СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 11104

А.Л.Кошкаров

ДИНАМИКА
РЕЛЯТИВИСТСКОЙ БАРИОННОЙ СТРУНЫ
С МАССАМИ НА КОНЦАХ

1977

P2 - 11104

А.Л.Кошкаров

ДИНАМИКА
РЕЛЯТИВИСТСКОЙ БАРИОННОЙ СТРУНЫ
С МАССАМИ НА КОНЦАХ

Кошкаров А.Л. P2 - 11104

Динамика релятивистской барионной струны с массами на концах

Рассмотрена барионная релятивистская струна с массивными концами в специальной калибровке, когда эволюционный параметр τ пропорционален собственному времени концов струны. Найдено решение краевой задачи. Построена квантовая теория струны, свободная от "духовых" состояний. Подсчитаны масса, импульс, угловой момент струны. Произведено сравнение теории с различными моделями мезонных струн.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Koshkarov A.L. P2 - 11104

Dynamics of Relativistic Baryon String with Mass Ends

A baryon relativistic string with mass ends in special gauge is considered when the evolution parameter τ is proportional to the proper time of string ends. The solution of boundary problem has been found. The quantum string theory has been constructed which is free of ghost states. The string mass, pulse, angular momentum have been calculated. Theory was compared to various models of meson strings.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

В качестве модели адрона были предложены различные варианты мезонных струн с массами на концах /1-3/. Такие объекты находятся в соответствии с представлениями об адроне, как о составной системе из кварков, связанных глюонными полями. При этом струна моделирует глюонное поле, локализованное вдоль линии, соединяющей кварки. Представляется естественным исследовать объект, составленный из трех струн, имеющих один общий конец и свободные концы, на которые помещены точечные массы. Такая система является струнной моделью бариона. Барионная безмассовая струна уже рассматривалась в работах /4-6/. Наиболее далеко в решении этой проблемы продвинулись авторы статьи /6/ благодаря специальному выбору параметризации, когда все три ветви струны описываются одним набором параметров σ, τ. В более общем случае каждой ветви струны соответствуют свои параметры σ_i, τ_i $(i=1,2,3)$ /5/.

В настоящей заметке изучена система с лагранжианом таким же, как и в работе /6/, плюс три слагаемых, соответствующих точечным массам на концах струны. Усложнение, обусловленное нелинейностью "массивных" граничных условий, обходится методом, предложенным в /3/, суть которого заключается в том, что эволюционный параметр τ выбирается в качестве собственного времени для концов струны. При этом приходится ограничиться только некоторым классом движений струны. Для полученных решений удается построить квантовую теорию без "духов". Авторам работы /6/ из-за незамкнутости системы связей не удалось непротиворечиво проквантовать теорию. Однако необходимо отметить, что в данной работе успех достигнут лишь ценой того, что рассмотрены не все движения струны.

Лагранжиан, уравнения движения и граничные условия

Для системы из трех струн выберем действие в виде

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^{\ell} d\sigma \sum_{\kappa=1}^{3} \left\{ \mathcal{L}_{0\kappa}[\dot{x}_\kappa(\sigma,\tau), x'_\kappa(\sigma,\tau)] - \delta(\sigma) m_\kappa \sqrt{\dot{x}^2_\kappa(\sigma,\tau)} \right\}. \quad (I)$$

Как обычно, $\dot{x}^\mu_\kappa(\sigma,\tau) = \frac{\partial x^\mu_\kappa(\sigma,\tau)}{\partial \tau}$, $x'^\mu_\kappa = \frac{\partial x^\mu_\kappa}{\partial \sigma}$, $\mu = 0,1,2,3$,

$\mathcal{L}_{0\kappa} = -\gamma \sqrt{(\dot{x}_\kappa x'_\kappa)^2 - \dot{x}^2_\kappa x'^2_\kappa}$.

На концах струн, соответствующих значению $\sigma = 0$, расположены массы, а конец $\sigma = \ell$ является общим для всех струн:

$$x^\mu_1(\ell,\tau) = x^\mu_2(\ell,\tau) = x^\mu_3(\ell,\tau).$$

Взятое в таком виде действие инвариантно относительно произвольной замены параметров σ, τ с отличным от нуля якобианом преобразования при дополнительном условии, что прямые $\sigma = 0$ и $\sigma = \ell$ остаются неподвижными на плоскости σ, τ. Действие (I) без массового члена было рассмотрено в работе /6/.

Варьируя (I) при условии, что $\delta x^\mu_\kappa(\sigma,\tau_1) = \delta x^\mu_\kappa(\sigma,\tau_2) = 0$, $\delta x^\mu_\kappa(0,\tau)$, $\delta x^\mu_\kappa(\ell,\tau) = \varepsilon^\mu$ — произвольны, получим

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \mathcal{L}_{0\kappa}}{\partial \dot{x}^\mu_\kappa}(\sigma,\tau) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial \mathcal{L}_{0\kappa}}{\partial x'^\mu_\kappa}(\sigma,\tau) = 0, \quad \kappa = 1,2,3, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{0\kappa}}{\partial x'^\mu_\kappa}(0,\tau) = m_\kappa \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\dot{x}^\mu_\kappa(0,\tau)}{\sqrt{\dot{x}^2_\kappa(0,\tau)}}, \quad \kappa = 1,2,3,$$

$$\sum_{\kappa=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}_{0\kappa}}{\partial x'^\mu_\kappa}(\ell,\tau) = 0. \quad (3)$$

Как и в теории мезонной струны, можно показать, что среди двенадцати уравнений (2) только половина независимы. Поэтому доопределим систему, наложив шесть дополнительных условий в виде

$$[\dot{x}_\kappa(\sigma,\tau) \pm x'_\kappa(\sigma,\tau)]^2 = 0, \quad \kappa = 1,2,3. \quad (4)$$

После этого уравнения (2) и (3) принимают вид

$$\ddot{x}^\mu_\kappa(\sigma,\tau) - x''^\mu_\kappa(\sigma,\tau) = 0, \quad \kappa = 1,2,3,$$

$$\gamma x'^\mu_\kappa(0,\tau) = m_\kappa \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\dot{x}^\mu_\kappa(0,\tau)}{\sqrt{\dot{x}^2_\kappa(0,\tau)}}, \quad \kappa = 1,2,3,$$

$$\sum_{\kappa=1}^{3} x'^\mu_\kappa(\ell,\tau) = 0.$$

Теперь потребуем /3/, чтобы

$$\dot{x}^2_\kappa(0,\tau) = \frac{C^2_\kappa}{m^2_\kappa}, \quad \kappa = 1,2,3, \quad (5)$$

что позволяет линеаризовать граничные условия. Равенство (5) означает, что мы рассматриваем лишь те движения струны, при которых параметр τ является собственным временем для концов струны $x^\mu_\kappa(0,\tau)$. При этом соотношение (5) нельзя рассматривать как калибровочное условие, поскольку невозможно указать преобразование параметров, приводящее к нему. Лишь для определенного класса движений, таких, что

$$\left(\frac{m_1}{C_1}\right)^2 \dot{x}^2_1(0,\tau) = \left(\frac{m_2}{C_2}\right)^2 \dot{x}^2_2(0,\tau) = \left(\frac{m_3}{C_3}\right)^2 \dot{x}^2_3(0,\tau),$$

$$\dot{x}^2_\kappa(0,\tau) = \dot{x}^2_\kappa(0,\tau+2\ell), \quad \kappa = 1,2,3, \quad (6)$$

параметр τ может быть выбран в качестве собственного времени (см. приложение).

Далее, для простоты будем считать все массы m_κ и константы C_κ равными. Вводя обозначение $q = \frac{C}{m^2}\gamma$, граничные условия запишем в виде

$$\ddot{x}_k^{\mu}(0,\tau) = q\,x_k'^{\mu}(0,\tau), \quad k = 1,3,2,$$
$$\sum_{k=1}^{3} x_k'^{\mu}(\ell,\tau) = 0, \tag{7}$$
$$x_1^{\mu}(\ell,\tau) = x_2^{\mu}(\ell,\tau) = x_3^{\mu}(\ell,\tau).$$

Удобно вместо функций $x_k^{\mu}(\sigma,\tau)$ рассматривать их линейные комбинации /6/

$$x_k^{\mu}(\sigma,\tau) = \psi^{\mu}(\sigma,\tau) + \lambda_k\,\varphi^{\mu}(\sigma,\tau) + \lambda_k^{*}\,\overset{*}{\varphi}{}^{\mu}(\sigma,\tau), \quad k = 1,2,3, \tag{8}$$

где $\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = e^{\frac{2\pi}{3}i} = \lambda_3^{*}$.

В результате граничные условия (7) приобретают вид

$$\ddot{\psi}^{\mu}(0,\tau) = q\,\psi'^{\mu}(0,\tau),$$
$$\psi'^{\mu}(\ell,\tau) = 0, \tag{9}$$
$$\ddot{\varphi}^{\mu}(0,\tau) = q\,\varphi'(0,\tau),$$
$$\varphi^{\mu}(\ell,\tau) = 0.$$

Очевидно, уравнения движения не изменяют своего вида после преобразования (8) .

Теперь мы имеем две независимые краевые задачи для функций $\psi^{\mu}(\sigma,\tau)$ и $\varphi^{\mu}(\sigma,\tau)$. Будем искать решение методом разделения переменных

$$\psi^{\mu}(\sigma,\tau) = a^{\mu}(\tau)\,\Phi_1(\sigma), \quad \varphi^{\mu}(\sigma,\tau) = b^{\mu}(\tau)\,\Phi_2(\sigma).$$

Подставляя эти равенства в уравнения движения с учетом (4), отделим переменные

$$\frac{\ddot{a}(\tau)}{a(\tau)} = \frac{\Phi_1''(\sigma)}{\Phi_1(\sigma)} = -\omega_1^2, \quad \frac{\ddot{b}(\tau)}{b(\tau)} = \frac{\Phi_2''(\sigma)}{\Phi_2(\sigma)} = -\omega_2^2.$$

Граничные условия (9) теперь принимают вид:

$$\Phi_i'(0) = -\frac{\omega_i^2}{q}\Phi_i(0), \quad i = 1,2,$$
$$\Phi_1'(\ell) = 0,$$
$$\Phi_2(\ell) = 0.$$

Функции $a^{\mu}(\tau)$ и $b^{\mu}(\tau)$ даются выражениями

$$a^{\mu}(\tau) = \alpha^{\mu} e^{-i\omega_1\tau}, \quad b^{\mu}(\tau) = \beta^{\mu} e^{-i\omega_2\tau}$$

Учитывая, что $\Phi_i(\sigma) = A_i\cos\omega_i\sigma + B_i\sin\omega_i\sigma$, из граничных условий найдем, приравнивая нулю определитель, составленный из коэффициентов при A_i и B_i :

$$\operatorname{tg}\omega_1\ell = -\frac{\omega_1}{q}, \quad \operatorname{ctg}\omega_2\ell = \frac{\omega_2}{q}. \tag{10}$$

Этими уравнениями определяются собственные частоты нашей краевой задачи. Уравнения (10) можно объединить в одно:

$$\operatorname{tg}2\omega\ell = \frac{2\omega q}{\omega^2 - q^2}. \tag{11}$$

Пронумеруем корни уравнения (11) следующим образом: $\omega_0 = 0$, $\omega_n = -\omega_{-n}$, причем для четных n частоты ω_n удовлетворяют первому из равенств (10), а для нечетных - второму уравнению (10).

Условия на границе $\sigma = 0$ дают

$$\Phi_1(\sigma) = \Phi_2(\sigma) \equiv \Phi_n(\sigma) = N_n\left(\cos\omega_n\sigma - \frac{\omega_n}{q}\sin\omega_n\sigma\right), \quad n = 0, \pm 1$$

где N_n - нормировочный множитель.

Важнейшее свойство функций $\Phi_n(\sigma)$ состоит в том, что они ортогональны с весом $\xi(\sigma) = 1 + \frac{1}{q}\delta(\sigma)$ на отрезке $0 < \sigma < \ell$,

$$\int_0^{\ell} d\sigma\, \Phi_n(\sigma)\Phi_m(\sigma)\xi(\sigma) = \delta_{nm}.$$

Нормировочные множители даются выражениями

$$N_0^2 = \frac{1}{\ell + \frac{1}{q}}, \quad N_n^2 = \frac{2}{\ell\left(1 + \frac{\omega_n^2}{q^2}\right) + \frac{1}{q}}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Разложения в ряды Фурье функций $\psi^\mu(\sigma,\tau)$ и $\varphi^\mu(\sigma,\tau)$ имеют вид

$$\psi^\mu(\sigma,\tau) = Q^\mu + \frac{q}{1+qe}\cdot\frac{P^\mu}{\gamma}\tau + \frac{i}{\sqrt{2\gamma}}\sum_{\substack{-\infty \\ n\neq 0,\ \text{чётные}}}^{\infty}\frac{\alpha_n^\mu}{\omega_n}\Phi_n(\sigma)\,e^{-i\omega_n\tau},$$

$$\overset{*}{\alpha}{}_n^\mu = \alpha_{-n}^\mu,$$

$$\varphi^\mu(\sigma,\tau) = \frac{i}{\sqrt{2\gamma}}\sum_{\substack{-\infty \\ n-\text{нечётные}}}^{\infty}\frac{\beta_n^\mu}{\omega_n}\Phi_n(\sigma)\,e^{-i\omega_n\tau}. \qquad (12)$$

Таким образом, ψ^μ и φ^μ представляют собой почти – периодические функции по обеим переменным σ и τ, так как они даются бесконечными рядами Фурье с трансцендентными частотами.

Решения (12) должны удовлетворять нелинейным дополнительным условиям (4), которые через функции ψ^μ и φ^μ выражаются следующим образом:

$$(\dot x_k \pm x_k')^2 = \left[\dot\psi \pm \psi' + \lambda_k(\dot\varphi \pm \varphi') + \lambda_k^*(\dot\varphi^* \pm \varphi'^*)\right]^2 = 0.$$

Для того, чтобы выразить дополнительные условия на языке амплитуд α_n^μ и β_n^μ, с помощью (12) найдем

$$\dot x_k^\mu \pm x_k'^\mu = \frac{P^\mu q}{\gamma(1+qe)} + \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\sum_{\substack{-\infty \\ n\neq 0,\ \text{чётные}}}^{\infty}\alpha_n^\mu N_n(1\mp i\omega_n/q)\,e^{-i\omega_n(\tau\pm\sigma)} +$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\sum_{\substack{-\infty \\ n-\text{нечётные}}}^{\infty}(\lambda_k\beta_n^\mu + \lambda_k^*\overset{*}{\beta}{}_{-n}^\mu)N_n\left(1\mp i\frac{\omega_n}{q}\right)e^{-i\omega_n(\tau\pm\sigma)}.$$

Вводя обозначения:

$$\alpha_0^\mu = \sqrt{\frac{2}{\gamma}}N_0P^\mu,$$

$$\varsigma_{nk}^\mu = \lambda_k\beta_n^\mu + \lambda_k^*\overset{*}{\beta}{}_n^\mu, \quad n=\pm1,\pm3,\dots;\ k=1,2,3,$$

$$\alpha_{nk}^\mu = \begin{cases}\alpha_n^\mu, & n=0,\pm2,\pm4,\dots\\ \varsigma_{nk}^\mu, & n=\pm1,\pm3,\dots,\end{cases}\quad k=1,2,3,$$

перепишем последнюю формулу в компактном виде:

$$\dot x_k^\mu \pm x_k'^\mu = \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_{nk}^\mu N_n\left(1\mp i\frac{\omega_n}{q}\right)e^{-i\omega_n(\tau\pm\sigma)}, \quad k=1,2,3.$$

Отсюда уже легко получить

$$(\dot x_k \pm x_k')^2 = \frac{1}{2\gamma}\sum_{\substack{n\neq -n' \\ n,n'}}\alpha_{nk}\alpha_{n'k}\left(1\mp i\frac{\omega_n}{q}\right)\left(1\mp\frac{\omega_{n'}}{q}\right)N_nN_{n'}\,e^{-i(\omega_n+\omega_{n'})(\tau\pm\sigma)} +$$

$$\frac{1}{2\gamma}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_{nk}\alpha_{-nk}\left(1+\frac{\omega_n^2}{q^2}\right)N_n^2 = 0, \quad k=1,2,3.$$

Для выполнения последнего равенства необходимо потребовать /3/

$$\alpha_{nk}\alpha_{n'k} = 0, \quad n\neq -n', \quad k=1,2,3,$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_{nk}\alpha_{-nk}\left(1+\frac{\omega_n^2}{q^2}\right)N_n^2 = 0, \quad k=1,2,3, \qquad (13)$$

или, более подробно:

$$\alpha_n\alpha_m = 0, \quad n,m=\pm2,\pm4,\dots,\ n\neq -m;$$

$$\alpha_nP = 0, \quad n=\pm2,\pm4,\dots; \qquad (13a)$$

$$\varsigma_{nk}\varsigma_{mk} = 0, \quad n,m=\pm1,\pm3,\pm5,\dots,\ n\neq -m,\ k=1,2,3;$$

$$\alpha_n\varsigma_{mk} = 0, \quad n=\pm2,\pm4,\dots,\ m=\pm1,\pm3,\dots,\ k=1,2,3;$$

$$\varsigma_{mk}P = 0, \quad m=\pm1,\pm3,\dots,\ k=1,2,3;$$

$$\frac{2}{\gamma} N_0^4 P^2 + \sum_{n\neq 0,\ \text{чётные}} \alpha_{-n}\alpha_n \left(1+\frac{\omega_n^2}{q^2}\right) N_n^2 + \sum_{n\text{-нечётные}} \xi_{nk}\xi_{-nk}\left(1+\frac{\omega_n^2}{q^2}\right) N_n = 0, \quad k=1,2,3.$$

Условие (5) при учете (I3) приводит к еще трем связям:

$$\dot{x}_k^2(0,\tau) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{nk} e^{-i\omega_n \tau} N_n\right)^2 = \frac{1}{2\gamma} \sum \alpha_{-nk}\alpha_{nk} N_n^2 = \tag{I4}$$

$$\frac{N_0^4 P^2}{\gamma^2} + \frac{1}{2\gamma} \sum_{n\neq 0,\ \text{чётные}} \alpha_{-n}\alpha_n N_n^2 + \frac{1}{2\gamma}\sum \xi_{-nk}\xi_{nk} N_n^2 = \frac{C^2}{m^2}, \quad k=1,2,3.$$

Прежде чем переходить к нахождению динамических переменных, убедимся, что преобразование (8) является каноническим. Плотность импульса каждой ветви струны с учетом (4) определим так:

$$P_k^\mu(\sigma,\tau) = \frac{-\partial}{\partial \dot{x}_k^\mu}\left\{ \mathcal{L}_{0k} + m_k \delta(\sigma)\sqrt{\dot{x}_k^2} \right\} = \gamma\, \dot{x}_k(\sigma,\tau)\, \xi(\sigma).$$

Канонические скобки Пуассона есть, по определению,

$$\left\{ x_k^\mu(\sigma,\tau),\ P_\ell^\nu(\sigma',\tau) \right\} = -g^{\mu\nu}\delta_{k\ell}\,\delta(\sigma-\sigma').$$

Аналогично плотность импульса, сопряженная координате $\psi^\mu(\sigma,\tau)$, есть

$$P_\psi^\mu(\sigma,\tau) = \frac{-\partial}{\partial\dot{\psi}^\mu}\sum_{k=1}^{3}\left(\mathcal{L}_{0k} + m_k\delta(\sigma)\sqrt{\dot{x}_k^2}\right) = \sum_{k=1}^{3} P_k^\mu = \sum_{k=1}^{3}\gamma\,\xi(\sigma)\,\dot{x}_k(\sigma) = 3\gamma\,\dot{\psi}^\mu \xi(\sigma).$$

Вычислим скобку Пуассона:

$$\left\{ \psi^\mu(\sigma,\tau), P_\psi^\nu(\sigma',\tau) \right\} = \left\{ \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3} x_k^\mu(\sigma,\tau), \sum_{\ell=1}^{3} P_\ell^\nu(\sigma',\tau) \right\} = \frac{1}{3}\sum_{k,\ell}\left\{ x_k^\mu(\sigma,\tau), P_\ell^\nu(\sigma',\tau) \right\}$$

$$= -g^{\mu\nu}\delta(\sigma-\sigma').$$

Точно так же нетрудно убедиться, что и

$$\left\{ \varphi^\mu(\sigma,\tau), P_\varphi^\nu(\sigma',\tau) \right\} = \left\{ \overset{*}{\varphi}{}^\mu(\sigma,\tau), P_{\overset{*}{\varphi}}^\nu(\sigma',\tau) \right\} = -g^{\mu\nu}\delta(\sigma-\sigma').$$

Таким образом, преобразование (8) действительно является каноническим, поскольку сохраняет скобки Пуассона. Поэтому нам безразлично, каким набором переменных пользоваться при переходе к квантовой теории.

Определим квадрат массы струны, как квадрат ее сохраняющегося полного канонического импульса:

$$M^2 = \Pi^2,$$

$$\Pi^\mu = \sum_{k=1}^{3}\Pi_k^\mu = \gamma\int_0^\ell d\sigma \sum_{k=1}^{3}\dot{x}_k^\mu(\sigma,\tau)\,\xi(\sigma) = \gamma\int_0^\ell d\sigma\, \xi(\sigma)\cdot 3\dot{\psi}^\mu(\sigma,\tau) = \Pi_\psi^\mu.$$

Подставляя сюда (I2), найдем

$$M^2 = 9P^2.$$

Суммируя (I4) по k и находя оттуда P^2, окончательно получим

$$M^2 = -\frac{9}{2}\gamma\left(\ell+\frac{1}{q}\right)\left\{ \sum_{n\neq 0,\ \text{чётные}} \alpha_{-n}\alpha_n N_n^2 + \sum_{n\text{-нечётные}} \left(\beta_{-n}\overset{*}{\beta}_n + \overset{*}{\beta}_n\beta_n\right) N_n^2 \right\} + 9m^2(1+q\ell)^2. \tag{I5}$$

В отсутствие возбуждения струны квадрат массы отличен от $9m^2$:

$$M_0^2 = 9m^2(1+q\ell)^2.$$

Это характерно и для мезонной струны, квадрат массы основного состояния которой также больше $4m^2$ /3/.

В спектре масс (I5) содержится 3 типа амплитуд: α_n^μ, β_n^μ и $\overset{*}{\beta}{}_n^\mu$, и это естественно, поскольку число степеней свободы барионной струны в 3 раза больше, чем мезонной.

В остальном выражения для массы и для других динамических переменных не отличаются существенно от соответствующих выражений для свободной струны, кроме того факта, что частоты ω_n теперь уже не пропорциональны целым числам.

Приведем выражение для сохраняющегося тензора углового момента системы:

$$M^{\mu\nu} = \int_0^\ell d\sigma \sum_{k=1}^{3}\left(x_k^\mu P_k^\nu - x_k^\nu P_k^\mu\right) =$$

$$=3\gamma\int_0^\ell d\sigma\,\xi(\sigma)\left[\psi^\mu\dot\psi^\nu-\psi^\nu\dot\psi^\mu+\varphi^\mu\dot\varphi^\nu-\varphi^\nu\dot\varphi^\mu+\dot\varphi^{*\nu}\varphi^{*\mu}-\varphi^{*\nu}\dot\varphi^{*\mu}\right]=$$

$$3\Big\{Q^\mu P^\nu-Q^\nu P^\mu+\frac{i}{2}\sum_{\substack{n\neq 0,\\ \text{чётные}}}\frac{1}{\omega_n}\left(\alpha^\mu_{-n}\alpha^\nu_n-\alpha^\nu_{-n}\alpha^\mu_n\right)+\frac{i}{2}\sum_{n-\text{нечётные}}\frac{1}{\omega_n}\left[\beta^\mu_{-n}\beta^\nu_n-\beta^\nu_{-n}\beta^\mu_n+\beta^{*\mu}_{-n}\beta^{*\nu}_n-\beta^{*\nu}_{-n}\beta^{*\mu}_n\right]\Big\}$$

<u>Квантование</u>

Как обычно, считая α^+_n, β^+_n и α_n, β_n операторами рождения и уничтожения соответственно, запишем перестановочные соотношения

$$[\alpha^\mu_n, \alpha^\nu_m]=-g^{\mu\nu}\omega_n\delta_{-n,m},\quad n,m=\pm 2,\pm 4,\ldots \qquad \text{четные,}$$

$$[\beta^\mu_k\ \overset{+}{\beta}{}^\nu_\ell]=-g^{\mu\nu}\omega_k\delta_{k\ell},\quad k,\ell=\pm 1,\pm 3,\ldots \qquad \text{нечетные.}$$

С помощью соотношения полноты для системы функций $\phi_n(\sigma)$

$$\sum_n \phi_n(\sigma)\phi_n(\sigma')\xi(\sigma)=\delta(\sigma,\sigma')$$

можно убедиться, что для операторов $x^\mu_k(\sigma,\tau)$, $P^\nu_k(\sigma,\tau)$ (или для $\psi^\mu, P^\nu_\psi, \varphi^\mu, P^\nu_\varphi$) справедливо каноническое перестановочное соотношение

$$[x^\mu_k(\sigma,\tau),\ P^\nu_k(\sigma',\tau)]=-g^{\mu\nu}\delta(\sigma,\sigma').$$

Здесь $\delta(\sigma,\sigma')$ - функция, правила интеграции для которой такие же, как и для дельта-функции Дирака /8/ .

Гамильтониан, приводящий к правильным уравнениям движения, можно выбрать в виде

$$H=-\frac{P^2}{2\gamma}\cdot\frac{q}{1+q\ell}-\frac{1}{2}\sum_{\substack{n\neq 0,\,\text{чётные}}}^{\infty}\alpha_{-n}\alpha_n-\sum_{\substack{n-\text{нечётные}\\ -\infty}}^{\infty}\overset{+}{\beta}_n\beta_n\ .$$

В квантовой теории вместо наложения связей в операторной форме достаточно потребовать исчезновения матричных элементов этих связей. Это будет выполнено, если на векторы состояния наложить ограничения

$$\alpha_{nk}\alpha_{mk}|\Phi\rangle=0,\ n\geqslant 0,\ n\neq -m,\quad k=1,2,3,$$

$$\Big\{\frac{2}{\gamma}N_0^4P^2+\sum_{n\neq 0}:\alpha_{-nk}\alpha_{nk}:\left(1+\frac{\omega_n^2}{q^2}\right)N_n^2+a\Big\}|\Phi\rangle=0, \qquad (16)$$

$$\Big\{\frac{N_0^4P^2}{\gamma^2}+\frac{1}{2\gamma}\sum:\alpha_{-nk}\alpha_{nk}:N_n^2+b\Big\}|\Phi\rangle=0,\quad k=1,2,3.$$

Как обычно, двоеточия являются символами нормального произведения, а константы a и b отражают неоднозначность при нормальном упорядочении.

Легко проверить, что операторы, действующие на векторы состояния в (16), а также гамильтониан образуют алгебру Ли, что гарантирует временную эволюцию системы.

Наличие условий (16) позволяет исключить духи из нашего пространства векторов состояния так же,как это сделано, например, в /3/ . Выделяя из (16) условия

$$\alpha^\mu_{nk}P_\mu|\Phi\rangle=0,\quad n>0,\ k=1,2,3,$$

и записывая их в системе центра масс струны $(\vec P=0)$

$$P^0\alpha^0_{nk}|\Phi\rangle=0,\ n>0,\ k=1,2,3\ ,$$

получим, предполагая, что $P^0|\Phi\rangle\neq 0$,

$$\alpha^0_{nk}|\Phi\rangle=0,\ n>0,\ k=1,2,3\ .$$

Отсюда видно, что в системе центра масс векторы пространства Фока строятся из пространственных компонент операторов рождения, что и означает отсутствие состояний с отрицательной нормой.

Заключение

Рассмотренная модель не претендует на описание всех , и даже основных, свойств бариона. В частности, нигде не учтено, что барионы являются фермионами. Однако, в принципе, можно было бы добавить в лагранжиан дополнительные члены, описывающие спиновые степени свободы кварков, но это излишне усложнило бы модель. Главное отличие изученной системы от мезонной струны, ее барионный характер, заключается в топологической структуре модели. Можно вообразить барион состоящим из трех струн, соединенных в треугольник, в вершинах которого расположены кварки. Возможны и другие конфигурации. На вопрос, какая модель предпочтительней, ответ может дать строгий анализ (например, с энергетической точки зрения более устойчива система, у которой масса основного состояния меньше). Подробное феноменологическое рассмотрение барионных конфигураций проведено в работе /4/.

Выражения для динамических переменных не отличаются внешне от аналогичных выражений в случае безмассовой струны, однако частоты теперь не пропорциональны целым числам, ввиду чего спектр масс менее вырожден (не эквидистантен). Спектр масс был бы еще более богат, если бы массы кварков были разные. В безмассовом пределе частоты переходят в свободные. Интересной особенностью данной модели является то, что масса основного состояния (в классической теории) больше суммы масс кварков на концах струны.

Важное отличие данной теории от свободной связано с видом дополнительных условий на векторы состояния, которые существенно отличаются от условий Вирасоро. В то же время нет различия между связями в мезонной и барионной струнах с массами на концах.

Автор благодарен Б.М.Барбашову и В.В.Нестеренко за полезные обсуждения и интерес к работе. Автор признателен В.С.Герджикову за просмотр рукописи и ценные замечания.

Приложение

Из преобразований, сохраняющих уравнения (2) и (4),

$$\tilde{\sigma}(\sigma,\tau)=\frac{1}{2}\left[f(\tau+\sigma)-\varphi(\tau-\sigma)\right],$$

$$\tilde{\tau}(\sigma,\tau)=\frac{1}{2}\left[f(\tau+\sigma)+\varphi(\tau-\sigma)\right],$$

выберем такие, что

$$\tilde{\sigma}(\sigma_i,\tau)=\sigma_i,\quad i=1,2,\quad \sigma_i=0,\ell.$$

Это достигается следующим выбором функций φ и f :

$$f(\lambda)=\varphi(\lambda),\quad f(\lambda+2\ell)=f(\lambda).$$

Теперь

$$\dot{x}_\kappa^2(0,\tau)=\left[\frac{\partial}{\partial\tilde{\tau}}\tilde{x}_\kappa(0,\tilde{\tau})\right]^2 f'^2(\tau),\quad \kappa=1,2,3.$$

Выбирая $f(\tau)$ так, что /3/

$$\left[\frac{\partial}{\partial\tilde{\tau}}\tilde{x}_\kappa(0,\tilde{\tau})\right]^2=\frac{C_\kappa^2}{m_\kappa^2},\quad \kappa=1,2,3,$$

получим

$$f'^2(\tau)=\frac{m_\kappa^2}{C_\kappa^2}\dot{x}_\kappa^2(0,\tau).$$

А из этого уравнения и свойств функции $f(\tau)$ уже вытекают ограничения (6).

Литература

1. A.Chodos, C.Thorn. Nucl.Phys., B72, 509 (1974).
2. R.Andreo, F.Rohrlich. Nucl.Phys., B115, 521 (1976).
3. Б.М.Барбашов, В.В.Нестеренко. ТМФ,31, 291 (1977); B.Barbashov. Preprint NBI - HE- 77-12 (1977).

4. X.Artru. Nucl.Phys., B85, 442 (1975).
5. P.Collins, J.Hopkinson, R.Tucker. Nucl.Phys. B100, 157 (1975).
6. K.Sundermeyer, A. de la Torre. Phys.Rev., D15, 1745 (1977).
7. Б.М.Барбашов, Н.Черников. Препринт ОИЯИ Р2-7852, Дубна (1974).
8. G.Lanyi. Phys.Rev., D14, 972 (1976).

Рукопись поступила в издательский отдел
23 ноября 1977 года.