СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 11148

Я.П.Терлецкий

ВИРИАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

1977

P2 - 11148

Я.П.Терлецкий

ВИРИАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Терлецкий Я.П.

Р2 - 11148

Вириальные неравенства

Рассматривается обобщение вириальной теоремы. Исследуется случай, когда потенциальная энергия представляет сумму однородных функций различной степени. Методами статистической физики выводятся вириальные неравенства. Для сил взаимодействия гравитационных (или кулоновских) и короткодействующих сил отталкивания равновесная температура не может превышать вириальную.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Terletsky Ya.P.

P2 - 11148

Virial Inequalities

The generalization of virial theorem is considered. A case is investigated when a potential energy is a sum of uniform functions of different orders. Virial inequalities are derived by methods of statistical physics. For interacting forces of gravitational (or Coulomb's) and short-range forces of repulsion the equilibrium temperature cannot overcome the virial one.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

Общую вириальную теорему

$$2\bar{K} = \sum_{i=1}^{3N} q_i \overline{\frac{\partial U}{\partial q_i}}, \qquad /1/$$

где K и U - кинетическая и потенциальная энергии системы, q_i - обобщенные координаты, справедливую как в классической, так и в квантовой статистической механике /см., например,[1] и [2]/, обычно используют в частном случае, когда потенциальная энергия системы является однородной функцией степени n , т.е. $U = U_n$, где

$$U_n(aq_1, aq_2, \ldots, aq_{3N}) = a^n U_n(q_1, q_2, \ldots, q_{3N}). \qquad /2/$$

В этом случае по теореме Эйлера

$$\sum_{i=1}^{3N} q_i \frac{\partial U_n}{\partial q_i} = nU_n , \qquad /3/$$

откуда согласно /1/

$$2\bar{K} = n\bar{U}_n . \qquad /4/$$

В случае чисто гравитационного или кулоновского взаимодействия между частицами $n = -1$ и согласно /4/ получаем известное соотношение

$$2\bar{K}+\bar{U}=0\,, \qquad \text{или} \qquad \bar{K}=\frac{|\bar{U}|}{2}\,, \qquad /5/$$

широко используемое в астрофизике /см., например, [3] / и обычно называемое теоремой о вириале.

Для более общего случая, если

$$U=\sum_n U_n\,, \qquad /6/$$

согласно /1/ и /2/ имеем

$$2\bar{K}=\sum_n \sum_{i=1}^{3N} \overline{q_i\frac{\partial U_n}{\partial q_i}}=\sum_n n\,\bar{U}_n\,, \qquad /7/$$

или

$$\bar{E}=\sum_n\left(1+\frac{n}{2}\right)\bar{U}_n\,, \qquad /8/$$

где $E=K+U$ - полная внутренняя энергия системы. Соотношения /7/ или /8/ не могут быть, однако, непосредственно использованы для термодинамических предсказаний, т.к. в макроскопическом опыте не выделяются отдельные $\bar{U}_n$ и нет способа определить их отношения. Однако в отдельных случаях соотношение /8/ приводит к вириальным неравенствам для $\bar{K}$ и $\bar{U}$, которые могут быть использованы для практических предсказаний.

Пусть система состоит из частиц гравитационно или кулоновски взаимодействующих на больших взаимных расстояниях и расталкивающихся короткодействующими силами на малых расстояниях. Положим, например,

$$U=U_{-1}+U_{-n}\,, \qquad /9/$$

где $n \gg 1$ и $U_{-n}>0$./При $n\to\infty$ это модель жестких гравитирующих шариков/. В этом случае согласно /7/ и учитывая, что $\bar{U}_{-1}>0$, имеем

$$2\bar{K}+\bar{U}<0 \qquad /10/$$

или

$$\bar{E}<\frac{\bar{U}}{2}\,. \qquad /11/$$

Поскольку для гравитирующих систем $U_{-1}=U_{гр}<0$, а $U_{-n}>0$, постольку /10/ можно записать также в виде

$$2\bar{K}+\bar{U}_{гр}<0\,, \quad \text{или} \quad \bar{K}<\frac{|\bar{U}_{гр}|}{2}\,. \qquad /12/$$

Эти неравенства заменяют обычно используемые в астрофизике соотношения /5/.

Для достаточно горячих газовых систем, для которых справедлива классическая статистика,

$$K=\frac{3}{2}kNT$$

/где N - число частиц, k - постоянная Больцмана, T - абсолютная температура/, и поэтому из /12/ следует

$$T<T_{вир}=\frac{|\bar{U}_{гр}|}{3kN}\,, \qquad /13/$$

т.е. равновесная температура не может превышать вириальную температуру $T_{вир}$.

Для космических тел $T_{вир}$ можно оценить, грубо считая их плотность постоянной, т.е. полагая

$$|\bar{U}_{гр}|=G\frac{3M^2}{5r}\,, \qquad /14/$$

где M и r - масса и радиус тела, G - гравитационная постоянная. Таким образом,

$$T_{вир}\simeq\frac{GM^2}{5rkN}=\frac{GMm}{5rk}\,, \qquad /15/$$

где m - средняя масса одной частицы, входящей в состав космического тела.

Согласно /15/ нетрудно подсчитать, что для Солнца, Земли и Луны равновесная температура не может превышать соответственно $5\cdot10^6$, $5\cdot10^4$ и 1500 градусов Кельвина.

ЛИТЕРАТУРА

1. Терлецкий Я.П. *Статистическая физика*, стр. 87-90, Изд. "Высшая школа", М., 1973.
2. Давыдов А.С. *Квантовая механика*, стр. 68, ГИФМЛ, М., 1963.
3. Чандрасекар С. *Введение в учение о строении звезд*. стр. 93, ИЛ, М., 1950.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 декабря 1977 года.