ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 11141

Б.М.Барбашов, В.В.Нестеренко, А.М.Червяков

БЕСКОНЕЧНАЯ РЕЛЯТИВИСТСКАЯ СТРУНА, НАГРУЖЕННАЯ ТОЧЕЧНОЙ МАССОЙ

1977

P2 - 11141

Б.М.Барбашов, В.В.Нестеренко, А.М.Червяков

БЕСКОНЕЧНАЯ РЕЛЯТИВИСТСКАЯ СТРУНА, НАГРУЖЕННАЯ ТОЧЕЧНОЙ МАССОЙ

Направлено в "Letters in Math. Phys."

Барбашов Б.М., Нестеренко В.В., Червяков А.М. P2 - 11141

Бесконечная релятивистская струна, нагруженная точечной массой

Получены точные классические решения в виде интегралов Фурье для уравнений движения бесконечной релятивистской струны, нагруженной точечной массой. Используется калибровка, в которой параметр временной эволюции τ пропорционален собственному времени точечной частицы. Калибровочные условия оказываются связями второго рода, поэтому коммутаторы динамических переменных струны следует определять с помощью скобок Дирака.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Barbashov B.M., Nesterenko V.V., Chervjakov A.M. P2 - 11141

Infinite Relativistic String with a Point-like Mass

Exact classical solutions of the equations of motion for the infinite relativistic string loaded with a point-like mass are obtained in terms of the Fourier integrals. The gauge when the time evolution parameter τ is proportional to the proper time of a point-like particle is used. The gauge conditions in this case are the second-class constraints. So in the quantum case the commutators of dynamical variables have to be defined by the Dirac brackets.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

Релятивистская струна с массами на концах является простой и наглядной моделью запирания кварков в адронах /1/. Нелинейные граничные условия в уравнениях движения такой струны не позволяют получить точные решения /2/. В работах /3/ предлагалось дополнить обычную ортогональную калибровку такими условиями на выбор параметров σ, τ, чтобы τ было пропорционально собственному времени массивных концов струны. В результате этого граничные условия линеаризуются, однако такая параметризация позволяет описать лишь ограниченный класс движений струны.

Иная ситуация будет в том случае, если этот метод применить к бесконечной струне, нагруженной только одной точечной массой. Никаких ограничений на допустимые движения струны здесь не возникает, и в явном виде удаётся получить точные решения уравнений движения для такой струны. Именно эта задача и рассматривается в данной работе.

Действие для бесконечной релятивистской струны с точечной массой m в точке $\sigma=0$ определим следующим образом:

$$S=-\gamma\int_{\tau_1}^{\tau_2}d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}d\sigma\sqrt{(\dot{x}x')^2-\dot{x}^2x'^2}-m\int_{\tau_1}^{\tau_2}d\tau\sqrt{\dot{x}^2(0,\tau)}\,, \qquad (1)$$

где γ - константа, имеющая размерность L^{-2}, $\dot{x} \equiv \partial x/\partial\tau$, $x' \equiv \partial x/\partial\sigma$. Варьирование действия (I) с учётом того, что $\delta x_\mu(\sigma,\tau_1)=\delta x_\mu(\sigma,\tau_2)=0$ и $\delta x_\mu(\sigma=\pm\infty,\tau)=0$, приводит к уравнениям движения

$$\ddot{x}_\mu(\sigma,\tau)-x''_\mu(\sigma,\tau)=0 \tag{2}$$

и нелинейному условию в точке $\sigma=0$

$$m\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\dot{x}_\nu(0,\tau)}{\sqrt{\dot{x}^2(0,\tau)}}\right)=\gamma\left[x'_\nu(0+0,\tau)-x'_\nu(0-0,\tau)\right]. \tag{3}$$

При этом на искомые решения $x_\mu(\sigma,\tau)$ наложены, как обычно, условия ортогональной калибровки

$$(\dot{x}\pm x')^2=0. \tag{4}$$

Уравнения (2-4) инвариантны при переходе к новым параметрам
$\tilde{\sigma}(\sigma,\tau)=\frac{1}{2}\left[f(\tau+\sigma)-f(\tau-\sigma)\right]$, $\tilde{\tau}(\sigma,\tau)=\frac{1}{2}\left[f(\tau+\sigma)+f(\tau-\sigma)\right]$
с произвольной функцией f. Поэтому всегда можно выбрать f так, что параметр временной эволюции τ будет пропорционален собственному времени частицы

$$\dot{x}^2(0,\tau)=m\gamma^{-3/2}. \tag{5}$$

Действительно, если ввести новый лоренцевский вектор $\tilde{x}_\mu(\tilde{\sigma},\tilde{\tau})\equiv$ $\equiv x_\mu(\sigma(\tilde{\sigma},\tilde{\tau}),\tau(\tilde{\sigma},\tilde{\tau}))$, то $\dot{x}^2_\mu(0,\tau)$ можно представить следующим образом:

$$\dot{x}^2_\mu(0,\tau)=\left[\frac{\partial}{\partial\tilde{\tau}}\tilde{x}_\mu(0,\tilde{\tau})\right]^2 f'^2(\tau).$$

Чтобы $\left(\partial\tilde{x}_\mu(0,\tilde{\tau})/\partial\tilde{\tau}\right)^2=m\gamma^{-3/2}$, достаточно положить $f'^2(\tau)=m^{-1}\gamma^{3/2}\dot{x}^2_\mu(0,\tau)$.

С учётом (5) условие (3) линеаризуется

$$\ddot{x}_\mu(0,\tau)=k\left[x'_\mu(0+0,\tau)-x'_\mu(0-0,\tau)\right],\quad k=\frac{\gamma^{1/4}}{m^{1/2}}. \tag{6}$$

Разделение переменных $x(\sigma,\tau)=e^{-i\omega\tau}\,u(\omega,\sigma)$ приводит к краевой задаче на функцию $u(\omega,\sigma)$

$$u''(\omega,\sigma)+\omega^2u(\omega,\sigma)=0,$$
$$-\omega^2u(\omega,0)=k\left[u'(\omega,0+0)-u'(\omega,0-0)\right].$$

Решения этой задачи можно представить в следующем виде

$$u(\omega,\sigma)=N_\omega\left[\cos(\omega\sigma)-\frac{\omega}{2k}\sin(\omega|\sigma|)\right],$$

где нормировочный множитель $N_\omega=\left[\pi\left(1+\frac{\omega^2}{4k^2}\right)\right]^{-1/2}$. Функции $u(\omega,\sigma)$ удовлетворяют условиям ортогональности

$$\int_{-\infty}^{+\infty}d\sigma\,u(\omega,\sigma)\xi(\sigma)u(\omega',\sigma)=\delta(\omega+\omega')+\delta(\omega-\omega') \tag{7}$$

и полноты

$$\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\,u(\omega,\sigma)u(\omega,\sigma')\frac{\xi(\sigma)}{2}=\delta(\sigma,\sigma'). \tag{8}$$

В этих формулах весовая функция $\xi(\sigma)=1+k^{-1}\delta(\sigma)$, а $\delta(\sigma,\sigma')$ определяется с помощью равенства

$$\int_{-\infty}^{+\infty}d\sigma' f(\sigma')\delta(\sigma',\sigma)=f(\sigma),$$

которое должно быть справедливо для произвольной чётной функции $f(\sigma)=f(-\sigma)$, $-\infty<\sigma<+\infty$.

Для координат струны $x_\mu(\sigma,\tau)$ имеем теперь следующее представление:

$$x_\mu(\sigma,\tau)=\frac{i}{\sqrt{2\gamma}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\omega\,\frac{d_\mu(\omega)}{\omega}\,e^{-i\omega\tau}\,U(\omega,\sigma), \qquad (9)$$

где $d_\mu(-\omega)=d_\mu^*(\omega)$.

Полный импульс рассматриваемой системы с учётом (9) имеет вид

$$P_\mu=-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\sigma\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^\mu}=\gamma\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\sigma\,\zeta(\sigma)\,\dot{x}_\mu(\sigma,\tau)=\frac{\gamma}{k}\,\dot{x}_\mu(0,\tau)+\gamma\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\sigma\,\dot{x}_\mu(\sigma,\tau).$$

Вводя затухающий множитель $e^{-\varepsilon|\sigma|}$, $\varepsilon>0$ для сходимости интегралов от осциллирующих функций, получаем $P_\mu=0$.

Подстановка решения (9) в условия ортогональной калибровки (4) приводит к ограничениям на фурье-амплитуды

$$L^{\pm}(\varrho)=\frac{1}{2}\int d\omega\,N_\omega N_{\varrho-\omega}\,d(\omega)\,d(\varrho-\omega)\Big(1\mp i\frac{\omega}{2k}\Big)\Big(1\mp i\,\frac{\varrho-\omega}{2k}\Big)=0. \qquad (10)$$

Эти уравнения должны быть дополнены условием (5), из которого следует ещё одна связь на амплитуды $d(\omega)$

$$L(\varrho)=\frac{1}{2}\int d\omega\,N_\omega N_{\varrho-\omega}\,d(\omega)\,d(\varrho-\omega)-\frac{2\pi}{k^2}\,\delta(\varrho)=0. \qquad (11)$$

Уравнения (10) и (11) существенно отличаются от ограничений на амплитуды $d(\omega)$, которые имеют место в теории свободной бесконечной струны /4/:

$$L_0(\varrho)=\frac{1}{2}\int d\omega\,d(\omega)\,d(\varrho-\omega)=0.$$

Если массу частицы устремить к нулю, то $k\to\infty$ и все связи $L^{\pm}(\varrho)$ и $L(\varrho)$ переходят в $L_0(\varrho)$.

Учитывая (11), ограничения (10) можно заменить одним условием:

$$L_1(\varrho)=\frac{1}{2}\int d\omega\,\omega(\varrho-\omega)\,N_\omega N_{\varrho-\omega}\,d(\omega)\,d(\varrho-\omega)=0. \qquad (12)$$

Из разложения (9) с учётом условия ортогональности (7) получаем

$$d_\mu(\omega)=e^{i\omega\tau}\sqrt{\frac{\gamma}{2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\sigma\,U(\omega,\sigma)\Big[\gamma^{-1}p_\mu(\sigma,\tau)-i\omega\,\zeta(\sigma)\,x_\mu(\sigma,\tau)\Big], \qquad (13)$$

где p_μ – плотность канонического импульса, $p_\mu(\sigma,\tau)=\gamma\,\zeta(\sigma)\,\dot{x}_\mu(\sigma,\tau)$.

Используя формулу (13), найдем скобку Пуассона фурье-амплитуд

$$\{d_\mu(\omega_1),d_\nu(\omega_2)\}=-i\,g_{\mu\nu}\,\omega_1\,\delta(\omega_1+\omega_2).$$

Теперь можно вычислить скобки Пуассона связей (11) и (12). Так, например, для $L(\varrho)$ имеем

$$\{L(\varrho_1),L(\varrho_2)\}=$$

$$=-i(\varrho_1-\varrho_2)\,\frac{1}{2}\int d\omega\,N_\omega N_{\varrho_1+\varrho_2-\omega}\,\frac{1-\dfrac{\omega-\varrho_1}{4k^2}\cdot\dfrac{\omega-\varrho_2}{4k^2}}{\Big(1+\dfrac{(\omega-\varrho_1)^2}{4k^2}\Big)\Big(1+\dfrac{(\omega-\varrho_2)^2}{4k^2}\Big)}\,\alpha(\omega)\,\alpha(\varrho_1+\varrho_2-\omega). \qquad (14)$$

Такие же сложные выражения получаются и для скобок Пуассона связей $L_1(\varrho_1)$, $L_1(\varrho_2)$ и $L(\varrho_1)$, $L_1(\varrho_2)$. Таким образом, условия (11) и (12) являются связями второго рода по терминологии Дирака /5/. Это следовало ожидать, так как такие связи всегда появляются в калибровочных теориях, когда полностью фиксируется калибровка /6/. В рассматриваемом случае выбор параметров σ , τ полностью зафиксирован условиями (4) и (5).

В квантовой теории связи второго рода должны выполняться как операторные равенства. Для этого коммутаторы динамических переменных следует определять с помощью скобок Дирака /5,6/

$$[f,g]=-i\{f,g\}^{*}=-i\{f,g\}+i\{f,\varphi_i\}\{\varphi_i,\varphi_j\}^{-1}\{\varphi_j,g\},$$

где $\varphi_i=0$ – связи второго рода (в рассматриваемом случае это уравнения (II) и (I2)). Из-за сложности матрицы $\{\varphi_i,\varphi_j\}$ (формула (I4)) практически воспользоваться методом Дирака и построить квантовую теорию не удаётся. Возможный путь преодоления этой трудности заключается в поиске таких канонических переменных для квантования, которые имели бы нулевые скобки Пуассона со связями $L(\varphi)$ и $L_1(\varphi)$.

Литература:

I. Y. Nambu. Phys. Rev. D10 (1974) 4262;
I. Bars. Nucl. Phys. B111 (1976) 413;
М.С.Маринов. УФН I2I (1977) 377.
2. A.Chodos, C.B. Thorn. Nucl.Phys. B72 (1974) 509;
P.H.Frampton. Phys. Rev. D12 (1975) 538.
3. Б.М. Барбашов, В.В. Нестеренко. ТМФ 3I (1977) 29I;
B.M.Barbashov. Nucl.Phys. B129 (1977) 175.
4. Б.М. Барбашов, Н.А. Черников. ЖЭТФ, 50 (1966) I296.
5. П.А.М.Дирак. Лекции по квантовой механике. "Мир", М., I968.
6. A.J.Hanson,T.Regge,C.Teitelboim. Constrained Hamiltonian Systems. Princeton Preprint,1975.

Рукопись поступила в издательский отдел
7 декабря 1977 года.