

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



11189

ЭКЗ ЧИТ ЗАЛА
P2 - 11189

В.Л.Любошиц, Я.А.Сморodinский

О ДИФРАКЦИИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ
НА ТОРОИДАЛЬНОМ СОЛЕНОИДЕ

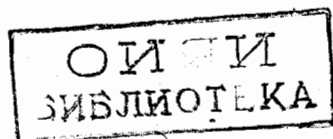
1978

P2 - 11189

В.Л.Любошиц, Я.А.Сморodinский

О ДИФРАКЦИИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ
НА ТОРОИДАЛЬНОМ СОЛЕНОИДЕ

Направлено в ЖЭТФ



Любошиц В.Л., Смородинский Я.А.

P2 - 11189

О дифракции заряженных частиц на тороидальном соленоиде

Рассмотрены проявления эффекта Бом-Ааронова в случае, когда магнитное поле сосредоточено в конечной области пространства (замкнутый соленоид). Получены формулы, описывающие рассеяние заряженных частиц на тороидальном соленоиде в эйкональном и борновском приближениях.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Luboshitz V.L., Smorodinsky Ya.A.

P2 - 11189

On Charged Particle Diffraction on a Toroidal Solenoid

Manifestations of the Bohm-Aharonov effect were considered for the case when a magnetic field is concentrated in a space final region (a closed solenoid). Formulae have been obtained which describe the charged particle scattering on a toroidal solenoid both in the eikonal and Born approximations.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

1. ВВЕДЕНИЕ

Ааронов и Бом обратили внимание на то, что магнитное поле влияет на интерференцию когерентных пучков заряженных частиц, распространяющихся вне области локализации поля^{/1-3/}. Они рассмотрели также рассеяние зарядов на бесконечно длинном соленоиде и показали, что рассеяние обусловлено изменением фазы волновой функции в области, в которой нет магнитного поля, но вектор-потенциал отличен от нуля; при этом полное сечение рассеяния оказывается бесконечным. В дальнейшем появилось большое количество работ, посвященных интерпретации данного эффекта и обсуждению локальности в квантовой механике /см., например,^{/4-8//}.

Анализ, содержащийся в цитированных работах, имеет определенный методический недостаток, связанный с бесконечностью соленоида. Такая идеализация при рассмотрении принципиальных вопросов вряд ли является допустимой, хотя в данном случае она и не приводит к ошибке.

В связи с этим представляет интерес переход от бесконечного соленоида к конечному, свернутому в тор. Как мы увидим ниже, в этом случае также может быть указан интерференционный эксперимент, аналогичный эксперименту Бом-Ааронова. Задача о рассеянии заряженных частиц на тороидальном соленоиде имеет простое решение; сечение рассеяния оказывается, естественно, конечным и описывается дифракционными формулами. Следует отметить, что, если заряженные частицы не попадают внутрь соленоида, рассеяние определяется ве-

личной потока магнитного поля и не зависит от распределения поля по объему соленоида. Хотя нет ничего удивительного в том, что в волновой картине электроны "чувствуют" топологическую структуру пространства /кольцо, "вырезанное" магнитным полем/, эффект достаточно интересен тем, что не имеет классического аналога.

2. ПОЛЕ ЗАМКНУТОГО СОЛЕНОИДА

Возьмем тонкий и длинный /но конечный/ соленоид и свернем его в тор. Пусть n - число витков соленоида / $n \gg 1$ /, b - радиус витка, $\ell = 2\pi a$ - длина соленоида, причем $b \ll a$. Если пропустить через такой соленоид ток J , система будет действовать как нить, свернутая в окружность C радиуса a , вдоль которой распределен направленный по касательной магнитный момент с постоянной линейной плотностью

$$\mu = \frac{1}{c} \frac{Jn}{\ell} \pi b^2 = \frac{1}{2} \frac{Jn}{c} \frac{b^2}{a}. \quad /1/$$

Легко видеть, что в любой точке вне соленоида напряженность магнитного поля равна нулю*. Действительно, интегрируя по окружности C известную формулу для поля магнитного диполя и применяя теорему Стокса, получаем

$$\vec{H} = \mu \vec{\nabla}_r \oint_C (d\rho \vec{\nabla}_\rho) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{\rho}|} \equiv 0. \quad /2/$$

Очевидно, внутри соленоида магнитное поле направлено по касательной к окружности C , а магнитный поток равен

*Строго говоря, при прохождении тока через обмотку соленоида эффективно накапливается еще один большой виток с током, направленным вдоль остова соленоида. Это обстоятельство, однако, не имеет принципиального значения, так как соответствующее магнитное поле может быть скомпенсировано, например, с помощью дополнительного контура с током противоположного направления.

$$\phi = 4\pi\mu. \quad /3/$$

Вектор-потенциал вне соленоида в кулоновской калибровке / $\text{div} \vec{A} = 0$ / имеет вид

$$\vec{A}(\vec{r}) = \mu \oint_C [\vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{\rho}|}, d\vec{\rho}], \quad /4/$$

или

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\phi}{4\pi} \text{grad} \iint_{\Sigma} (\vec{\nabla}_r \cdot \vec{n}) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{\rho}|} dS + \vec{n} \phi \iint_{\Sigma} \delta^3(\vec{r} - \vec{\rho}) dS. \quad /5/$$

Здесь интегрирование проводится по кругу Σ , ограниченному окружностью C , под \vec{n} понимается полярный вектор, перпендикулярный плоскости круга /его направление связано с направлением магнитного поля в соленоиде правилом правого винта/.

Согласно /5/, если бесконечная прямая или кривая L пересекает круг Σ , то

$$\int_L \vec{A} d\vec{\ell} = \phi, \quad /6/$$

если же L проходит вне круга Σ , то

$$\int_L \vec{A} d\vec{\ell} = 0. \quad /7/$$

Это - основные соотношения, которые нам потребуются в дальнейшем. Учет конечной толщины тороидального соленоида не приводит к принципиальным уточнениям, поскольку такой соленоид можно рассматривать как совокупность очень тонких соленоидов. Очевидно, в этом случае магнитное поле вне тора по-прежнему равно нулю, а внутри тора силовые линии представляют собой окружности, центры которых лежат на оси симметрии тора. Направим ось z вдоль оси симметрии и поместим начало координат в центр симметрии тора. Легко видеть, что в точках внутри соленоида с цилиндрическими

координатами $(\vec{\rho}, z)$ ($-b \leq z \leq b$, $a - \sqrt{b^2 - z^2} \leq |\vec{\rho}| \leq a + \sqrt{b^2 - z^2}$) магнитное поле имеет величину

$$H = H_0 \frac{a}{|\vec{\rho}|},$$

где $H_0 = \frac{2In}{ac}$. При этом магнитный поток

$$\phi = H_0 a \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^b \frac{y dy}{a + y \cos\theta} = \pi b^2 H_0 \frac{2}{1 + \sqrt{1 - b^2/a^2}}. \quad /8/$$

Ясно, что для интегралов по траекториям в пространстве, свободном от поля, остаются в силе равенства /6/ и /7/, причем первое из них относится к линиям, проходящим сквозь "дыру" тора, второе - к линиям, проходящим вне этой "дыры". Подчеркнем далее, что по своему смыслу формулы /2-7/ справедливы для любого тонкого соленоида, имеющего форму замкнутой плоской кривой. В соответствии с этим соленоид конечной толщины, не создающий во внешнем пространстве магнитного поля, может быть не обязательно "круговым" тором: достаточно того, чтобы он имел "дыру", т.е. был эквивалентен тору в топологическом отношении.

Заметим, что в связи с неоднозначностью электромагнитных потенциалов из выражения /5/ с помощью градиентного преобразования можно исключить первый член /это, конечно, не влияет на физические результаты/. Тогда в системе координат с осью z , направленной вдоль вектора \vec{n} , и плоскостью (zy) , проходящей через соленоид, компоненты вектора потенциала в свободном от поля пространстве будут иметь простой вид:

$$A_x = 0, A_y = 0, A_z(x, y, z) = \begin{cases} \phi \delta(z), & x, y \in \Sigma \\ 0, & x, y \notin \Sigma \end{cases} \quad /9/$$

С учетом конечной толщины соленоида δ -функция за-

меняется на функцию $\varphi(z)$, отличную от нуля на отрезке $(-b, b)$ и удовлетворяющую условию $\int_{-b}^b \varphi(z) dz = 1^*$.

3. ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Рассмотрим модификацию интерференционного эксперимента Бома-Ааронова с двумя когерентными пучками заряженных частиц. Вместо того чтобы использовать бесконечно длинный соленоид /см. /1-3//, представим себе, что один из пучков проходит через "дыру" тороидального соленоида, а другой направлен вне этой "дыры". Как известно, квазиклассическая волновая функция заряженной частицы, движущейся по траектории L в области, в которой вектор-потенциал отличен от нуля, приобретает дополнительный фазовый множитель

$$\exp(i \frac{e}{\hbar c} \int_L \vec{A} d\ell), \quad /10/$$

где e - заряд частицы. Следовательно, в соответствии с равенствами /6/ и /7/, при пропускании тока через замкнутый соленоид между двумя интерферирующими пучками возникает дополнительная разность фаз

$$a = \frac{e\phi}{\hbar c}, \quad /11/$$

и интерференционная картина смещается, несмотря на то, что оба пучка распространяются в области пространства, в которой магнитное поле равно нулю /эффект Бома-Ааронова !/. Заметим, что, если внутри

$$* \text{ Для тора } \varphi(z) = \frac{1 + \sqrt{1 - b^2/a^2}}{2\pi b^2} \ln \frac{a + \sqrt{b^2 - z^2}}{a - \sqrt{b^2 - z^2}};$$

$$\text{при } b \ll a \quad \varphi(z) = \frac{2\sqrt{b^2 - z^2}}{\pi b^2}.$$

соленоида магнитное поле велико и флуктуации магнитного потока $\Delta\phi \gg \hbar c/e$, эффект Бома-Ааронова проявляется в том, что при пропускании тока через соленоид интерференционная картина полностью разрушается, а при его включении снова восстанавливается.

Как известно, магнитный поток, проходящий через сверхпроводящее кольцо, может принимать значения

$$\phi = \pi \frac{\hbar c}{e_0} m, \quad \text{где } e_0 - \text{заряд электрона, } m - \text{целые числа.}$$

В соответствии с этим, для сверхпроводящего соленоида формула /11/ дает разность фаз

$$\alpha = \pi Z m, \quad Z = \frac{e}{e_0}.$$

Таким образом, по отношению к пучку электронов /протонов/ сверхпроводящий соленоид при нечетном числе квантов магнитного потока играет роль "пластинки в $\frac{1}{2}\lambda$ "; при четном числе квантов эффект отсутствует.

4. ФРАУНТГОФЕРОВСКАЯ ДИФРАКЦИЯ

Найдем амплитуду рассеяния заряженной частицы на тороидальном соленоиде, магнитное поле внутри которого перпендикулярно импульсу частицы ($\hbar \mathbf{k} \parallel \mathbf{n}$). Будем считать, что дебройлевская длина волны гораздо меньше длины соленоида, т.е. $\lambda = 1/k \ll a$; при этом поперечные размеры волнового пакета $R \gg a$. Ясно, что в этих условиях при любом соотношении между длиной волны λ и радиусом витков b основную роль играет рассеяние на малые углы. Поэтому для решения интересующей нас задачи можно применить эйкональный метод, который используется в теории дифракции Фраунтгофера /см., например, /9,10/.

Предположим, что ось z направлена вдоль импульса частицы, а центр симметрии тора совпадает с началом координат. Как известно, для вычисления амплитуды рассеяния в эйкональном приближении достаточно знать волновую функцию в пространственной области, в которой уже отсутствует взаимодействие, но еще не сказываются

дифракционные эффекты. Соответствующее выражение, справедливое на расстояниях $z \ll ka^2$, имеет вид:

$$\psi(z, \vec{\rho}) = e^{ikz} \exp(i\alpha(\vec{\rho})). \quad /12/$$

Здесь ρ - двумерный вектор в плоскости (xy) , $\hbar \alpha(\vec{\rho})$ - изменение функции действия при движении частицы по прямолинейной траектории, параллельной оси z .

Амплитуда рассеяния на малые углы θ определяется через функцию $\alpha(\vec{\rho})$ по известной формуле /9/

$$f(\vec{q}) = \frac{k}{2\pi i} \iint [e^{i\alpha(\vec{\rho})} - 1] e^{-i\vec{q}\vec{\rho}} d^2\rho, \quad /13/$$

где $\hbar \vec{q}$ - изменение импульса частицы /при $\theta \ll 1$ вектор $\vec{q} \perp \vec{k}$, и $|\vec{q}| \approx k\theta$ /.

В интересующем нас случае, в соответствии с /10/,

$$\alpha(\vec{\rho}) = \frac{e}{\hbar c} \int_{-\infty}^{\infty} A_z(\vec{\rho}, z) dz. \quad /14/$$

Мы будем рассматривать тонкий соленоид. Если $b \ll a$, можно пренебречь вкладом области $a-b < |\rho| \leq a+b$, и тогда, с учетом /6/ - /7/ (или /9/):

$$\alpha(\vec{\rho}) = \begin{cases} 0, & |\vec{\rho}| > a; \\ e\phi/\hbar c, & |\vec{\rho}| < a. \end{cases} \quad /15/$$

Подставляя эти значения в /13/, находим

$$f(\vec{q}) = \frac{k}{2\pi i} (\exp(i\frac{e\phi}{\hbar c}) - 1) \iint e^{-i\vec{q}\vec{\rho}} d^2\rho, \quad /16/$$

или

$$f(\theta) = -ik \left(\int_0^a J_0(k\theta\rho) \rho d\rho \right) [\exp(i\frac{e\phi}{\hbar c}) - 1] = \\ = \frac{2a}{\theta} J_1(ka\theta) \sin \frac{e\phi}{2\hbar c} \cdot \exp(i\frac{e\phi}{2\hbar c}), \quad /17/$$

/J₀ и J₁ - функции Бесселя/. Согласно оптической теореме, полное сечение дифракции

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} f(0) = 4\pi a^2 \sin^2 \frac{e\phi}{2\hbar c} \quad /18/$$

Очевидно, формула /16/ справедлива для любого тонкого соленоида, свернутого в плоскую кривую, перпендикулярную импульсу частицы. Заметим, что выражение

$$f_{\text{диф}} = \frac{ik}{2\pi} \iint e^{-i\vec{q}\vec{\rho}} d^2\rho \quad /19/$$

совпадает с амплитудой дифракции на черном экране. Следовательно:

$$f(\vec{q}) = (1 - \exp(i\frac{e\phi}{\hbar c})) f_{\text{диф}}(\vec{q}) \quad /20/$$

Полное сечение дифракции равно

$$\sigma = 4S \sin^2 \frac{e\phi}{2\hbar c} \quad /21/$$

где S - площадь "дыры" соленоида Σ.

Если волновой вектор \vec{k} составляет некоторый угол β с нормалью \vec{n} к плоскости соленоида, то

$$\begin{aligned} f(\vec{q}) &= \frac{(\vec{k}\vec{n})}{2\pi i} (\exp(i\frac{e\phi}{\hbar c}) - 1) \iint_{\Sigma} e^{-i\vec{q}\vec{r}} dS = \\ &= \frac{k}{2\pi i} (\exp(i\frac{e\phi}{\hbar c}) - 1) (\iint_{\Sigma} e^{-i\vec{q}\vec{\rho}} d^2\rho) \end{aligned} \quad /22/$$

/интегрирование во второй формуле проводится по проекции "дыры" Σ на плоскость (xy), перпендикулярную импульсу/. Полное сечение рассеяния

$$\sigma = 4S \sin^2 \frac{e\phi}{2\hbar c} \cos^2 \beta \quad /23/$$

Мы видим, что характер дифракционной картины /положение максимумов и минимумов/ зависит только от формы

и ориентации соленоида, в то время как вероятность отклонения частицы от первоначального направления движения описывается множителем $\sin^2 \frac{e\phi}{2\hbar c}$. Легко видеть,

что эффект остается и при сильных флуктуациях магнитного потока; в этом случае

$$\overline{\sin^2 \frac{e\phi}{2\hbar c}} = \frac{1}{2}$$

При рассеянии частиц с зарядом, равным заряду электрона, на сверхпроводящем соленоиде, магнитный поток которого содержит нечетное число квантов, эффективное сечение принимает максимальное из возможных значений

($\sin^2 \frac{e\phi}{2\hbar c} = 1$) ; если магнитный поток соленоида содержит

четное число квантов, дифракция отсутствует.

5. РАССЕЯНИЕ НА ЭКРАНИРОВАННОМ СОЛЕНОИДЕ

Следует подчеркнуть, что рассмотренное нами рассеяние заряженных частиц на замкнутом тонком соленоиде фактически не зависит от поведения волновой функции в узкой пространственной области, в которой сосредоточено магнитное поле. Вклад этой области имеет порядок величины $b/a \ll 1$, и при расчетах мы его не учитывали. В частности, если перед соленоидом поставить тонкое поглощающее кольцо, не пропускающее заряженные частицы, то дифракция на такой системе будет по-прежнему описываться формулами предыдущего параграфа.

В этом случае непосредственно внутри соленоида волновая функция близка к нулю, и тем не менее магнитное поле влияет на рассеяние, т.е. мы снова сталкиваемся с проявлением эффекта Бома-Ааронова.

Предположим теперь, что замкнутый соленоид произвольных размеров и формы помещен за "черным"

экраном Σ_1 , имеющим отверстие Σ_2 , находящееся целиком внутри проекции "дыры" соленоида на плоскость экрана. Если на такую систему направить пучок заряженных частиц, то в области локализации магнитного поля волновая функция будет близка к нулю. Однако при условии, что ширина волнового пакета существенно превышает размеры экрана, сечение рассеяния будет зависеть от магнитного потока внутри соленоида, причем характер изменения дифракционной картины по сравнению со случаем отсутствия магнитного поля в соленоиде определяется размерами и формой отверстия. В частности, если пучок направлен перпендикулярно плоскости экрана и длина волны λ гораздо меньше размеров отверстия, амплитуда рассеяния имеет вид

$$f(\vec{q}) = f_{\Sigma_1}(\vec{q}) - f_{\Sigma_2}(\vec{q}) \exp(i \frac{e\phi}{\hbar c}), \quad /24/$$

где величины

$$f_{\Sigma_1(\Sigma_2)}(\vec{q}) = i \frac{k}{2\pi} \iint_{\Sigma_1(\Sigma_2)} e^{-i\vec{q}\vec{\rho}} d^2\rho$$

совпадают с амплитудами дифракции на сплошных, полностью поглощающих экранах, имеющих соответственно форму Σ_1 и Σ_2 . Полное сечение упругого рассеяния легко получить с помощью оптической теоремы, если учесть, что сечение поглощения на кольцеобразном "черном" экране равно его площади ($S_1 - S_2$). В результате находим

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{4\pi}{k} \text{Im} f(0) - (S_1 - S_2) = \\ &= S_1 + S_2 - 2S_2 \cos \frac{e\phi}{\hbar c}. \end{aligned} \quad /25/$$

Очевидно, $S_1 - S_2 \leq \sigma \leq S_1 + 3S_2$, т.е., меняя магнитный поток в соленоиде, мы можем в широких пределах изменять вероятность дифракции. При больших флуктуациях магнитного потока $\sigma = S_1 + S_2$. В частности, если экран представляет собой плоское кольцо, внешний и внутренний радиусы которого равны соответственно R и r , формула /24/ дает ($\theta \ll 1$)

$$f(\theta) = \frac{R}{\theta} J_1(kR\theta) - \frac{r}{\theta} J_1(kr\theta) \cos\left(\frac{e\phi}{\hbar c}\right). \quad /26/$$

Следует подчеркнуть, что, если волновой пакет распространяется целиком внутри "дыры" соленоида или вне этой "дыры", частица "не чувствует" магнитного поля и рассмотренные выше дифракционные эффекты отсутствуют. Точно так же, коль скоро оба когерентных пучка заряженных частиц проходят либо внутри, либо вне "дыры" соленоида, магнитное поле не влияет на интерференцию этих пучков.

Для того чтобы магнитное поле сказывалось на поведении частиц, находящихся в области, свободной от поля, необходимо, чтобы, во-первых, пространственная область локализации волновых пакетов была двусвязной и, во-вторых, магнитный поток через любое сечение "трубки", разрезающей данную область, был отличен от нуля. Этот вывод согласуется с общим анализом, проведенным в работе /7/.

Таким образом, эффект Бома-Ааронова является чисто квантовым и не имеет аналога в классической физике.

6. РАССЕЙНИЕ НА ЗАМКНУТОМ СОЛЕНОИДЕ В БОРНОВСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

В заключение рассмотрим рассеяние заряженных частиц на тонком замкнутом соленоиде произвольной формы в рамках теории возмущений. В приближении, линейном по заряду, амплитуда рассеяния описывается формулой Борна с взаимодействием

$$\hat{U} = -\frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} + i \frac{e\hbar}{2mc} \text{div} \vec{A}, \quad /27/$$

где $\vec{v} = \frac{\hbar \vec{k}}{m}$ - начальная скорость частицы, m - ее масса.

Условие применимости борновского приближения к рассматриваемой задаче имеет вид

$$\frac{e\phi}{\hbar c} \ll 1. \quad /28/$$

С учетом соотношений /5/ или /9/ /результат, естественно, не зависит от калибровки вектора-потенциала/ находим

$$f(\vec{q}) = \frac{1}{4\pi} \frac{e\phi}{\hbar c} [(k\vec{n}) + (k'\vec{n})] \iint_{\Sigma} e^{-i\vec{q}\vec{r}} dS. \quad /29/$$

Здесь \vec{k} и $\vec{k}' = \vec{k} + \vec{q}$ - волновые векторы частицы до и после рассеяния, \vec{n} - нормаль к плоскости соленоида, Σ - участок этой плоскости, ограниченный магнитными силовыми линиями.

Согласно /29/, амплитуда рассеяния на 180° строго равна нулю. Если $k \gg 1/\ell$, где ℓ - длина соленоида, рассеяние происходит в основном на малые углы; при этом $k' \approx k$, и выражение /29/ представляет собой предельный случай эйкональной формулы /22/.

При $k \ll 1/\ell$

$$f = \frac{1}{4\pi} \frac{e\phi}{\hbar c} [(k\vec{n}) + (k'\vec{n})] S. \quad /30/$$

В частности, если $\vec{k} \parallel \vec{n}$, то

$$f(\theta) = \frac{1}{4\pi} k S \frac{e\phi}{\hbar c} (1 + \cos\theta), \quad /31/$$

а полное сечение рассеяния

$$\sigma = \frac{1}{3\pi} k^2 S^2 \left(\frac{e\phi}{\hbar c}\right)^2. \quad /32/$$

Если соленоид имеет форму тонкого тора с радиусом "дыры" a , борновская амплитуда принимает вид

$$f(\vec{q}) = a \frac{e\phi}{\hbar c} J_1(a\sqrt{q^2 - (\vec{q}\vec{n})^2}) \frac{1}{(q^2 - (\vec{q}\vec{n})^2)^{1/2}} \frac{\vec{k}\vec{n} + \vec{k}'\vec{n}}{2}. \quad /33/$$

В случае $\vec{k} \parallel \vec{n}$

$$f(\theta) = \frac{ka}{2} \frac{e\phi}{\hbar c} J_1(k|\sin\theta|a) \frac{1}{ka|\sin\theta|} (1 + \cos\theta). \quad /34/$$

Авторы выражают благодарность Б.Н.Валуеву, В.И.Огневецкому, М.И.Подгорецкому и М.И.Широкову за обсуждение и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aharonov Y., Bohm D. Phys.Rev., 1959, 115, p.485.
2. Aharonov Y., Bohm D. Phys.Rev., 1961, 123, p.1511.
3. Aharonov Y., Bohm D. Phys.Rev., 1963, 130, p.1625.
4. Фейнберг Е.Л. УФН, 1962, 78, с. 53.
5. Erlichson H. Amer. Journ.Phys., 1970, 38, p.162.
6. Peshkin M., et al. Ann.Phys., 1961, 12, p.426.
7. Вайнштейн А.И., Соколов В.В. ЯФ, 1975, 22, с. 618.
8. Тюнин И.В. Препринт ФИАН, №27, Москва, 1974.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. "Наука", М., 1974, §131.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. "Наука", М., 1967, §61.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 декабря 1977 года.