики:

$$\Delta\gamma/\gamma_0 \simeq 1-(\frac{4}{3}\tilde{\gamma}/\gamma_0)^{2/3}. \qquad (25')$$

При этом

$$\gamma_\infty \simeq \gamma_0^{1/3}/\tilde{\gamma}^{2/3}, \qquad (23')$$

т.е. конечная энергия растет вместе с начальной.

Этот последний результат противоречит общему положению (приведенному в §76 книги [13] со ссылкой на [14]), согласно которому при достаточно большой начальной энергии заряженной релятивистской частицы ее конечная энергия после прохождения области пространства с заданным электромагнитным полем перестает зависеть от начальной энергии. При доказательстве этого утверждения молчаливо предполагается, что наличие излучения практически не изменяет траекторию частицы: вариации траектории должны быть настолько малыми, чтобы можно было пренебречь относительными изменениями электрического и магнитного полей во всех соответственных точках рассматриваемых траекторий. Однако именно это условие полностью нарушается в задаче о каналировании, поскольку вдоль равновесной траектории, вокруг которой происходят поперечные колебания, электрическое поле равно нулю и любые отклонения от равновесной траектории приводят к радикальному изменению действующих на частицу полей и, следовательно, к столь же радикальному изменению радиационных потерь. Заметим, что к конкретной задаче, рассмотренной в исходной работе [14], указанные критические замечания не относятся.

Проиллюстрируем полученные результаты на конкретном примере каналирования между плоскостями (110) кремния. В этом случае потенциал неплохо аппроксимируется параболой со значением $k \simeq 4\cdot10^{17}$ эВ/см^2 (см. [12], стр. 138), а расстояние между смежными плоскостями $d \simeq 1{,}9.10^{-8}$ см. Тогда $\tilde{\gamma} \simeq 4\cdot10^4$, а условие $\gamma^{3/2} < (\frac{mc^2}{kr_e^2})^{1/2}\tilde{\gamma}$ дает $\gamma < 2{,}5.10^7$. Величина ϵ, определяющая затухание поперечных колебаний, оказывается равной примерно 5.10^9 с$^{-1}$, длина, на которой происходит существенное затухание колебаний, $\Lambda \simeq \frac{c}{\epsilon} \simeq 6$ мм.

Изложенные выше соображения относятся не только к позитронам, но также и к электронам, каналирующим внутри "слоев" и "трубок", образованных тепловыми колебаниями ядер решетки [9,10,11]. При движении внутри "слоев" следует всюду считать

$$k \simeq \frac{2\pi Ze^2}{Rd^2}, \quad A_0 \simeq R, \qquad (26)$$

где R – амплитуда тепловых колебаний. Тогда

$$\tilde{\gamma} \simeq \frac{mc^2 d^2}{2\pi Ze^2 R}, \quad \epsilon \simeq \frac{2}{3\tilde{\gamma}}\cdot\frac{cr_e}{R^2}, \quad \Lambda \simeq \frac{3\tilde{\gamma}}{2}\cdot\frac{R}{r_e}\cdot R.$$

Для рассмотренного в [11] случая свинца это дает $\tilde{\gamma} \simeq 4.10^3$, $\epsilon \simeq 2{,}5.10^{11}$ с$^{-1}$, $\Lambda \simeq 1$ мм, а неравенство

$$\gamma^{3/2} < (\frac{mc^2}{kr_e^2})^{1/2}\frac{mc^2}{kR^2},$$

определяющее верхнюю границу области применимости рассматриваемого подхода, принимает вид

$$\gamma < 1{,}6\cdot10^6.$$

Двигаясь внутри "слоя", электрон может испытать т.н. "катастрофическое" кулоновское рассеяние, нарушающее режим каналирования [11]. Соответствующий средний пробег

$$\ell \simeq \frac{4mc^2R^2\gamma}{Ze^2}. \qquad (27)$$

Поэтому полное затухание поперечных колебаний возможно только при условии $\ell > \Lambda$, которое можно записать также в виде

$$\gamma > \frac{3Z}{8}\tilde{\gamma}\,. \qquad (28)$$

Для свинца (28) дает $\gamma > 30\tilde{\gamma} \simeq 10^5$.

Движение электронов внутри "трубок" /9,10/ сопровождается двумерными поперечными колебаниями, причем потенциал V обладает осевой симметрией. Если полагать

$$V = \frac{1}{2}k(x^2+y^2),$$

где x и y – ортогональные поперечные координаты, то все проведенные выше рассуждения почти что не изменяются. В результате вместо (21) получаем два равенства:

$$x = A_0[1+p\gamma_0(1-e^{-\epsilon t})]^{-1/6} e^{-\frac{1}{2}\epsilon t}\cos\{\int_0^t\sqrt{\frac{k}{m\gamma_0}[1+p\gamma_0(1-e^{-\epsilon t})]^{2/3}}\,dt + \delta_0\},$$

$$y = B_0[1+p\gamma_0(1-e^{-\epsilon t})]^{-1/6} e^{-\frac{1}{2}\epsilon t}\cos\{\int_0^t\sqrt{\frac{k}{m\gamma_0}[1+p\gamma_0(1-e^{-\epsilon t})]^{2/3}}\,dt + \mu_0\}, \qquad (29)$$

в которых A_0, B_0, δ_0, μ_0, γ_0 определяются начальными условиями; формула (20) не изменяется, величина ϵ имеет прежнее значение, в то время как

$$p = \frac{3k(A_0^2+B_0^2)}{4mc^2}. \qquad (17')$$

В конкретных условиях каналирования внутри "трубки" следует также положить

$$A_0 \sim R, \quad B_0 \sim R, \quad k = \frac{2Ze^2}{dR^2}.$$

Подводя итоги совместного рассмотрения движения каналирующих частиц и их электромагнитного излучения, отметим, что при достаточно сильном релятивизме излучение оказывает значительное влияние на характер движения, а это, в свою очередь, приводит к очень быстрому изменению характеристик излучения (его мощности и спектрального состава).

Авторы благодарны В.Г.Барышевскому за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vorobiev A.A. e.a. Nucl. Instr. and Meth., 1975, 127, p.265.
2. Кумахов М.А. ДАН СССР, 1976, 230, 1077.
3. Барышевский В.Г., Дубовская И.Я. ДАН СССР, 1976, 231, 1335.
4. Барышевский В.Г., Дубовская И.Я. Письма ЖТФ, 1977, 3, 500.
5. Baryshevsky V.G., Dubovskaya I.Ya. Phys.Lett., 1977,62A, p.45.
6. Baryshevsky V.G., Dubovskaya I.Ya. Phys. stat. sol., 1977, 82, p.403.
7. Кумахов М.А. ЖЭТФ, 1977, 72, 1489.
8. Базылев В.А., Живаго Н.К. ЖЭТФ, 1977, 73, 1967.
9. Подгорецкий М.И. ОИЯИ Р2-10986, Дубна, 1977.
10. Подгорецкий М.И. ОИЯИ Р2-11140, Дубна, 1977.
11. Подгорецкий М.И. ОИЯИ Р2-10739, Дубна, 1977.
12. Gemmel D.S. Rev.Mod.Phys., 1974, 46, p.129.
13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. Изд. "Наука", Москва, 1973.
14. Померанчук И.Я. ЖЭТФ, 1939, 9, 915; Собрание научных трудов, т.II, 40, изд. "Наука", Москва, 1972.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 января 1978 года.