С133.2
К-299

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

15/V-78

2093/2-78

Р2 - 11249

Ю.В.Катышев

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КЛАССИЧЕСКИХ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ МОДЕЛИ ϕ^3 /ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ И ЗАРЯЖЕННЫЕ ПОЛЯ/

1978

P2 - 11249

Ю.В.Катышев

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КЛАССИЧЕСКИХ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ МОДЕЛИ ϕ^3 /ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ И ЗАРЯЖЕННЫЕ ПОЛЯ/

БИБЛИОТЕКА

Катышев Ю.В. P2 - 11249

Неустойчивость классических солитонных решений модели ϕ^3 (действительные и заряженные поля)

Аналитически исследована устойчивость в продольном и поперечном направлениях плоских солитонов уравнения Клейна-Гордона с квадратичной нелинейностью. Лишь Q - солитон обладает некоторой областью устойчивости.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Katyshev Yu.V. P2 - 11249

Instability of Classical Soliton Solutions in the ϕ^3 Model (Real and Charged Fields)

Stability in longitudinal and transverse directions of plane solitons of the Klein-Gordon equation with squared nonlinearity is analytically studied. Only the Q-soliton has some stability region.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

© 1978 Объединенный институт ядерных исследований Дубна

В наших работах /1-3/ было проведено аналитическое исследование устойчивости [x)] точных солитонных решений ряда нелинейных волновых уравнений, допускающих лагранжеву формулировку. Была изучена продольная [xx)] и поперечная [xxx)] устойчивость плоских солитонов как нерелятивистских, так и релятивистски инвариантных уравнений для возмущений довольно общего вида. Исследование проводилось с помощью варьирования отинтегрированного по продольной координате x лагранжиана вблизи известного плоского солитонного решения.

Используя этот же метод, исследуем поперечную и продольную устойчивость плоского солитонного решения модели φ^3 классической теории поля [xxxx)]. Эта модель описывается релятивистски-инвариантным уравнением Клейна-Гордона с квадратичной нелинейностью

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + m^2\varphi - \lambda\varphi^2 = 0 \qquad (1)$$

(m - масса скалярного вещественного поля φ, λ - положительная константа), которое может быть получено варьированием действия $S = \int \mathcal{L}_1 \, dx\, dt$ с плотностью лагранжиана

---

x) В рамках линейного приближения.

xx) Устойчивость вдоль продольной координаты X, в направлении которой образовано локализованное решение.

xxx) Под поперечной устойчивостью понимается устойчивость солитонов в направлении, перпендикулярном направлению их распространения.

xxxx) Квантовые аспекты этой модели рассматривались, например, в книге Н.Н.Боголюбова и Д.В.Ширкова /4/.

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2}\left(\varphi_t^2 - \varphi_x^2 - m^2\varphi^2 + \frac{2}{3}\lambda\varphi^3\right).$$

Уравнение (I) имеет точное солитонное решение колоколообразной формы

$$\varphi_s = \frac{3}{2}\,\frac{m^2}{\lambda}\,\mathrm{sch}^2\,\frac{m(x-vt)}{2\sqrt{1-v^2}}\,, \qquad (2)$$

где v – скорость движения солитона в единицах скорости света С. В силу релятивистской инвариантности уравнения (I) достаточно исследовать устойчивость неподвижных ($v=0$) солитонов

$$\varphi_s^{(v=0)} = \frac{3}{2}\,\frac{m^2}{\lambda}\,\mathrm{sch}^2\,\frac{mx}{2}\,. \qquad (3)$$

Будем варьировать действие с лагранжианом

$$L_2 = \frac{1}{2}\int dx\,dy\,\left(\varphi_t^2 - \varphi_x^2 - \varphi_y^2 - m^2\varphi^2 + \frac{2}{3}\lambda\varphi^3\right),$$

причем в качестве пробной возьмем функцию

$$\varphi = A(y,t)\,\mathrm{sch}^2\,[B(y,t)\,x]\,,$$

где А и В – функции поперечной координаты y и времени t. Тогда отинтегрированный по Х от $-\infty$ до ∞ лагранжиан L_2 равен

$$\tilde{L}_2 = \frac{1}{2}\int dy\left[\frac{A_t^2 - A_y^2 - m^2A^2}{B} + \frac{A}{B^2}\left(A_yB_y - A_tB_t\right) + \frac{2}{3}\,\frac{A^2}{B^3}\left(B_t^2 - B_y^2\right) - \frac{4}{5}A^2B + \frac{8}{15}\lambda\frac{A^3}{B}\right],$$

в силу того, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{ch}^{-4}\xi\,d\xi = \frac{4}{3}\,, \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi\,\mathrm{sh}\,\xi\,d\xi}{\mathrm{ch}^5\xi} = \frac{1}{3}\,,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi^2\,\mathrm{sh}^2\xi\,d\xi}{\mathrm{ch}^6\xi} = \frac{\pi^2}{45} \approx \frac{2}{9}\,, \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}^2\xi}{\mathrm{ch}^6\xi}\,d\xi = \frac{4}{15}\,,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{ch}^{-6}\xi\,d\xi = \frac{16}{15}\,.$$

Соответствующие уравнения движения (уравнения Эйлера-Лагранжа) приобретают вид:

$$-2\frac{m^2A}{B} - \frac{8}{5}AB + \frac{8}{5}\lambda\frac{A^2}{B} + 2\frac{A_{yy}}{B} - \frac{A\,B_{yy}}{B^2} - 2\frac{A_{tt}}{B} - \frac{A\,B_{tt}}{B^2} = 0\,,$$

$$\frac{m^2A^2}{B^2} - \frac{4}{5}A^2 - \frac{8}{15}\lambda\frac{A^3}{B^2} - \frac{A\,A_{yy}}{B^2} + \frac{4}{3}\,\frac{A^2B_{yy}}{B^3} + \frac{A\,A_{tt}}{B^2} - \frac{4}{3}\,\frac{A^2B_{tt}}{B^3} = 0\,.$$

Полагая

$$A = \frac{3}{2}\,\frac{m^2}{\lambda} + \delta A\,\exp(-i\omega t + iky)\,,$$

$$B = \frac{m}{2} + \delta B\,\exp(-i\omega t + iky)\,,$$

получим в линейном по δA и δB приближении следующее дисперсионное соотношение [*]

$$\omega^2 = k^2 - \frac{6}{25}m^2 \pm \frac{25{,}22}{25}m^2\,,$$

описывающее поперечную неустойчивость солитонного решения (3). Из этого соотношения следует, что при К=0 солитон (3), а значит, и (2), неустойчив, т.е. вариация амплитуды и ширины одномерного солитона приводит к его неустойчивости. Поперечная неустойчивость стабилизируется при $k^2 > \frac{31{,}22}{25}m^2$.

Рассмотрим случай заряженного скалярного поля ψ в модели с плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L} = |\psi_t|^2 - |\psi_x|^2 - m^2|\psi|^2 + \frac{2}{3}\lambda|\psi|^3\,.$$

Уравнение движения имеет вид

$$\psi_{tt} - \psi_{xx} + m^2\psi - \lambda|\psi|\psi = 0\,,$$

[*] Неустойчивость имеет место при $\omega^2<0$.

а его солитонное решение есть комплексная скалярная функция

$$\Psi = \frac{3}{2}\,\frac{m^2-\bar\omega^2}{\lambda}\,\mathrm{sch}^2\left(\frac{\sqrt{m^2-\bar\omega^2}}{2}\,\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}\right)e^{-i\bar\omega t}, \quad (4)$$

где $\bar\omega$ – вещественная константа, а $m^2-\bar\omega^2>0$.

Заряд этого солитона равен

$$Q = i\int_{-\infty}^{\infty}(\Psi^*\Psi_t-\Psi\Psi_t^*)\,dx = \frac{12}{\lambda^2}\,\bar\omega\,(m^2-\bar\omega^2)^{3/2}\,.$$

Исследуем сначала продольную устойчивость Q – солитона. Для этого используем теорему В.Г.Маханькова /5/, согласно которой для нелинейных взаимодействий довольно общего вида устойчивость Q – солитонов релятивистски инвариантных уравнений имеет место лишь при $dQ/d\bar\omega<0$.

Рассматриваемый одномерный Q– солитон продольно устойчив, когда $\bar\omega^2<m^2<4\bar\omega^2$, и неустойчив при $m^2>4\bar\omega^2$, т.к.

$$dQ/d\bar\omega \propto (m^2-4\bar\omega^2)(m^2-\bar\omega^2)^{1/2}\,.$$

Дисперсионное соотношение для поперечной устойчивости солитонного решения (4) в случае пробной функции (А и Φ– функции y и t, причем $A=(m^2-\bar\omega^2)^{1/2}/2+\delta A$, $\Phi=\bar\omega t+\delta\Phi$)

$$\Psi = \frac{6A^2}{\lambda}\,\mathrm{sch}^2 Ax\cdot\exp(-i\Phi) \quad (5)$$

имеет вид

$$\omega^2 = k^2 - \{9(m^2-4\bar\omega^2) \pm [81(m^2-4\bar\omega^2)^2+864\bar\omega^2k^2]^{\frac{1}{2}}\}/16\,. \quad (6)$$

При К=0 (т.е. для продольной устойчивости) получен результат, точно соответствующий теореме /5/.

Отметим здесь тот любопытный факт, что как $dQ/d\bar\omega$, так и ω^2 (при $К^2$=0) пропорциональны разности $m^2-4\bar\omega^2$, что, по-видимому, говорит в пользу выбора пробной функции в виде (5).

Рассмотрим соотношение (6) при К≪I. В этом случае

$$\omega^2 = k^2 + \frac{-9(m^2-4\bar\omega^2)\pm[9(m^2-4\bar\omega^2)+48\bar\omega^2k^2/(m^2-4\bar\omega^2)]}{16}\,.$$

При этом для случая верхнего знака (знака плюс)

$$\omega^2 = k^2(m^2-\bar\omega^2)/(m^2-4\bar\omega^2)$$

и поперечная неустойчивость ($\omega^2<0$) имеет место при $m^2<4\bar\omega^2$. Для случая нижнего знака (знака минус)

$$\omega^2 = k^2 + [-9(m^2-4\bar\omega^2)-24\bar\omega^2k^2/(m^2-4\bar\omega^2)]/8$$

и неустойчивость солитона появляется при $m^2>4\bar\omega^2$.

Для $m^2=4\bar\omega^2$ дисперсионное соотношение (6) приобретает вид (при любых К)

$$\omega^2 = k^2 \pm \frac{29{,}39}{16}\,\bar\omega k\,.$$

Эта зависимость при К ≪ I дает неустойчивость, которая стабилизируется лишь при

$$k > \frac{29{,}39}{16}\,\bar\omega = \frac{29{,}39}{32}\,m\,.$$

Таким образом, можно сделать вывод о том, что заряженный солитон (4) при К≪I поперечно неустойчив при всех значениях параметров m и $\bar\omega$. Эта неустойчивость стабилизируется лишь при больших значениях волнового числа К.

В заключение отметим, что исследованные в настоящей работе колоколообразные солитоны (2) и (4) являются неустойчивыми образованиями, как, впрочем, и все подобные исследованные нами ранее /I-3/ солитоны релятивистски инвариантных уравнений. Лишь колоколообразное солитонное решение нерелятивистского уравнения Кортевега–де Вриса, совпадающее по форме с солитонным решением (2), исследованным в данной работе (квадрат гиперболического секанса), оказывается устойчивым как в продольном /6/, так и в поперечном /7,I,3/ направлениях.

Автор благодарен В.Г.Маханькову, Е.П.Жидкову и Н.В.Махалдиани за полезные обсуждения.

Литература

I. Катышев Ю.В. , Маханьков В.Г. ОИЯИ, Р4-9507, Дубна, I976; Yu.V.Katyshev and V.G.Makhankov, Physics Letters 57A, 10 (1976) .
2. Катышев Ю.В. ОИЯИ, Р2-I0285, Дубна, I976.
3. Боголюбский И.Л., Жидков Е.П., Катышев Ю.В., Маханьков В.Г., Расторгуев А.А. ОИЯИ, Р2-9673, Дубна, I976.
4. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей, "Наука", М.,I976, стр. 286-289.
5. Маханьков В.Г. ОИЯИ, Р2-I0362, Дубна, I977.
6. T.B.Benjamin, Proc.Royal Soc. London A328, 153(1972).
7. Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И. ДАН СССР, I92,753,I970; Soviet Phys.-Doklady 15 , 539 (1970) .

Рукопись поступила в издательский отдел
I2 января I978 года.