СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 11144

Х.Намсрай

КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ В СТОХАСТИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ВРЕМЕНИ

1977

P2 - 11144

Х.Намсрай

КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ В СТОХАСТИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ВРЕМЕНИ

Намсрай Х. Р2 - 11144

Классическая теория в стохастическом пространстве и времени

Показано, что гипотеза о стохастическом свойстве времени в классической теории эквивалентна понятию стохастического процесса в конфигурационном пространстве, исследованного К.Скагерстамом.

В рамках данного подхода были получены уравнения Фоккера-Планка, Смолуховского и Шредингера. Два независимых способа получения уравнения Шредингера в рамках стохастических свойств времени и пространства позволили установить соотношение

$$m\frac{\langle a^2\rangle}{\langle r\rangle} = h,$$

где m - масса электрона, $\langle r\rangle$ - математическое ожидание случайного времени r и $\langle a^2\rangle$ - дисперсия случайных координат $\hat{x}$. Это соотношение, по-видимому, может быть справедливо для любых элементарных частиц с массой m.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Namsrai Kh. P2 - 11144

Classical Theory in Stochastic Space and Time

It is demonstrated that the introduction of the hypothesis about stochastic property of time in classical theory is equivalent to stochastic processes in configuration space, investigated by K.Skagerstman.

Within this method, there were obtained the equations of Fokker-Planck, Smoluchowski and Schrödinger. Two independent methods of the derivation of the Schrödinger equation within the stochastic properties of time and space allowed us to determine the correlation

$$m\frac{\langle a^2\rangle}{\langle r\rangle} = h,$$

where m is the electron mass, $\langle r\rangle$, mathematical expectation of the random time r; and $\langle a^2\rangle$ is dispersion of the co-ordinates $\hat{x}$ one.

This ratio may be suitable for any elementary particles with the mass m.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

В последние годы стохастическим процессам и стохастическим свойствам пространства и времени уделяют все большее внимание. Это связано с двумя обстоятельствами. Во-первых, введение понятий стохастических процессов как в конфигурационном [1], так и в фазовом пространствах [2] приводит к основным уравнениям квантовой механики, что очень важно для дальнейшего понимания некоторых ее положений, таких как соотношение неопределенностей, проблема измерений и т.д. Во-вторых, по мере решения проблемы устранения ультрафиолетовой расходимости в матричных элементах S -матрицы выяснилось, что трудности, встречающиеся в локальной квантовой теории поля, могут быть связаны с неполнотой наших знаний о свойствах пространства и времени в малом масштабе.

Предполагается, что геометрия в малом масштабе существенно отличается от геометрии плоского пространства Минковского. Это, естественно, привело к новому направлению в развитии квантовой теории, основанному на формулировке теории поля в различных пространствах и времени. В частности, такими пространствами являются пространство Де Ситтера [3] и стохастическое пространство [4]. Отличие этих пространств от пространства Минковского заключается в том, что в теории появляется некоторый параметр, а именно параметр размерности длины, названный фундаментальной длиной, величина которой, по-видимому, будет играть важную роль в будущей теории микромира.

В настоящее время проявляется определенный интерес к применению методов теории вероятностей и статистической физики в конструктивной теории квантованных полей[5].

Таким образом, введение понятий стохастических процессов в квантовую теорию происходило на двух уровнях. Ранее нами[6] была построена градиентно-инвариантная квантовая электродинамика частиц со спином 0,1/2 и 1 в стохастическом пространстве $\Gamma_4(\hat{x})$, определенном в работе[7] Д.И.Блохинцева. Некоторые результаты, полученные на этом пути, побудили нас постулировать стохастичность пространства-времени в самой классической теории и исследовать следствия, к которым приведет наш постулат.

Настоящая работа посвящена этому вопросу. Здесь мы будем применять простой математический расчёт, не прибегая к деталям технического и математического характера.

СТОХАСТИЧЕСКОЕ ВРЕМЯ

Предположим, что время t является стохастической переменной $\hat{t}$. Разделим величину $\hat{t}$ на две части:

1. t – регулярная (обычное время);
2. τ – стохастическая, с некоторым распределением $W(\tau/T)$,

$$\int d\tau\, W(\tau/T) = 1 \qquad (0 \le \tau \le 2T),$$

где T – малый параметр размерности времени, величина которого будет определена ниже.

Рассмотрим теперь движение материальной точки по стохастическому времени $\hat{t}$. Траектория частиц определяется непрерывной функцией по t, усредненной по τ. Обозначим ее через $\chi(t)$:

$$\vec{\chi}(t) = \langle \vec{x}(t+\tau)\rangle = \int d\tau\, W(\tau/T)\vec{x}(t+\tau) =$$
$$= \vec{x}(t) + \dot{\vec{x}}\langle\tau\rangle + \ddot{\vec{x}}\frac{1}{2}\langle\tau^2\rangle + \ldots \qquad (1)$$

По определению скорость частицы равна

$$\vec{v}_t \overset{def}{=} \left\langle \left(\frac{\vec{x}(\hat{t}) - \vec{x}(t)}{\tau} \right) \right\rangle = \left\langle \frac{\delta\vec{x}(t,\tau)}{\tau} \right\rangle = \vec{v}_0 + \vec{v}_s ,$$

где $v_0 = \dfrac{d\vec{x}(t)}{dt}$ – обычная и v_s – стохастическая скорость частицы.

Построим некоторые дифференциальные операторы, необходимые в дальнейшем. Для этого рассмотрим достаточно гладкую функцию $f(\vec{x}(t),t)$ по $\vec{x}(t)$ и t. В случае стохастического времени $\hat{t}$ ее величина принимает вид

$$f(\vec{x}(t+\tau), t+\tau) = f(\vec{x}(t) + \delta\vec{x}(t,\tau), t+\tau) = f(\vec{x},t) + \frac{\partial f}{\partial t}\cdot\tau +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial\vec{x}}\delta\vec{x}(t,\tau) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}[\delta\vec{x}(t,\tau)]^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\tau^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial\vec{x}\partial t}\delta\vec{x}(t,\tau)\tau .$$

Определим дифференциальный оператор D следующим равенством:

$$Df(\vec{x}(t),t) = \left\langle \frac{f(x(\hat{t}),\hat{t}) - f(x(t),t)}{\tau} \right\rangle = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial\vec{x}}\left\langle\frac{\delta\vec{x}(t,\tau)}{\tau}\right\rangle +$$
$$+ d\vec{\nabla}^2 f + \frac{1}{2}\langle\tau\rangle\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{1}{2}\langle\delta\vec{x}(t,\tau)\rangle\frac{\partial^2 f}{\partial\vec{x}\,\partial t}, \qquad (2)$$

где из выражения (1) видно, что

$$\langle\delta\vec{x}(t,\tau)\rangle = \langle\vec{x}(\hat{t}) - \vec{x}(t)\rangle = \vec{v}_0\langle\tau\rangle + O(\langle\tau^2\rangle),$$

$$\left\langle\frac{\delta\vec{x}(t,\tau)}{\tau}\right\rangle = \vec{v}_{tot}, \qquad d = \frac{1}{2}\left\langle\frac{\delta^2\vec{x}(t,\tau)}{\tau}\right\rangle .$$

Перепишем равенство (2) в более удобном виде

$$Df(\vec{x}(t),t) = [D_c + D_s + \frac{1}{2}\langle\tau\rangle D_t] f(\vec{x}(t),t). \qquad (3)$$

Здесь

$$D_c = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_0\vec{\nabla} \quad , \quad D_s = \vec{v}_s\vec{\nabla} + d\vec{\nabla}^2$$

и

$$D_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \vec{v}_0 \frac{\partial^2}{\partial \vec{x}\,\partial t}.$$

Отсюда видим, что D_c соответствует дифференцированию по времени в теории гидродинамики, а последние два члена в выражении (3) обращаются в нуль, если пренебречь стохастичностью времени.

УРАВНЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Для того чтобы получить уравнение непрерывности для плотности вероятностей мы рассмотрим следующее выражение:

$$E(f(\vec{x}(t),t)) = \int_R d\vec{x}\{f(\vec{x}(t),t) + \langle f(\vec{x},t+\tau) - f(\vec{x},t+\frac{\tau}{2})\rangle\}\rho(\vec{x},t).$$

В пределе $(\tau \to 0)$ это равенство переходит в обычное математическое ожидание для $f(x,t)$. Предположим, что соответствующая ей физическая величина сохраняется во времени, т.е.

$$\frac{d}{dt}\int f(\vec{x},t)\rho(\vec{x},t)d\vec{x} = 0.$$

Естественным обобщением этого уравнения в случае $\tau \neq 0$ является

$$\frac{d}{dt}\int d\vec{x}\{f(x,t) + \langle f(\vec{x},t+\tau)\rangle - \langle f(\vec{x},t+\frac{\tau}{2})\rangle\}\rho(x,t) = \tag{4}$$

$$= \frac{d}{dt}\int d\vec{x}\rho(\vec{x},t)[f(x,t) + \frac{\langle\tau\rangle}{2}\frac{\partial f}{\partial t}] = 0.$$

Рассмотрим теперь выражение

$$E(Df(x,t)) = \int d\vec{x}\rho(\vec{x},t)Df(\vec{x},t). \tag{5}$$

Принимая во внимание формулу (2) и сделав интегрирование по частям, получим

$$\int d\vec{x}\rho(\vec{x},t)Df(\vec{x},t) = \int d\vec{x}\rho(\vec{x},t)\{\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}_t\frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + d\nabla^2 f +$$

$$+ \frac{1}{2}\langle\tau\rangle\frac{\partial^2 f}{\partial t} + \frac{1}{2}\langle\tau\rangle\vec{v}_0\frac{\partial^2 f}{\partial\vec{x}\,\partial t}\} = \int\{\frac{\partial}{\partial t}[f(\vec{x},t)\rho(x,t) +$$

$$+ \frac{\langle\tau\rangle}{2}\frac{\partial f(\vec{x},t)}{\partial t}\rho] - f(\vec{x},t)\frac{\partial\rho(\vec{x},t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial\vec{x}}(\vec{V}_t\rho(\vec{x},t))f(\vec{x},t) +$$

$$+ d\frac{\partial^2\rho(\vec{x},t)}{\partial\vec{x}^2}f(\vec{x},t) + \frac{\partial f(\vec{x},t)}{\partial t}\frac{\langle\tau\rangle}{2}[-\frac{\partial\rho(\vec{x},t)}{\partial t} -$$

$$- \frac{\partial}{\partial\vec{x}}(\vec{V}_0\rho(\vec{x},t))]\}d\vec{x}.$$

Здесь мы положили, что d – постоянная величина.

Естественное расширение понятия о сохраняющейся величине состоит в том, что выражение (5) должно обращаться в нуль. Тогда, опуская пространственную и временную зависимости и применяя (4), имеем

$$\frac{d}{dt}\int d\vec{x}\rho(\vec{x},t)[f(\vec{x},t) + \frac{\langle\tau\rangle}{2}\frac{\partial f(\vec{x},t)}{\partial t}] = \int d\vec{x}\{f(\vec{x},t)[\frac{\partial\rho}{\partial t} +$$

$$+ \vec{\nabla}(\vec{v}_t\rho) - d\nabla^2\rho] + \frac{\langle\tau\rangle}{2}\frac{\partial f(\vec{x},t)}{\partial t}[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\vec{v}_0\rho)]\} = 0.$$

Отсюда, в силу произвольных $f(\vec{x},t)$ и $\frac{\partial f}{\partial t}$, получим уравнение типа Фоккера–Планка и уравнение непрерывности для плотности вероятностей $\rho(\vec{x},t)$, соответственно:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\vec{v}_t\rho) - d\nabla^2\rho = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}(\vec{v}_0\,\rho)=0. \qquad (7)$$

Из этих двух уравнений следует, что

$$\vec{\nabla}\rho\,\vec{v}_s-d\nabla^2\rho=0. \qquad (8)$$

Последнее уравнение дает, хотя это не тривиально, следующее выражение для v_s:

$$\vec{v}_s=d\,\vec{\nabla}\ln\rho\,(\vec{x},t)\,. \qquad (9)$$

ПРОЦЕССЫ ЭЙНШТЕЙНА И де БРОЙЛЯ

В рамках нашего формализма исследуем процессы Эйнштейна (броуновское движение) и де Бройля (соответствующий уравнению Шредингера).

Процесс Эйнштейна

Сначала рассмотрим движение броуновской частицы без внешнего поля. В этом случае не существует выделенного направления в пространстве, а результирующая (полная)скорость частицы равняется нулю, т.е. $\vec{v}_0=-\vec{v}_s$.

Из уравнения (9) следует, что

$$\vec{v}_0=-d\,\vec{\nabla}\ln\rho\,(\vec{x},t), \qquad (10)$$

тогда уравнение Фоккера-Планка (6) приобретает вид уравнения диффузии

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}-d\nabla^2\rho=0. \qquad (11)$$

Заметим, что это уравнение можно получить также с помощью уравнений (7) и (10).

Далее, предполагая, что существует некоторая диссипативная сила типа $\vec{f}=m\beta\vec{v}_t$, получаем уравнение Смолуховского

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{-1}{m\beta}\,\vec{\nabla}(\vec{f}\rho)+d\nabla^2\rho\,, \qquad (12)$$

которое, как известно, описывает движение броуновской частицы во внешнем силовом поле.

Процесс де Бройля

Перейдем теперь к изучению динамических уравнений в рамках нашей схемы. Следуя работе [8], чтобы получить выражение для величины ускорения частицы, мы должны симметризовать либо антисимметризовать искомую формулу при преобразовании временного сдвига, т.е. при инверсии времени.

Формально операция временного сдвига в стохастических величинах получается с помощью замены $\tau\to-\tau$. Тогда из уравнений (1), (2) и (3) видно, что $\vec{v}_s\to-\vec{v}_s$, $d\to-d$, $D_s\to-D_s$ с точностью до второго порядка малости $O(\langle\tau^2\rangle)$.

Таким образом, в нашем случае в качестве ускорения частицы можно взять следующие четыре различные линейные комбинации с определенной чётностью при преобразовании инверсии времени:

$$\frac{1}{2}\{D\,[\vec{v}_0+\vec{v}_s]+D(\tau\to-\tau)\,[\vec{v}_0-\vec{v}_s]\}=D_c\vec{v}_0+D_s\vec{v}_s\,,$$

$$\frac{1}{2}\{D\,[\vec{v}_0+\vec{v}_s]-D(\tau\to-\tau)[\vec{v}_0-\vec{v}_s]\}=D_c\vec{v}_s+D_s\vec{v}_0\,,$$

$$\frac{1}{2}\{D\,(\tau\to-\tau)\,[\vec{v}_0+\vec{v}_s]+D\,[\vec{v}_0-\vec{v}_s]\}=D_c\vec{v}_0-D_s\vec{v}_s\,,$$

$$\frac{1}{2}\{D(\tau\to-\tau)\,[\vec{v}_0+\vec{v}_s]-D\,[\vec{v}_0-\vec{v}_s]\}=D_c\vec{v}_s+D_s\vec{v}_c\,.$$

Здесь мы пренебрегли величиной $\frac{1}{2}\langle\tau\rangle D_t[\dots]$ более высокого порядка малости, чем $D_c[\ldots]$ и $D_s[\ldots]$. Отсюда имеем три различных динамических уравнения:

$$\vec{F}_\theta = m(D_c \vec{v}_0 - \theta D_s \vec{v}_s), \quad \theta = \pm 1, \tag{13}$$

$$\vec{f} = m(D_c \vec{v}_s + D_s \vec{v}_0), \tag{14}$$

где $\vec{F}_\theta$ и $\vec{f}$ – некоторые силы, m – масса частицы. Используя явный вид операторов D_c и D_s, перепишем динамические уравнения (13) в виде

$$F_\theta = m\left(\frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} + (\vec{v}_0 \vec{\nabla})\vec{v}_0 - \theta((\vec{v}_s \vec{\nabla}) + d\nabla^2)\vec{v}_s\right). \tag{15}$$

Принимая во внимание выражения (9) для стохастической скорости и уравнения непрерывности (7), имеем

$$\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} + d\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{v}_0) + \vec{\nabla}(\vec{v}_0 \vec{v}_s) = 0. \tag{16}$$

Итак, мы получили системы уравнения (15) и (16), исследованные в работе [1].

Автор этой работы показал, что данные системы уравнений эквивалентны уравнениям Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_+}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \Psi_+ + \Phi\Psi_+ ,$$

$$-i\hbar \frac{\partial \Psi_-}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \Psi_- + \Phi\Psi_- ,$$

если положить $\theta = 1$, $d = \frac{\hbar}{2m}$. Здесь

$$\Psi_\pm(\vec{x},t) \overset{def}{=} \exp(R(\vec{x},t))\exp\left\{\frac{\pm S(\vec{x},t)}{2(-\theta)^{1/2}\, md}\right\},$$

$$\exp(R(x,t)) \overset{def}{=} (\rho(\vec{x},t))^{1/2} ,$$

$$m\vec{v}_0(\vec{x},t) = \vec{\nabla} S(\vec{x},t).$$

Мы не будем доказывать это, поскольку К.Скагерстам подробно изложил метод своего доказательства. Таким образом, наш подход совершенно эквивалентен понятию стохастического процесса в конфигурационном пространстве, исследованного К.Скагерстамом. Им были рассмотрены некоторые интересные примеры и приложения, которые легко могут быть получены в нашем случае.

Теперь определим значение параметра T, характеризующего меру стохастичности времени. По определению,

$$d = \frac{1}{2}\left\langle \frac{\delta^2 \vec{x}(t,\tau)}{\tau} \right\rangle = \frac{1}{2} v_0^2 \langle \tau \rangle + O(\langle \tau^2 \rangle),$$

где v_0 – скорость частицы, которую можно отождествить со скоростью электрона в атоме. Т.к. выше мы полагали, что $d = \mathrm{const}$, следовательно, $v_0 = \mathrm{const}$, а именно $v_0 = \frac{e^2}{\hbar}$. С другой стороны, $d = \frac{\hbar}{2m}$. Отсюда

$$\frac{\hbar}{2m} = \frac{e^4}{2\hbar^2}\langle \tau \rangle = \frac{e^4}{2\hbar^2}\int_0^{2T} d\tau \cdot \tau\, W(\tau/T). \tag{17}$$

Вводя безразмерную функцию распределения $w(\tau) = TW(\tau)$, получаем

$$T_0 = \frac{\hbar}{mc}\,\frac{1}{c\delta}\,\frac{1}{\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2} = \frac{3{,}86}{3}\,\frac{1}{\alpha^2\delta}\cdot 10^{-21} = \frac{2{,}4}{\delta}\cdot 10^{-17}\,c,$$

где

$$\delta = \int d\rho\, \rho W(\rho).$$

Тогда степень отклонения стохастического времени от обычного равна

$$\langle \hat{t} \rangle - t = \langle \tau \rangle_0 = 2{,}4\cdot 10^{-17} c \tag{18^a}$$

и не зависит от форм распределения $W(\rho)$.

В классических явлениях можно не учитывать эту величину, однако в квантовых процессах, происходящих с интервалом времени $\tau \lesssim T$, нельзя пренебрегать стохастическими эффектами. Следует отметить, что полученные значения для T , – это еще не предел возможных мер стохастичности, т.к. существует другая постоянная для скорости частицы, а именно $v_0 = c$, при этом T принимает значение

$$T_1 \sim \frac{3{,}86}{3\delta}\, 10^{-21}\ \text{с}$$

и

$$\langle \hat{t} \rangle - t = \langle t \rangle_1 = 1{,}3 \cdot 10^{-21}\ \text{с} = \frac{\hbar}{mc^2} \qquad (18)$$

для электрона.

В таблице показаны значения T_0 и T_1 при различных функциях распределения $w(\rho)$.

Для того чтобы выяснить вопрос о том, какую роль будут играть эти две величины T_0 и T_1 в квантовых явлениях, попытаемся получить уравнение Шредингера прямым способом, основанным на гипотезе о стохастичности времени и пространства, а затем сравнить полученные результаты с предыдущими при значениях T_0 и T_1 (или же $\langle\tau\rangle_0$ и $\langle\tau\rangle_1$).

Перейдем к обсуждению этого вопроса.

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВО И ВРЕМЯ, УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

Предположим, что пространство, так же как и время, обладает стохастическим свойством и координаты его определяются следующим образом:

$$\hat{\vec{x}} = \vec{x} + \vec{\sigma}\, a, \qquad (19)$$

где $\vec{\sigma}$ – совершенно произвольные величины (они могут быть векторами, матрицами, комплексными числами и т.д.); a – амплитуда флуктуации с распределением $w(a/L)$, удовлетворяющим условиям:

Таблица

$W(\frac{\tau}{T})$; $\int_0^{2T} d\tau\, W(\frac{\tau}{T}) = 1$, $(0 \le \tau \le 2T)$	T_0 T_1	$W(\frac{a}{L})$; $\int_{-L}^{L} da\, W(\frac{a}{L}) = 1$ $(-L \le a \le L)$	L_0 L_1
$\frac{3}{4T}\left(1 - \frac{(T-\tau)^2}{T^2}\right)$	$2{,}4 \cdot 10^{-17}$ с $1{,}3 \cdot 10^{-24}$ с	$\frac{3}{4L}\left(1 - \frac{a^2}{L^2}\right)$	$1{,}2 \cdot 10^{-8}$ см $8{,}6 \cdot 10^{-11}$ с
$\frac{1}{2\sqrt{\pi}\, T\, \Phi(\sqrt{2}/2)}\, e^{-\frac{(T-\tau)^2}{4T^2}}$	$2{,}4 \cdot 10^{-17}$ с $1{,}3 \cdot 10^{-24}$ с	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \frac{1}{L}\, e^{-\frac{a^2}{2L^2}}$ $(-\infty < a < \infty)$	$0{,}53 \cdot 10^{-8}$ с $3{,}86 \cdot 10^{-11}$ с
$\frac{1}{T}\left(1 - \frac{\lvert T-\tau \rvert}{T}\right)$	$2{,}4 \cdot 10^{-17}$ с $1{,}3 \cdot 10^{-24}$ с	$\frac{1}{L}\left(1 - \frac{\lvert a \rvert}{L}\right)$	$1{,}3 \cdot 10^{-8}$ см $9{,}4 \cdot 10^{-11}$ см
$\frac{1}{T^2}\lvert T - \tau \rvert$	$2{,}4 \cdot 10^{-17}$ м $1{,}3 \cdot 10^{-24}$ с	$\frac{1}{L^2}\lvert a \rvert$	$0{,}74 \cdot 10^{-8}$ см $5{,}4 \cdot 10^{-11}$ см

$$\int da\, w(a/L) = 1 \quad \text{и} \quad \int\limits_{(|a|\le L)} da\cdot a\, w(a/L) = 0, \qquad (20)$$

т.е.
$$\langle \hat{\vec{x}} \rangle = \vec{x} \ .$$

Здесь L – параметр размерности длины.

Перейдем теперь к изучению комплексных значений функции $\Psi(\hat{\vec{x}}, \hat{t})$ в стохастическом пространстве (19) и времени $\hat{t}$. Покажем, что если $\Psi^*(\hat{\vec{x}}, \hat{t})$ и $\Psi(\hat{\vec{x}}, \hat{t})$ удовлетворяют условию

$$\int d\vec{x}\, \Psi^*(\vec{x}, t)\, \Psi(\vec{x}, t) = \int d\vec{x} \langle \Psi^*(\hat{\vec{x}}, \hat{t})\rangle \langle \Psi(\hat{\vec{x}}, \hat{t})\rangle = 1 ,$$

то $\Psi^*(\hat{\vec{x}}, \hat{t})$ и $\Psi(\hat{\vec{x}}, \hat{t})$ подчиняются уравнениям Шредингера.

Вычислим среднее значение $\langle \Psi(\hat{\vec{x}}, \hat{t})\rangle$. Полагая, что $\vec{\sigma} = \text{const} = \sqrt{-i}$, и учитывая условия (20), получаем

$$\langle \Psi(\hat{\vec{x}}, \hat{t})\rangle \simeq \Psi(\vec{x}, t) + \frac{\partial \Psi}{\partial t}\langle \tau \rangle - \frac{i\langle a^2 \rangle}{2} \nabla^2 \Psi + O(\langle \tau^2 \rangle),$$

$$\langle \Psi^*(\hat{\vec{x}}, \hat{t})\rangle \simeq \Psi^*(\vec{x}, t) + \frac{\partial \Psi^*}{\partial t}\langle \tau \rangle + \frac{i\langle a^2 \rangle}{2} \nabla^2 \Psi^* + O(\langle \tau^2 \rangle).$$

Тогда

$$\int d\vec{x} \langle \Psi^*(\hat{\vec{x}}, \hat{t})\rangle \langle \Psi(\hat{\vec{x}}, \hat{t})\rangle = \int d\vec{x} \{ \Psi^*(\vec{x}, t)\Psi(\vec{x}, t) + \langle \tau \rangle \frac{\partial(\Psi^*\Psi)}{\partial t} -$$
$$- \frac{i}{2}\langle a^2 \rangle [\Psi^* \nabla^2 \Psi - \nabla^2 \Psi^* \Psi] + \frac{\partial \Psi^*}{\partial t}\langle \tau \rangle [\langle \tau \rangle \frac{\partial \Psi}{\partial t} - i\frac{\langle a^2 \rangle}{2} \nabla^2 \Psi] +$$
$$+ \frac{\partial \Psi}{\partial t}\langle \tau \rangle [\frac{\partial \Psi^*}{\partial t}\langle \tau \rangle + \frac{i\langle a^2 \rangle}{2} \nabla^2 \Psi^*] +$$
$$+ \frac{1}{4}\langle a^2 \rangle \langle a^2 \rangle \nabla^2 \Psi^* \nabla^2 \Psi - \langle \tau \rangle \langle \tau \rangle \frac{\partial \Psi^*}{\partial t}\frac{\partial \Psi}{\partial t} \} = 1 .$$

Отсюда, в силу произвольных функций $\frac{\partial \Psi^*}{\partial t}$ и $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$, имеем

$$\langle \tau \rangle \frac{\partial \Psi}{\partial t} - i\frac{\langle a^2 \rangle}{2} \nabla^2 \Psi = 0,$$

$$\langle \tau \rangle \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} + i\,\frac{\langle a^2 \rangle}{2} \nabla^2 \Psi^* = 0 ,$$

или

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\langle a^2 \rangle}{\langle \tau \rangle} \nabla^2 \Psi , \qquad (21)$$

$$-i\frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\langle a^2 \rangle}{\langle \tau \rangle} \nabla^2 \Psi^* . \qquad (22)$$

Стало быть,

$$\langle \tau \rangle \frac{\partial(\Psi^*\Psi)}{\partial t} - \frac{i}{2}\langle a^2 \rangle [\Psi^* \nabla^2 \Psi - \nabla^2 \Psi^* \Psi] = 0, \qquad (23)$$

т.к. члены $\frac{1}{4}\langle a^2 \rangle \langle a^2 \rangle \nabla^2 \Psi^* \nabla^2 \Psi - \langle \tau \rangle \langle \tau \rangle \frac{\partial \Psi^*}{\partial t}\frac{\partial \Psi}{\partial t}$ более высокого порядка малости и тождественно обращаются в нуль, когда выполняются равенства (21) и (22). Легко видеть, что если положить

$$\frac{\langle a^2 \rangle}{\langle \tau \rangle} = \frac{\hbar}{m} , \qquad (24)$$

то из уравнений (21), (22) и (23) получаем свободные уравнения Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi ,$$
$$-i\hbar \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi^* \qquad (25)$$

для функций Ψ, Ψ^* и уравнение непрерывности

$$-i\frac{\hbar}{2m}\,\mathrm{div}(\Psi^*\,\mathrm{grad}\,\Psi - \mathrm{grad}\,\Psi^* \Psi) + \frac{\partial}{\partial t}(\Psi^* \Psi) = 0,$$

соответственно.

В уравнениях (25) взаимодействие может вводиться формальным приемом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial t} + i/\hbar V(\vec{x},t)$$
$$(\frac{\partial}{\partial t})^* \to \frac{\partial}{\partial t} - i/\hbar V(\vec{x},t) \qquad (26)$$

где $V(\vec{x},t)$– потенциал взаимодействия.

Оказывается, что уравнения (25) после замены (26) будут инвариантны при преобразованиях градиентного типа

$$V(\vec{x},t) \to V(\vec{x},t) + \frac{\partial f(t)}{\partial t},$$
$$\Psi \to \Psi' e^{-i/\hbar f(t)},$$

где $f(t)$ – произвольная функция. Сохраняющаяся величина при этом является постоянной Планка $\hbar$. Возможно, что исследования уравнения Шредингера с точки зрения группового подхода приведут к новым интересным результатам в квантовой механике.

В нашем случае, когда $\vec{\sigma} = \mathrm{const} = \sqrt{-i}$, дисперсия случайной величины $\hat{\vec{x}}$ равна

$$<|\hat{\vec{x}}|^2> - <\hat{\vec{x}}>^2 = <a^2>,$$

т.к.

$$<\hat{\vec{x}}> = \vec{x}, \qquad <|\hat{\vec{x}}|^2> - \vec{x}^2 = <a^2>.$$

Из равенства (24) видно, что каждому значению $<\tau>$ (18^a) и (18) соответствуют величины

$$\sqrt{<a^2>_0} = (\frac{\hbar}{mc})\alpha^{-1} = a_{\infty\,Bohr} = 0{,}53 \cdot 10^{-8}\ \text{см}$$

и

$$\sqrt{<a^2>_1} = \frac{\hbar}{mc} = \lambda_e = 3{,}86 \cdot 10^{-11}\ \text{см}.$$

Таким образом, дисперсия координат $\hat{\vec{x}}$ определяет известные характерные размеры в квантовой механике.

Определим теперь значение параметра L в стохастической теории. Имеем

$$2L^2 \int_0^1 d\rho \cdot \rho^2 w'(\rho) = <a^2> = \frac{\hbar}{m} \frac{1}{<\tau>},$$

где $w'(\rho)$ – безразмерная функция распределения координат в пространстве $\hat{\vec{x}}$.

В таблице приведены также величины

$$L_0 = 0{,}53 \cdot 10^{-8} \frac{1}{\sqrt{2}} [\int_0^1 d\rho\, \rho^2 w'(\rho)]^{-1/2}\ \text{см}$$

и

$$L_1 = 3{,}86 \cdot 10^{-11} \frac{1}{\sqrt{2}} [\int_0^1 d\rho\, \rho^2 w'(\rho)]^{-1/2}\ \text{см}$$

при различных значениях $w'(\rho)$.

Итак, введенное нами понятие стохастичности времени в классической теории приводит к стохастическим процессам в конфигурационном пространстве, исследованном К.Скагерстамом. Два способа получения уравнения Шредингера в рамках предположения стохастических свойств пространства и времени позволили нам установить соотношение

$$m \frac{<a^2>}{<\tau>} = \hbar$$

для электрона, которое, по-видимому, справедливо для любых элементарных частиц с массой m. Разумеется, что последнее утверждение – это лишь гипотеза.

Таким образом, если положить, что

$$<a^2> \sim \lambda^2 \sim [2{,}11 \cdot 10^{-14}]^2\ \text{см}^2, \quad m \to m_p,$$

и

$$<a^2> \sim \ell_w^2 = G^{-1/2}, \qquad m \to m_w = \frac{\hbar}{\ell_w c},$$

то характерное время $<\tau>$ равно

$$<\tau>_p \sim 7 \cdot 10^{-25}\ \text{с}$$

и

$$<\tau>_w \sim 2{,}2 \cdot 10^{-27}\ \text{с},$$

соответственно.

В целом нам кажется, что предлагаемая схема заслуживает дальнейшего изучения.

В заключение автор выражает глубокую благодарность М.Динейхану и З.Омбоо за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Skagerstam Bo-Sture K. Preprint, Institute of Mathematics, Bedford College, London, 1975.

2. Srinivas M.D. Phys.Rev. D, 1977, v. 15, p. 2837.

3. Кадышевский В.Г. и др. В кн.: Материалы IV международного совещания по нелокальным теориям поля, Алушта, СССР. ОИЯИ, Д2-9788, Дубна, 1976.
4. Блохинцев Д.И. ТМФ, 1973, 17, с. 153; Проблемы физики ЭЧАЯ, 1974, 5, с. 606.
5. Саймон Б. Модель P (ϕ_2) евклидовой квантовой теории поля. "Мир", М., 1976.
6. Динейхан М., Намсрай Х. ОИЯИ, Р2-10166, Дубна, 1976.
   Динейхан М., Намсрай Х., Омбоо З. ОИЯИ, Р2-10963, Дубна, 1977.
7. Блохинцев Д.И. ТМФ, 1973, т. 17, вып. 2, с. 153.
8. De La Pena-Auerbach L., Cetto A.M. IF UNAM prepr. 74-6, Instituto de Fisica, Mexico, 1974.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 декабря 1977 года.