СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

С 324.1б
М-801

24/IV-78

Р2 - 11209

П.Т.Морозов

1789/2-78

ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ ФОРМФАКТОРА π-МЕЗОНА, НУЛИ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

1978

P2 - 11209

П.Т.Морозов

ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ ФОРМФАКТОРА π-МЕЗОНА, НУЛИ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Морозов П.Т. P2 - 11209

Экстраполяция формфактора π -мезона, нули в комплексной плоскости

Исследуется задача об экстраполяции формфактора π -мезона. Условие аналитичности сформулировано на языке модульных представлений с весовой функцией Карлемана. Показано, что при подходящем выборе функции Карлемана осуществляется устойчивая экстраполяция. В этом смысле обсуждается вопрос о наличии нулей формфактора в комплексной плоскости.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Morosov P.T. P2 - 11209

Extrapolation of π-Meson Form Factor, Zeros in the Analyticity Domain

The problem of a stable extrapolation from the cut to an arbitrary interior point of the analyticity domain for the pion form factor is formulated and solved. The case when the form factor has zeros is discussed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

© 1978 Объединенный институт ядерных исследований Дубна

1. ВВЕДЕНИЕ

В теории сильных взаимодействий часто возникает задача об экстраполяции аналитической функции, заданной на некоторой части границы, в область аналитичности. Принцип аналитичности утверждает, что такая задача решается однозначно, если заданы точные значения функции. Физическая ситуация, однако, отличается тем, что экстраполируемая функция известна с точностью до экспериментальной ошибки.

Вообще говоря, сколь угодно малая /но конечная/ неточность во вводных данных приводит к большим неоднозначностям при экстраполяции. Тем не менее, такая дополнительная информация относительно аналитической функции, как гладкость или даже ограниченность, позволяет осуществлять устойчивую экстраполяцию. Под этим, как обычно, мы понимаем, что результаты устойчивы по отношению к маленьким возмущениям в начальных данных /см., напр., /1/ /.

Пусть амплитуда рассеяния $f(z)$ есть аналитическая функция в односвязанной комплексной плоскости с разрезами D и границей Γ. На некоторой связанной части разреза Γ_1 заданы экспериментальные данные. На этом отрезке построим комплексную функцию $h(z)$ /так называемую гистограмму/, согласующуюся с экспериментальными данными, т.е. $h(z)$ отличается от "истинной" амплитуды $f(z)$ не более, чем на величину экспериментальной ошибки ϵ,

$$|f(z) - h(z)| \le \epsilon, \qquad z \in \Gamma_1 .$$

И пусть, наконец, на остальной части границы Γ_2 $f(z)$ ограничена * ,

$$|f(z)| \le M, \quad z \in \Gamma_2 .$$

Задача состоит в том, чтобы при аналитическом продолжении $f(z)$ определить внутри области аналитичности такую комплексную функцию $\hat{h}(z)$, чтобы разность между ними для любой точки не превышала некоторой $\kappa(\epsilon;z)$,

$$|f(z)-\hat{h}(z)| \le \kappa(\epsilon;z), \quad z \in D .$$

Тогда условие

$$\kappa(\epsilon;z) \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} 0 \qquad /1/$$

характеризует устойчивость решения. При заданном ϵ качество экстраполяции определяется величиной границы ошибки $\kappa(\epsilon;z)$. С этим связана вторая проблема - оптимизации процедуры.

В настоящей работе решена задача устойчивой экстраполяции формфактора π -мезона. В части II сформулирована задача и получены основные результаты. В части III обсуждается вопрос о наличии нулей формфактора в комплексной плоскости.

II . ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Метод устойчивой полиномиальной экстраполяции был предложен впервые в работах /2/ и /3/. Интересная идея развита в работах /4,5/, где аналитичность сформулирована

---

* Отметим, что ϵ и M в общем случае могут быть положительно определенными функциями переменной z , а величина M неизвестна, но может быть определена из теоретических соображений или из других условий, которые обсуждаются ниже.

на языке дисперсионных соотношений с весовой функцией Карлемана,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i C_\lambda(z)} \int_{\Gamma_1} \frac{f(z')C_\lambda(z')}{z'-z} dz' +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i C_\lambda(z)} \int_{\Gamma_2} \frac{f(z')C_\lambda(z')}{z'-z} dz',$$

а $\hat{h}(z)$ определена следующим образом:

$$\hat{h}(z) = \frac{1}{2\pi i C_\lambda(z)} \int_{\Gamma_1} \frac{h(z')C_\lambda(z')}{z'-z} dz'.$$

Функция Карлемана /точнее, модифицированная функция Карлемана, которая, в отличие от оригинальной [1], не содержит Коши-сингулярности/ имеет следующий вид:

$$C_\lambda(z) = \exp\{-\lambda[w(z) + i\tilde{w}(z)]\}, \qquad /2/$$

где $w(z)$ - гармоническая мера кривой Γ_2 относительно точки z и области D, а $\tilde{w}(z)$ - ее гармонически сопряженная. Следовательно,

$$\begin{aligned} &\nabla^2 w(z) = \nabla^2 \tilde{w}(z) = 0, \quad z \in D, \\ &w(z) = 0, \quad z \in \Gamma_1, \\ &w(z) = 1, \quad z \in \Gamma_2, \\ &0 < w(z) < 1, \quad z \in D. \end{aligned} \qquad /3/$$

В такой постановке, при определенном значении параметра λ осуществляется устойчивая экстраполяция, как показано в [4,5]. Там же найдены оптимальные условия, которые сводятся к следующим требованиям: а/ использованию функции Карлемана с гармонической мерой $w(z)$ и ее гармонически сопряженной $\tilde{w}(z)$ относительно всей плоскости D ; б/ применению ядра Пуассона вместо ядра Коши в дисперсионных соотношениях.

Сформулируем задачу экстраполяции формфактора π-мезона несколько иначе, что связано с другими начальными условиями. На самом деле на физическом разрезе имеются эксперементальные данные для модуля формфактора. Следовательно, можно определить ошибку как разность между модулями истинной функции $f(z)$ и гистограммы $h(z)$. С другой стороны, модуль аналитической функции не есть аналитическая функция. Но мы можем определить ошибку для отношения модулей и, изяв логарифм этого отношения, сформулировать и решать задачу в терминах гармонических функций.

Однако без привлечения дополнительных условий такая постановка приводит к неустойчивому решению. Действительно, пусть

$$\frac{|f(z)|}{|h(z)|} \leq \begin{cases} 1+\epsilon\,, & z \in \Gamma_1\,, \\ M, & z \in \Gamma_2\,, \quad M>1\,. \end{cases}$$

Тогда по теореме о двух константах /см., напр., /1/ /, которая характеризует устойчивость решения задачи, внутри области аналитичности имеем:

$$\frac{|f(z)|}{|h(z)|} \leq M^{w(z)}(1+\epsilon)^{1-w(z)}, \qquad /4/$$

где $w(z)$ - гармоническая мера Γ_2 относительно точки z и области D . При устремлении $\epsilon \to 0$ правая часть /4/ не стремится к 1, т.е. критерий устойчивости нарушен.

Покажем, что применение в условии аналитичности весовой функции Карлемана, определенной в /2/ и /3/, приводит к устойчивой экстраполяции. Итак, пусть $F(z)$ - аналитическая функция в комплексной z-плоскости с разрезом на вещественной оси $z>4\mu^2$, где μ- пионная масса. Будем считать пока, что $F(z)$ не имеет нулей в плоскости. Пусть у нас построена функция

$H(z)$ на части разреза Γ_1 и там выполняется неравенство:

$$1-\epsilon' \le \frac{|F(z)|}{|H(z)|} \le 1+\epsilon'', \quad z \in \Gamma_1 .$$

Отсюда

$$\left| \ln \frac{|F(z)|}{|H(z)|} \right| \le \max(\epsilon', \epsilon'') = \epsilon , \quad z \in \Gamma_1 . \qquad /5/$$

Как и раньше, требуется, чтобы $F(z)$ на Γ_2 была ограничена,

$$|F(z)| \le M , \quad z \in \Gamma_2 . \qquad /6/$$

Так как $F(z)$ есть аналитическая функция в z -плоскости с разрезом от 4 до ∞ /в единицах квадрата пионной массы/ и $F(z) \neq 0$, то $\ln F(z)$ тоже является аналитической функцией в той же области. Мы это выразим на языке так называемого модульного представления, т.е. дисперсионного соотношения со специальным ядром

$$\ln F(z) = \frac{\sqrt{z-4}}{2\pi i} \int_C \frac{\ln F(z')dz'}{\sqrt{z'-4}\,(z'-z)} ,$$

где контур C есть граница области, т.е. разрез плюс бесконечно удаленная точка.

Преобразуем конформно комплексную z -плоскость в единичный круг,

$$\zeta = \frac{1-\sqrt{\dfrac{4-z}{t_0-4}}}{1+\sqrt{\dfrac{4-z}{t_0-4}}}$$

так, чтобы разрез отобразился на единичную окружность и точки $z=(4, t_0, \infty)$ перешли, соответственно, в точки

$\zeta=(1, i, -1)$ на единичной окружности. Здесь точка t_0 определяет Γ_1 и Γ_2 $(\Gamma_1=[1,t_0], \Gamma_2=[t_0,\infty))$. Ее отобразили на точку $\zeta=i$ из-за соображения удобства - для такой области мы знаем функцию Карлемана.

Запишем модульное представление с помощью новой переменной ζ,

$$\ln f(\zeta)=\frac{1-\zeta^2}{2\pi i}\int_U \frac{\ln f(\zeta')d\zeta'}{(1-\zeta\zeta')(\zeta'-\zeta)},$$

где U - единичная окружность и здесь, как и далее, используются обозначения $f(\zeta)-F(z)$, $h(\zeta)-H(z)$.

Итак, применяя весовую функцию Карлемана, определенную в /2/, где $w(\zeta)$ - гармоническая мера $\Gamma_2=[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ $(\Gamma_1=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}])$ относительно точки ζ и единичного круга и, как следует из /3/,

$$|C_\lambda(e^{i\phi})|=\begin{cases}1, & -\frac{\pi}{2}\le\phi\le\frac{\pi}{2},\\ e^{-\lambda}, & \frac{\pi}{2}\le\phi\le\frac{3\pi}{2},\end{cases} \qquad /7/$$

задаем условие аналитичности функции $\ln(C_\lambda(\zeta)f(\zeta))$ модульным представлением,

$$\ln(C_\lambda(\zeta)f(\zeta))=\frac{1-\zeta^2}{2\pi i}\int_U \frac{\ln(f(\zeta')C_\lambda(\zeta'))d\zeta'}{(1-\zeta\zeta')(\zeta'-\zeta)},$$

или

$$\ln(C_\lambda(\zeta)f(\zeta))=\frac{1-\zeta^2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\ln|C_\lambda(e^{i\phi})f(e^{i\phi})|d\phi}{1-2\zeta\cos\phi+\zeta^2} \qquad /8/$$

Далее определяем внутри области функцию $\hat{h}(\zeta)$ следующим образом:

$$\ln(C_\lambda(\zeta)\,\hat{h}(\zeta))=\frac{1-\zeta^2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln|C_\lambda(e^{i\phi})h(e^{i\phi})|d\phi}{1-2\zeta\cos\phi+\zeta^2}. \qquad /9/$$

Оценивая модуль разности /8/ и /9/ при учете /5/, /6/ и /7/, получаем:

$$|\ln \frac{C_\lambda(\zeta) f(\zeta)}{C_\lambda(\zeta)\hat{h}(\zeta)}| \le \frac{\epsilon}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\frac{1-\zeta^2}{1-2\zeta\cos\phi + \zeta^2}| d\phi +$$

$$+ \frac{|\ln M - \lambda|}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\frac{1-\zeta^2}{1-2\zeta\cos\phi+\zeta^2}| d\phi . \qquad /10/$$

Интегралы в правой части /10/ суть ограниченные функции переменной ζ. Перепишем неравенство, вводя обозначения J_1 и J_2 для этих функций,

$$|\ln \frac{f(r,\psi)}{\hat{h}(r,\psi)}| \le \epsilon J_1(r,\psi) + |\ln M - \lambda| J_2(r,\psi).$$

Отсюда следует, что выбор $\lambda=\lambda_0$, где $\lambda_0 = \ln M$, приводит к устойчивому решению. Точнее, любое $\lambda_c = \ln M \pm c\epsilon$, где c - константа, приводит к устойчивой экстраполяции. Но наименьшая граница ошибки получается при $\lambda=\lambda_0$, т.е. $c=0$.

Обсудим вопрос о выборе величины M, без знания которой невозможна стабильная экстраполяция. Как говорилось, M может быть определена из теоретических соображений модельного или строгого характера. Но есть другой путь - сделать экстраполяции $\hat{h}(\zeta;M)$ для разных значений M в функции Карлемана и найти оптимальное значение M_0 из сравнения с $f(\zeta)$, если это возможно. В рассматриваемой нами задаче возможно сравнение $\hat{h}(\zeta;M)$ с экспериментальными значениями $f(\zeta)$ на вещественной оси внутри области аналитичности, поскольку для формфактора имеются данные в пространственноподобной области переданных импульсов.

Используя явный вид функции Карлемана, напишем выражение для $\hat{h}(\zeta;M)$ на вещественной оси. Перепишем /9/ следующим образом:

$$\hat{h}(\zeta;M)=\frac{1}{C(\zeta;M)}\exp\left\{\frac{1-\zeta^2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln|h(e^{i\phi})|\,d\phi}{1-2\zeta\cos\phi+\zeta^2}\right\}. \quad /11/$$

Для определенных выше D, Γ_1 и Γ_2 функция Карлемана имеет следующий вид:

$$C(\zeta;M)=\exp\{-\ln M(w(\zeta)+i\tilde{w}(\zeta))\},$$

где

$$w(\zeta)+i\tilde{w}(\zeta)=\frac{1}{2}+\frac{i}{\pi}\ln\frac{1+i\zeta}{1-i\zeta},$$

т е.

$$w(r,\psi)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2r\cos\psi}{1-r^2}.$$

$$\tilde{w}(r,\psi)=\frac{1}{\pi}\ln\sqrt{\frac{1+r^2-2r\sin\psi}{1+r^2+2r\sin\psi}}.$$

Тогда формула /11/ для вещественных ζ принимает вид:

$$\hat{h}(t;M)=\frac{1}{e^{-\ln M\,w(t)}}\exp\left\{\frac{1-t^2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln|h(e^{i\phi})|\,d\phi}{1-2t\cos\phi+t^2}\right\}=$$

$$=M^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2t}{1-t^2}}\exp\left\{\frac{1-t^2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln|h(e^{i\phi})|\,d\phi}{1-2t\cos\phi+t^2}\right\}. \quad /12/$$

Имея явный вид $h(e^{i\phi})$, выражение /12/ может служить для нахождения оптимального значения M.

III. НУЛИ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Вопрос о существовании нулей формфактора π-мезона в комплексной плоскости исследовался многими авторами. Общий вывод в этих работах /см., напр., [6] / заключается в том, что если нули и есть, то они находятся очень далеко от начала.

При наличии нулей функция $\ln f(\zeta)$ не является аналитической в указанной области, но мы можем писать модульное представление для $\ln \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)}$, где $B(\zeta)$- некая аналитическая функция, имеющая точно такие же нули, как и функция $f(\zeta)$. Самая удобная для наших целей такая функция конструируется как произведение функций Бляшке /см., напр., [7], а также [5] /. Следовательно, если $f(\zeta)$ имеет n нулей в единичном круге, в точках $\zeta = a_1, a_2, \ldots, a_n$ с кратностями, соответственно, $m_1, m_2, \ldots, m_n$, то

$$B(\zeta) = (\beta_1(\zeta))^{m_1} (\beta_2(\zeta))^{m_2} \ldots (\beta_n(\zeta))^{m_n},$$

где $\beta_i(\zeta)$ - функция Бляшке, определенная как

$$\beta_i(\zeta) = \frac{\zeta - a_i}{1 - \zeta a_i^*}$$

с очевидными свойствами: $|\beta_i(\zeta)| = 1, \zeta \in \Gamma; |\beta_i(\zeta)| < 1$ внутри области. Тогда, используя обозначение $\tilde{f}(\zeta) = f(\zeta)/B(\zeta)$, запишем модульное представление

$$\ln(\tilde{C}(\zeta\ ; M)\tilde{f}(\zeta)) = \frac{1-\zeta^2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\ln|C(e^{i\phi}; M)\tilde{f}(e^{i\phi})|\, d\phi}{1 - 2\zeta\cos\phi + \zeta^2}.$$

/13/

Определяя $\hat{h}(\zeta)$ как и в /8/, получаем следующую оценку разности между /13/ и /8/:

$$\left|\ln \frac{f(\zeta)}{\hat{h}(\zeta)}\right| \leq \epsilon J_1(\zeta) + |\ln B(\zeta)|.$$

Видно, что не только увеличивается граница ошибки, но и получается неустойчивое решение в смысле /1/. К устойчивой экстраполяции приводит следующее определение экстраполируемой функции:

$$\hat{h}(\zeta) = \frac{B(\zeta)}{C(\zeta;M)} \exp\left\{ \frac{1-\zeta^2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln|C(e^{i\phi};\ M)h(e^{i\phi})| d\phi}{1-2\zeta\cos\phi+\zeta^2} \right\}. \qquad /14/$$

При неизвестной функции $B(\zeta)$ из определения /14/ не следует, что мы можем почерпнуть информацию относительно количества нулей и их позиций. Вопрос здесь стоит с такой же неопределенностью, как и при использовании правил сумм, полученных из модульных представлений.

IV. ОБСУЖДЕНИЕ

Мы рассмотрели задачу об экстраполяции во внутреннюю область аналитической функции, которая приближенно известна по модулю на части границы. Как показано, если в качестве условия аналитичности использовать модульное представление с весовой функцией Карлемана, получается устойчивое решение. Результаты, полученные в работе /5/, утверждают, что к наименьшей границе ошибки приводит применение дисперсионных соотношений с ядром Пуассона. Последнее связано с тем, что оно является ядром постоянной фазы, и при оценке разности по модулю, вклад интегралов не увеличивается. Использованное нами модульное представление не обладает таким преимуществом, но взамен приводит к оценке разности $\ln f(\zeta)$ и $\ln h(\zeta)$, а не их модулей.

Наличие экспериментальных данных для формфактора внутри области аналитичности позволяет, в принципе, выбрать оптимальное значение параметра M в экстраполируемой функции $\hat{h}(\zeta;\ M)$. Если существуют нули в комплексной плоскости, то этот факт должен быть учтен в определении экстраполируемой функции, чтобы получить устойчивое решение задачи.

В заключение автор выражает свою искреннюю благодарность В.А.Мещерякову за полезные дискуссии и критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962.*
2. *Gutkosky R.E. and Deo B.B. Phys.Rev.Lett., 1968, 22, p. 1272; Phys.Rev., 1968, 174, p. 1859.*
3. *Ciulli S. Nuovo Cimento, 1969, 61A, p. 787; Nuovo Cimento, 1969, 62A, p. 301.*
4. *Ciulli S. and Nenciu G. Weighted dispersion relations and cut-to-cut extrapolations, Lund Conference (June, 1969).*
5. *Ciulli S. and Fischer J. Nucl.Phys., 1970, B24, p. 537.*
6. *Dubnicka S., Furdik I., Meshcheryakov V.A. Preprint IC/76/102, Trieste, 1976.*
   Щербин Ю.П. ЯФ, 1973, 17, с. 360.
7. *Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного, "Наука", М., 1966.*

Рукопись поступила в издательский отдел
27 декабря 1977 года.