ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

P2 - 11103

Хр.Я.Христов, Б.П.Дамянов

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ - НОВЫЙ КЛАСС ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

II.Существование функций и однозначность их разложений

1977

P2 - 11103

Хр.Я.Христов, Б.П.Дамянов

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ - НОВЫЙ КЛАСС ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

II.Существование функций и однозначность их разложений

Направлено в "Bulgarian Journal of Physics"

Христов Хр.Я., Дамянов Б.П. P2 - 11103

Асимптотические функции - новый класс обобщенных функций. II. Существование функций и однозначность их разложений

В первой части этой работы [1] дано определение асимптотических функций - нового класса обобщенных функций. В данной, второй, части рассмотрен вопрос о существовании этих функций и об однозначности разложений, при помощи которых они вводятся. Показано, что при некоторых, не очень жестких ограничениях на компоненты функций существование последних можно доказать. Имеется некоторая неоднозначность используемых разложений, но она не приводит к усложнениям при введении алгебраических и аналитических операций.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Christov Chr.Ya., Damianov B.P. P2 - 11103

Asymptotic Functions - A New Class of Generalized Functions. II. Existence of the Functions and Uniqueness of their Decompositions

In part of this investigation [1] a new type of generalized functions - the asymptotic functions are defined. In the present part we consider the question of their existence and the uniqueness of the decompositions by means of which their representatives are defined. It is shown, that the existence is ensured by some not very strong restrictions on the components of the function. Some nonessential arbitrariness of the used decompositions exists, which does not lead to complications in the introduction of the algebraic and analytic operations.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

В первой части этой работы [1] мы ввели новый класс обобщенных функций - асимптотические функции. Мы дали общую постановку задачи, объяснили, зачем вводятся эти функции, и сформулировали их точное определение. Не будем напоминать и резюмировать полученные в [1] результаты, а, пользуясь введенными там определениями, утверждениями и обозначениями, продолжим работу. Прежде всего рассмотрим вопросы существования этих функций и однозначности тех разложений (11,12) [1], при помощи которых они были введены.

Вопрос существования функций возникает в связи с условием компенсации D, а также и с условием мажорирования C определения 8 [1]. Мы покажем, в какой мере величины a-g определения 11 [1] произвольны и в какой мере часть из них задается условиями D и C. Увидим, что они в большой степени произвольны.

Вопрос однозначности состоит в следующем. Согласно (11), (12) в [1] каждая функция $f(s,x)$ задается своей регулярной и своими сингулярными частями $f_o(s,x)$ и $f_{\ell m}(s,t)$. А если это разложение неоднозначно, т.е. если данную функцию $f(s,x)$ мы можем получить при различных выборах f_o и $f_{\ell m}$, то может случиться, что одни из них будут удовлетворять условию D, а другие - нет. Кроме того, результат алгебраических и аналитических действий мы будем задавать, указывая, как величины a-g выражаются через эти же величины, характеризующие аргументы рассматриваемого действия. Увидим, что неоднозначность существует и она затрагивает даже такие самые основные характеристики, как L, x_ℓ и M_ℓ, и при этом в большой мере. Увидим, однако, что эта неопределенность касается только остаточных членов, а они несущественны для самих асимптотических функций и для определения действий над ними. А то, что если в одном из разложений условие D выполнено, следовательно, будет выполнено и во всех остальных, очевидно: условие D требует непрерывности функции $f(s,x)$ и ее производных, а это свойство не может зависеть от того, как функция разложена на сумму других, более простых функций. Начнем с вопроса существования.

1. НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКТИВНЫЕ ЗАДАЧИ

Докажем следующую нужную нам в дальнейшем

Теорему 1. Пусть заданы функции типа (1) из /1/ $\Delta f^i(s)$ $(i=0,1,\dots;\ 0<s\leqq s_1)$ степени ν^i и точности ν^{i*}, причем существует целое $\underline{\nu}$ и положительное $s_0\leqq s_1$, такие, что $\nu^i\geqq\underline{\nu}$ и

$$|\Delta f^i(s)| \leqq \hat{o}(s)\hat{\Delta f}^i \qquad \text{при} \quad 0<s<s_0. \qquad (1)$$

При этом $\hat{o}(s)/s^{\nu}\to 0$ при $s\to 0$, а $\hat{\Delta f}^i$ – произвольные числа: они могут расти сколь угодно быстро, когда $i\to\infty$ (пример таких функций был дан в /1/ к определению 8). Тогда существует функция $\underline{f}(s,t)$, бесконечно дифференцируемая при $t\neq 0$ и с левыми и правыми производными при $t=0$, такими, что

$$\frac{1}{i!}(\underline{f}^{(i)}(s,+0)-\underline{f}^{(i)}(s,-0)) = \Delta f^i(s), \qquad (2)$$

и при этом

$$|\underline{f}^{(i)}(s,t)| \leqq \hat{o}(s)\,\hat{f}^i(t) \qquad \text{при} \quad 0<s<s_0, \qquad (3)$$

где $\hat{f}^i(t)$ при $t\to\pm\infty$ стремятся быстро к нулю. Степень $\underline{f}(s,t)$ $\underline{\nu}=\min_i \nu^i$, а ее точность $\underline{\nu}^*=\min_i \nu^{i*}$.

Экстраполируем функцию $\hat{o}(s)$ для $s_0\leqq s\leqq s_1$ при единственном ограничении: она должна быть отличной от нуля в этом интервале. Обозначим

$$\Delta\tilde{f}^i(s) = \Delta f^i(s)/\hat{o}(s). \qquad (4)$$

(Если при некотором s $\hat{o}(s)=0$, то будем иметь $\Delta f^i(s)=0$ и по определению примем $\Delta\tilde{f}^i(s)=0$).

Пусть

$$g(\Delta\tilde{f}^i(s),t) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i(\Delta\tilde{f}^i(s),t), \qquad (5)$$

$$g_i(\Delta),t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\Delta t^i\left(1-\exp\frac{-1}{\tau^i|t|^\alpha|\Delta|}\right) & \text{при} \quad \Delta\neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad \Delta=0, \end{cases} \qquad (6)$$

где

$$\tau>0,\ 0<\alpha<1, \quad t^i = \begin{cases} t^i & \text{при} \quad t>0, \\ -t^i & \text{при} \quad t<0. \end{cases} \qquad (7)$$

Функция g из (5) определена и бесконечно дифференцируема при $0<|t|<\tau/2/$ и вместе со своими производными имеет указанные разрывы при $t=0$. Пусть еще

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } |t|>0, \\ 1-\frac{2A}{\rho}\left|\int_0^{|t|} e^{-\frac{\rho^2}{\rho^2-(2t'-\rho)^2}}dt'\right| & \text{при} \quad 0<|t|<\rho, \end{cases}$$

где $0<\rho<\tau$, $A^{-1}=\int_{-1}^{1} e^{-1/(1-t^2)}dt$. Эта функция всюду дифференцируема, равна нулю при $|t|\geqq\rho$ и единице при $t=0$, а все ее производные равны нулю. Тогда мы можем задать

$$\underline{f}(s,t) = \hat{o}(s)\,\underline{\tilde{f}}(s,t), \qquad (8)$$

$$\underline{\tilde{f}}(s,t) = g(\Delta\tilde{f}^i(s),t)\cdot h(t) \qquad (9)$$

при некотором фиксированном выборе α, τ и ρ. Так, функция $f(s,t)$ задается своими разрывами $\Delta f^i(s)$. Она определена при всех $s > 0$, $\leq s_1$ и бесконечно дифференцируема по t при всех $t \neq 0$. Она и ее производные по t удовлетворяют условию быстрого стремления к нулю при $t \to \pm\infty$, более того, – все они равны нулю при $|t| > \rho$.

Чтобы доказать мажорацию для $f(s,t)$, напомним прежде всего, что при $t > 0$ функции $g_i(\Delta, t)$ при всех Δ растут с возрастанием Δ. В самом деле, при $\tau^i |t|^\alpha |\Delta| \ll 1$ это очевидно. С другой стороны, из (6) при $t>0$ находим

$$\frac{\partial g_i}{\partial \Delta} = \frac{1}{2} t^i \left(1 - \exp\frac{-1}{\tau^i t^\alpha |\Delta|}\right) - \frac{1}{2} |\Delta| t^i \frac{1}{\tau^i t^\alpha \Delta^2} \exp\frac{-1}{\tau^i t^\alpha |\Delta|} =$$

$$= \frac{1}{2} t^i (1 - \exp(-z) - z\exp(-z)) = \frac{1}{2} t^i [1 - (1+z)e^{-z}],$$

$$\left| z = \frac{1}{\tau^i t^\alpha |\Delta|} \right| .$$

Первый множитель всегда положителен, а второй – неотрицателен: он обращается в нуль только при $z = 0$, т.е. при $|\Delta| = \infty$. Поэтому, принимая во внимание (5) и (6), при $t>0$ и $s \leqq s_0$ мы можем записать

$$|\underline{f}(s,t)| \leqq \hat{o}(s)\hat{f}(t), \tag{10}$$

$$\hat{f}(t) = g(\hat{f}^i, t)\, h(t). \tag{11}$$

При $t<0$ ситуация немного усложняется: множитель $\underline{t}^i$ при четных i отрицателен, и в связи с этим соответствующие члены будут возрастать с уменьшением, а не с увеличением Δ. Поэтому в согласии с (6) мажорация будет иметь вид (10) при

$$|\hat{f}(t)| \leqq g((-1)^{i+1} \Delta \hat{f}^i, t)\, h(t). \tag{12}$$

Эти два выражения можно подвести под одно общее определение. При $0 < s \leqq s_0$ они задают верхнюю огибающую

всех функций: $\tilde{f}(s,t) = g(\Delta\tilde{f}^i(s), t)\, h(t)$, где $\Delta\tilde{f}^i(s)$ при $0 < s \leqq s_0$ удовлетворяют условиям $|\Delta\tilde{f}^i(s)| < \Delta\hat{f}^i$. Если обозначим

$$y(\Delta f^i, t) = \sum_{i=0}^{\infty} |g_i(\Delta f^i, t)| = \begin{cases} g(\Delta f^i, t) & \text{при } t > 0, \\ g((-1)^{i+1} \Delta f^i, t) & \text{при } t < 0, \end{cases}$$

то (10) записывается в виде

$$|\underline{f}(s,t)| \leqq \hat{o}(s)\, g(\Delta\hat{f}_i, t) h(t).$$

Этим для функции $f(s,t)$ мажорация доказана (при $\hat{f}(t) = g(\Delta f_i, t)\, h(t)$).

Следует обобщить этот результат для производных $\underline{f}^{(j)}(s,t)$. Сложность состоит в том, что хотя и функция $\tilde{f}(s,t)$ (9) аналитична в секторах около $t > 0$ и $t < 0$ и, следовательно, бесконечно дифференцируема при $t \neq 0$ /2/, ее производные нельзя получить по формуле (9), заменяя $i!\Delta f^i(s)$ на $(i+j)!\, \Delta f^{i+j}(s)$, как можно было бы поступить, если бы функция $\underline{f}(s,t)$ задавалась при $t \geqq 0$ и $t \leqq 0$ обычным сходящимся степенным рядом: эти два выражения могут отличаться функцией, которая быстро исчезает при $t \to 0$.

Так как s_0 и $\hat{o}(s)$ для функций $\Delta f^i(s)$ и $f^{(i)}(s,t)$ одни и те же, мы можем переформулировать задачу, заменяя их на $\Delta\tilde{f}^i(s)$ и $\tilde{f}^{(i)}(s,t)$. Тогда теорема 1 получит следующую формулировку.

Пусть даны функции

$$\Delta\tilde{f}^i(s) \quad (i = 0, 1, 2, \dots;\ 0 < s \leqq s'),$$

допускающие мажорацию

$$|\tilde{f}^i(s)| < \Delta\hat{f}^i \tag{13}$$

($\Delta\tilde{f}^i(s)$ с возрастанием i могут расти произвольно быстро). Тогда существует функция

$$\underline{\tilde{f}}(s,t) \quad (0 < s < s_0),$$

которая имеет производные по t при $0 < s < s_0$ и $t \neq 0$ и имеет левые и правые производные $\underline{f}^{(i)}(s, +0)$,

$\underset{\sim}{\tilde{f}}^{(i)}(s,-0)$ при $t=0$, причем

$$\frac{1}{i!}(\underline{\tilde{f}}^{(i)}(s,+0)-\underline{\tilde{f}}^{(i)}(s,-0))=\Delta\tilde{f}^{\,i}(s),$$

и вместе со своими производными допускает мажорацию

$$|\underline{\tilde{f}}^{(i)}(s,t)|<\hat{f}^{\,i}(t). \qquad (14)$$

Если не требовать выполнения (14), задача сразу решается, даже в том случае, если мы не будем накладывать условия (13). Например,

$$\tilde{f}(s,t)=g(\Delta f^{\,i}(s),t)\,h(t).$$

Эта функция имеет производные со всеми необходимыми свойствами. Так, остается доказать, что если условие (13) поставлено, то можно найти функции $\hat{f}^{\,i}(t)$, такие, чтобы (14) имело место.

Однако видно, что в этой формулировке роль s принижена до некоторого параметра, задающего элементы некоторого множества чисел $\Delta\tilde{f}^{\,i}$ и функций $\tilde{f}(t)$, т.е. при любой замене $s\to s^*=s^*(s)$ справедливость утверждения будет сохраняться. (Это мы не могли бы утверждать для $\Delta f^{\,i}(s)$ и $f(s,t)$, так как $\hat{o}(s)$ не обладает такой инвариантностью). Тогда мы можем опять заменить формулировку на следующую (более сильную, но более простую).

Пусть даны переменные $\Delta f^{\,i}$ или, проще, Δ_i $(i=0,1,2\ldots)$, такие, что

$$|\Delta_i|\leqq\hat{\Delta}_i, \qquad (15)$$

причем $\hat{\Delta}_i$ фиксированы (и могут расти произвольно при $i\to\infty$).

При каждом выборе Δ_i существует функция

$$\underline{\tilde{f}}(\Delta_i,t),$$

которая бесконечно дифференцируема при $t\neq0$, имеет левые и правые производные при $t=0$, удовлетворяющие равенствам

$$\frac{1}{i!}(\underline{\tilde{f}}^{(i)}(+0)-\underline{\tilde{f}}^{(i)}(-9))=\Delta_i;$$

и при этом можно найти функции $\hat{f}^{\,i}(t)$, которые могут зависеть от $\hat{\Delta}_i$, но не от Δ_i, такие, что

$$|\underline{\tilde{f}}^{(i)}(\Delta_i,t)|\leqq\hat{f}^{\,i}(t), \qquad (16)$$

при любом выборе Δ_i, удовлетворяющих неравенству (15).

Как и раньше, если не требовать выполнения (16), задача будет иметь решение даже в случае, если не будет справедливо (15). Например,

$$\underline{\tilde{f}}(\Delta_i,t)=g(\Delta_i,t)\,h(t).$$

Покажем, что абсолютные значения этой функции и каждой из ее производных имеют верхнюю огибающую $\hat{f}^{\,i}(t)$, когда Δ_i меняются в рамках условий (15). Очевидно, они будут удовлетворять (16), так что вопрос сводится именно к существованию верхних огибающих $\hat{f}^{\,i}(t)$. Предположим обратное: что при некотором $t=t_o$ и некотором $i=i_o$ существует последовательность значений Δ_{in} $(n=1,2,\ldots)$, такая, что $f^{i_o}(\Delta_{in},t_o)\to\infty$ или $-\infty$ при $n\to\infty$. Так как Δ_{on} пробегают значения в замкнутом интервале $[-\hat{\Delta}_o,\hat{\Delta}_o]$, они должны иметь по крайней мере одну точку сгущения Δ_o^*, т.е. должна существовать бесконечная подпоследовательность возрастающих значений n, таких, чтобы соответствующие Δ_{on} стремились к Δ_o^*. Повторяем те же рассуждения для Δ_{1n} и выбираем Δ_1^*, затем Δ_2^* и т.д. Строим функцию $\tilde{f}^{(i_o)}(\Delta_i^*,t)$. Эта функция определена при всех t и, следовательно, при $t=t_o$ должна иметь определенное значение. С другой стороны, она является границей функций $\tilde{f}^{(i_o)}(\Delta_{in},t)$, значения которых при $t=t_o$ возрастают неограниченно, когда $n\to\infty$. Это противоречие доказывает, что верхние огибающие функций $\tilde{f}^{(i)}(\Delta_i,t)$ существуют. Отметим, что значения Δ_i^* могут зависеть от t_o, как это было видно из ранее рассмотренного примера $i=0$. Этим теорема 1 доказана.

Вторая задача, которую будем решать, следующая. Дать способ построения гладких частей $\bar{f}_{\ell m}(s,t)$

и $\bar{f}_o(s,x)$ типа $f_{\ell m}(s,t)$ и $f_o(s,x)$ без разрывов при $t=0$, соответствующем $x=x_\ell$.

Самый простой способ – это использовать построение $\underline{f}(s,t)$, но заменить в (6) разрывные степени $\underline{t}^i$ на обычные t^i. Тогда, очевидно, все разрывы исчезнут, и мы получим функцию типа $\bar{f}_{\ell m}(s,t)$ с заданными коэффициентными функциями $(\Delta f^i(s))$ разложения по степеням t. Затем мы можем заменить аргумент t на $a+bt$ или на любой полином t или даже на любую функцию $\phi(t)$, которая бесконечно дифференцируема и абсолютное значение которой $|\phi(t)|$ при $t\to\pm\infty$ растет не медленнее некоторой положительной степени t. Далее мы можем взять сумму таких функций. Обширные классы функций $\bar{f}_{\ell m}(s,t)$ можно получить этим способом, но, по-видимому, не все. Мы могли бы превратить суммы в бесконечные ряды, лишь бы они сходились равномерно. По отношению к s они могли бы иметь различные сингулярности при $s\geqq s_o$ и таким образом реализовать ситуацию (27) /1/, когда $f_{\ell m}(s,t)$ мажорируема только при $s<s_o$.

Третья задача – построить гладкую функцию $f_{\ell m}(s,t)$ по заданным коэффициентным функциям $f_{\ell mn}(t)$ – произвольным функциям класса S (бесконечно дифференцируемым и быстро стремящимся к нулю при $t\to\pm\infty$ вместе с ее производными). Если точность $\nu^*_{\ell m}$ конечна, функция $f_{\ell m}(s,t)$ находится сразу:

$$f_{\ell m}(s,t)=\sum_{n=\nu_{\ell m}}^{\nu^*_{\ell m}} f_{\ell mn}(t)\,s^n+f^*_{\ell m}(s,t),$$

причем остаточный член $f^*_{\ell m}(s,t)$ мы можем построить по вышеуказанному способу, а можем и не строить, так как он не является характеристикой асимптотической функции. Имея в виду, что каждый член $f_{\ell mn}(t)s^n$ мажорируем, мажорацию $f_{\ell m}(s,t)$ получаем из следующей элементарной

Теоремы 2. Пусть задано конечное число мажорируемых функций $f^k_{\ell m}(s,t)$ $(k=1,2,\dots K)$:

$$|f^{k\,i}_{\ell m}(s,t)|<\hat{o}(s)\cdot\hat{f}^{k,i}(t),$$

тогда их сумма $f_{\ell m}(s,t)$ тоже мажорируема:

$$\Big|\sum_{k=1}^{K} f^{k\,i}_{\ell m}(s,t)\Big|<\hat{o}(s)\hat{f}^{\,i}(t).$$

Чтобы показать это, достаточно взять

$$\hat{o}(s)=\max_k \hat{o}^k(s),\quad \hat{f}^{\,i}(t)=\sum_k \hat{f}^{k,i}(t).$$

Но если $\nu^*_{\ell m}=\infty$, эта конструкция усложняется, так как $f_{\ell mn}(t)$ при подстановке в (13) /1/ вместе с $f^*_{\ell m}(s,t)$ должны удовлетворять (23) /1/, а принадлежности $f_{\ell mn}(t)$ к S недостаточно для выполнения этого условия. Если $f^i_{\ell mn}(t)$ можно мажорировать при помощи функций $\hat{f}^i_{\ell mn}(t)$ типа $\hat{f}^i_{\ell mn}\cdot\hat{f}^i_{\ell m}(t)$, где $\hat{f}^i_{\ell mn}$ – произвольные числа, которые могут расти с возрастанием n, мажорация возможна: достаточно взять еще

$$\hat{o}_{\ell m}(s)=g(\hat{f}^i_{\ell mn}s^n,s)h(s)$$

при $s>s_o$ (см. теорему 1).

Нетрудно дать примеры, когда указанное условие удовлетворяется, но мы не можем найти в явном виде все последовательности функций $f_{\ell mn}(t)\,(n=\nu_{\ell m},\nu_{\ell m}+1,\nu_{\ell m}+2,\dots)$, которые могут привести к мажорируемым функциям $f_{\ell m}(s,t)$.

Сказанное в принципе относится и к $f_o(s,x)$ – только условие быстрого исчезновения $\bar{f}^{(i)}_o(s,x)$ при $x\to\pm\infty$ следует отбросить.

Мы можем сформулировать следующее необходимое и достаточное условие.

Теорема 3. Если заданы функции $f_n(t)$ $(n=\nu,\nu+1,\dots)$ класса S, мы можем построить функцию $f(s,t)$, для которой коэффициентные функции развития по степеням s совпадают с $f_n(t)$. Например,

$$f(s,t)=\sum_{n=\nu}^{\infty} f_n(t)\Big(1-e^{-\frac{1}{\tau^n|s|^\alpha|f_n(t)|}}\Big)s^n h(s)+\tilde{f}(s,t),\ |\tau<s_1,0<\alpha<1|$$

(см. (19) /4/ и теорему 1), где $\tilde{f}(s,t)$, как функция t, при любом s принадлежит классу S, а при любом t быстро стремится к нулю при $s\to 0$. Эта подстановка обеспечивает сходимость, дифференцируемость и быстрое стремление $\tilde{f}(s,t)$ к нулю при $t\to\pm\infty$, если $s\leqq s_1$, но, в общем, не обеспечивает мажорацию. Возможность при надлежащем выборе $\tilde f(s,t)$ обеспечить мажорацию представляет собой необходимое и достаточное условие для $f_n(t)$. Тогда самое общее выражение для $f(s,t)$ получим, если добавим остаточный член $f^*(s,t)$, удовлетворяющий условиям B и C определения 8 /1/ при $\nu^*=\infty$ и $\Delta f^i(s)=0$.

2. ВОЗМОЖНОСТЬ КОМПЕНСИРОВАТЬ РАЗРЫВЫ

Для удобства обозначим $\nu_{\ell_o}=\nu_o$, $\nu^*_{\ell_o}=\nu^*_o$, так что вместо $\nu_{\ell m}, \nu_o$ и $\nu^*_{\ell m}, \nu^*_o$ будем писать $\nu_{\ell m}$ и $\nu^*_{\ell m}$ $(m\in M_{\ell_o})$ $(\nu_{\ell m}\leqq \nu^*_{\ell m}+\epsilon)$. Предположим, что параметры

$$L, x_\ell, M_\ell, M^i_\ell \subset M_{\ell_o}, \nu^*_{\ell m}, \nu_{\ell m} \leqq \nu^*_{\ell m}+\epsilon \quad (m\in M_{\ell_o}) \tag{17}$$

заданы. Условие D, которое требует компенсации разрывов, очевидно накладывает ограничения на величины

$$\nu^i_{\ell m}, \nu^{i*}_{\ell m} \quad \Delta f^i_{\ell m}(s) \quad (m\in M_{\ell_o}), \tag{18}$$
$$\Big(\Delta f^i_{\ell m}(s) = \sum_{n=\nu^i_{\ell m}}^{\nu^{i*}_{\ell m}} \Delta f^i_{\ell mn}\, s^n + f^{i*}_{\ell m}(s)\Big).$$

Возникает вопрос, в какой мере оно ограничивает выбор этих величин. Будем подразумевать, что значения индексов собственны, т.е. степени $\nu^i_{\ell m}$ и точности $\nu^{i*}_{\ell m}$ максимальны.

Ясно, что разрывы при различных ℓ и i взаимно не обусловлены, т.е. общее условие компенсации D ведет к отдельным условиям компенсации D^i_ℓ, причем каждое из них,

$$\sum_m^{M_{\ell_o}} \Delta f^i_{\ell m}(s)\, s^{-mi} = 0, \tag{19}$$

будет затрагивать только величины $\nu^i_{\ell m}$, $\nu^{i*}_{\ell m}$ и $\Delta f^i_{\ell m}(s)$, соответствующие этой паре (ℓ, i) (множитель s^{-mi} появляется из-за того, что индекс i указывает дифференцирование по t, а мы должны компенсировать разрывы производных по единой переменной x).

Теорема 4. Необходимыми и достаточными условиями того, чтобы компенсация имела место, являются следующие:

1. По крайней мере две степени $\underline{\nu}^i_{\ell m} = \nu^i_{\ell m} - mi$ одинаковы, а все остальные выше их:

$$\underline\nu^i_{\ell m} = \underline\nu^i_\ell \ (m\in M^{io}_\ell),\ \underline\nu^i_{\ell m} > \underline\nu^i_\ell\ (m\in M^i_\ell\setminus M^{io}_\ell). \tag{20}$$

2. По крайней мере две точности $\underline\nu^{i*}_{\ell m} = \nu^{i*}_{\ell m} - mi$ одинаковы, а все остальные выше их:

$$\underline\nu^{i*}_{\ell m} = \underline\nu^{i*}_\ell\ (m\in M^{io*}_\ell),\ \underline\nu^{i*}_{\ell m} > \underline\nu^{i*}_\ell\ (m\in M^i_\ell \quad M^{io*}_\ell).$$

Множества $M^{io}_\ell\subset M^i_\ell$ и $M^{io*}_\ell \subset M^i_\ell$, если они не пустые, содержат по крайней мере два элемента m. Поэтому M^i_ℓ не может содержать только один элемент m: оно или пустое, или имеет по крайней мере два элемента.

3. Для каждой пары (ℓ, i) и для каждой степени $\underline n$ (19) дает

$$\sum^{M^i_{\ell(n)}} \Delta f^i_{\ell,m,\underline n+mi} = 0 \quad \text{при} \quad \underline\nu^i_{\ell m} \leqq \underline n \leqq \underline\nu^{i*}_{\ell m}, \tag{21}$$

$$\sum_m^{M^i_\ell} \Delta f^{i*}_{\ell,m,\underline\nu^{i*}_\ell+mi}(s)\, s^{-mi} = 0. \tag{22}$$

При этом $M^i_{\ell(\underline n)}$ означает то подмножество M^i, для которого $\nu^i_{\ell m} - im \leqq \underline n$, а $\Delta f^{i*}_{\ell,m,\underline\nu^{i*}_\ell+mi}(s)$ задается через (21) в /1/ при $n=\nu^{i*}_\ell = \underline\nu^{i*}_\ell + mi$ – это остаточный член выражения (19).

Необходимость иметь по крайней мере два члена, удовлетворяющих условиям 1 и 2 теоремы 4, связана с тем, что иначе нельзя было бы выполнить условия (21) и (22) без нарушения договоренности о том, что индексы $\nu^i_{\ell m}$ и $\nu^{i*}_{\ell m}$ являются собственными. Условию (21) можно удовлетворить надлежащим выбором $\Delta f^i_{\ell mn}$ при некотором, например наименьшем, $m'\in M^{io}_\ell$ или $m'\in M^i_{\ell(n)}$, а условию (22) – надлежащим выбором $\Delta f^{i*}_{\ell m}(s)$ при некотором, например наименьшем, $m'^*\in M^{io*}$ или $m'^*\in M^{i*}_{\ell(n)}$. Этого можно достичь при любом выборе остальных $\Delta f^i_{\ell mn}$ и $\Delta f^{i*}_{\ell m}(s)$, лишь бы

$$\sum_{m}^{M^{i}_{\ell(n)}\{m'\}} \Delta f_{\ell m\, \nu^{i}_{\ell}} \neq 0 ,$$

соответственно

$$\lim_{s \to 0} \sum_{m}^{M^{i}_{\ell}\{m'^{*}\}} \Delta f^{\,i\,*}_{\ell m\, \nu^{i*}_{\ell}} : s^{\nu^{i*}_{\ell}} \neq 0$$

(последние условия необходимы только в связи с договоренностью о том, что степени и точности являются собственными). В общем, m' и m'^{*} не совпадают.

Величины $\nu^{i}_{\ell m}$ непроизвольны – каждая из них удовлетворяет неравенствам

$$\nu^{i}_{\ell m} \geqq \nu_{\ell m}\,, \quad \nu^{i}_{\ell m} \geqq \underline{\nu}^{\,i}_{\ell} + mi\,. \tag{23}$$

Аналогично:

$$\nu^{i*}_{\ell m} \geqq \nu^{*}_{\ell m}\,, \quad \nu^{i*}_{\ell m} \geqq \underline{\nu}^{\,i}_{\ell} + mi\,. \tag{24}$$

Кроме того, очевидно $\nu^{i}_{\ell m} \leqq \nu^{i*}_{\ell m} + \epsilon$.

Некоторая сложность возникает при нахождении $\nu^{i}_{\ell m}$ и $\nu^{i*}_{\ell m}$ из-за того, что эти величины должны удовлетворять сразу нескольким неравенствам. Покажем, как это можно сделать после того, как величины (17) выбраны, причем M^{i}_{ℓ} при каждом ℓ и i содержат по крайней мере два элемента или являются пустыми. Способ, который приведен здесь, имеет и то преимущество, что дает нам возможность видеть некоторые связи между $\nu^{i}_{\ell m}$ и $\nu^{i*}_{\ell m}$ при различных ν.

Строим диаграмму 1. По абсциссе откладываем значения степеней

$$\underline{n} = \nu_{\ell m} - im, \tag{25}$$

производных по x $s^{-mi} f^{(i)}_{\ell m}(s,t)$ функции $f_{\ell m}(s,t)$, а значения их порядка откладываем по ординате. Серия прямых L_m описывается уравнениями (25). Каждая соответствует заданному значению m (ℓ фиксировано). Для удобства эти прямые представлены сплошными линиями, хотя на самом деле i и n целочисленны, и масштабы i и n выбраны неодинаковыми – иначе все прямые L_m получились бы очень пологими. Жирная линия $\mathfrak{L}$ ограничивает

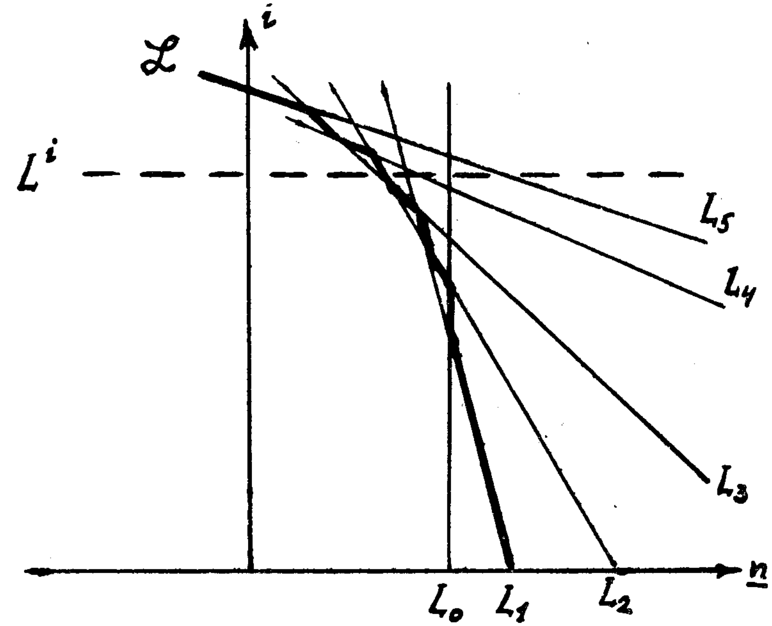

Рис. 1

слева ту область S на плоскости $\underline{n}$, i, где при каждом $i \geqq 0$ имеются по крайней мере два значения n, которые больше степеней соответствующих производных $\underline{\nu}_{\ell m} = \nu_{\ell m} - im$ или равным. Она составлена из отрезков прямых L_m так, чтобы левее их проходила только одна прямая L_m . Если L^{i} – прямая, параллельная оси $\underline{n}$ на высоте i, то абсциссы точек ее части, которая правее $\mathfrak{L}$, задают возможные значения параметра ν^{io}_{ℓ} – минимального значения степеней $\nu^{i}_{\ell m}$. Нетрудно из этой диаграммы получить значения $m \in M^{io}_{\ell}$, а также число возможных элементов в M^{io}_{ℓ}: это некоторое подмножество тех значений m, для которых точки пересечения L_m и L^{i} находятся влево от точки с абсциссой ν^{io}_{ℓ} на прямой L^{i} .

Мы можем поступить наоборот: сначала задаем $M^{io}_{\ell} \subset M^{i}_{\ell}$ и потом ищем $\underline{\nu}^{\,io}_{\ell}$: точка с абсциссой $\underline{\nu}^{\,io}_{\ell}$ на прямой L^{i} находится правее всех точек пересечения L^{i} с L_m $(m \in M^{io}_{\ell})$.

Остальные значения $\underline{\nu}^{i}_{\ell m}$ выбираются легко. Точка с абсциссой $\nu^{i}_{\ell m}$ на прямой L^{i} должна лежать правее точки с абсциссой ν^{io}_{ℓ} и точки пересечения L_m и L^i. Тогда $\nu^{i}_{\ell m} = \underline{\nu}^{i}_{\ell m} + mi$.

Совершенно аналогичным способом находим прямые L^* и множества M^* значений m, которым соответствуют разрывы низшей точности $\underline{\nu}^{io*}_{\ell}$, а также точности $\underline{\nu}^{io**}_{\ell}$, $\underline{\nu}^{i*}_{\ell m}$, ν^{io*}_{ℓ} и $\nu^{i*}_{\ell m}$ разрывов $\Delta f^{i}_{\ell m}(s)$ для всех функций $f_{\ell m}(s,t)$ $(m \in M_{\ell o})$. Разница только в следующем:

I. Вместо $\nu^{i}_{\ell m}$ берем $\nu^{i*}_{\ell m}$.

II. Прямые L^*_m задаются не уравнением(25),а уравнением

$$\underline{n} = \nu^{i*}_{\ell m} - im.$$

III. Для каждого m добавляется еще условие

$$\underline{\nu}^{i*}_{\ell m} \geqq \underline{\nu}^{i}_{\ell m} - \epsilon ,$$

а следовательно, и

$$\underline{\nu}^{i*}_{\ell} \geqq \underline{\nu}^{i}_{\ell} - \epsilon .$$

Видно, что, в общем, множества M^{io}_{ℓ} и M^{io*}_{ℓ} не должны совпадать, а также и то, что индекс m остаточного члена $\Delta f^{i*}_{\ell m}$, который задается условием компенсации, может отличаться от соответствующего индекса для компоненты $\Delta f^{i}_{\ell mn}$, задаваемого условием компенсации, который, со своей стороны, может зависеть и от n (кроме ℓ и i).

Как мы увидим, если функцию f(s,x) с непрерывными частями $f_{\ell m}$ и f_o проинтегрировать один или несколько раз, то появившиеся разрывы в сингулярных частях можно компенсировать разрывами регулярной части. Но это не всегда так. Чтобы все разрывы при заданном ℓ можно было компенсировать разрывами одной и той же части $f_{\ell m}$, необходимо и достаточно, чтобы все точки $\underline{\nu}^{i}_{\ell m}$, i (i = 0,1,2,...,m$\neq$m) находились не левее прямой L_m, а все точки $\nu^{i*}_{\ell m}$, i – не левее L^*_m.

После того, как величины (17) и (18) выбраны, частично произвольно, а частично исходя из указанных условий, по теореме 1 мы можем построить функции $\underline{f}_{\ell m}(s,t)$ с этими разрывами.

Если мы хотим охарактеризовать функции $\underline{f}_{\ell m}(s,t)$, отметим следующее. Каждая из них является бесконечной суммой по i. Каждой ее производной соответствует один член, причем левая и правая i-е производные $f_{\ell m}(s,t)$ при t=0 совпадают с левой и правой производными i-го члена. Члены, соответствующие четным производным, являются нечетными функциями t, а те члены, которые соответствуют нечетным производным, – четными функциями t. Функции однозначно не определяются своими разрывами: параметры α, τ, ρ и функции $\hat{o}_{\ell m}(s)$ в значительной мере произвольны. Но мы примем, что при помощи некоторых, несущественных для нас правил все эти параметры фиксированы, так что переход от $\Delta f^{i}_{\ell m}(s)$ к $\underline{f}_{\ell m}(s,t)$ не влечет за собой введения никаких свободных параметров.

Теперь каждую компоненту f(s,t) мы можем получить, добавляя к $\underline{f}_{\ell m}(s,t)$ произвольную гладкую функцию $\bar{f}(s,t)$ степени $\nu_{\ell m}$ и точности $\nu^{*}_{\ell m}$ (быстро исчезающую при $t \to \pm\infty$). Функцию $f_o(s,x)$ получим, добавляя к $\sum_{\ell} \underline{f}_{\ell o}(s,x-x)$ произвольную гладкую функцию $\bar{f}(s,x)$ степени ν_o и точности ν^{*}_{o} (она не должна исчезать быстро при $x \to \pm\infty$). Все они находятся по второй процедуре, указанной в пункте 1. В этом заключается процедура построения любой функции f(s,x), или, точнее, любое ее разложение:

$$f_o(s,x) = \bar{f}_o(s,x) + \sum_{\ell} \underline{f}_{\ell o}(s, x - x_{\ell}) , \qquad (26)$$

$$f_{\ell m}(s,t) = \bar{f}_{\ell m}(s,t) + \underline{f}_{\ell m}(s,t),$$

так что

$$f(s,x) = \bar{f}_o(s,x) + \sum_{\ell,m} \bar{f}_{\ell m}(s, t_{\ell m}) + \sum_{\ell,m}{}^{o} \underline{f}_{\ell m}(s, t_{\ell m}). \qquad (27)$$

При этом $\sum_{\ell,m}^{o}$ означает, что $m \in M_{\ell o}$, а не только M_{ℓ}.

С помощью этой процедуры мы можем получить все разложения типа (11), (12) в /1/, причем различным выборам величин (17), (18), $\{\bar{f}_{\ell m}(s,t)$ и $\bar{f}_o(s,x)$ соответствуют различные разложения, т.е. различные наборы величин a – g (см. теорему 8 в /1/).

3. МОДУЛЬ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ

Ясно, что каждому набору величин $a-g$ соответствует одна определенная функция $f(s,x) \in F(s,x)$ и что каждой такой функции соответствует по крайней мере один набор величин $a-g$. Но открытым остается вопрос, только ли один набор $a-g$ соответствует каждой заданной функции $f(s,x)$. Иными словами, ставится вопрос, однозначно ли разложение (11,12) в /1/. Этот вопрос важен потому, что определение действий над асимптотическими функциями мы сведем к указанию того, как величины $a-g$, характеризующие $f(s,x)$, можно выразить через те же величины, соответствующие аргументам рассматриваемого действия. А если те же аргументы можно задать различными величинами $a-g$, то будет неясность относительно однозначности определения результата. Увидим, что такая неоднозначность существует и затрагивает в значительной мере даже самые основные характеристики, такие, как L, x_ℓ, M_ℓ, однако она касается только остаточных членов, причем неопределенные добавки очень малы – их степени бесконечны, и поэтому эта неоднозначность несущественна.

Прежде всего, ясно, что разность (как и сумма) двух разложений типа (11,12) /1/, характеризуемых величинами $a-g$ и $a'-g'$, будет иметь тот же самый вид, причем нетрудно выразить величины $a''-g''$, характеризующие результат, через $a-g$ и $a'-g'$: набор точек $x_{\ell''}''$ будет объединением точек x_ℓ и $x_{\ell'}'$. Внутренний спектр $M_{\ell''}''$, соответствующий заданному $x_{\ell''}''$, будет M_ℓ $M_{\ell'}'$, M_ℓ или $M_{\ell'}'$ в зависимости от того, совпадает ли $x_{\ell''}''$ с некоторыми из точек x_ℓ и $x_{\ell'}'$, или только с одной из них, и т.д. Поэтому вопрос сводится к нахождению модуля эквивалентности – самого общего набора величин $a-g$, который задает тождественно исчезающую функцию $f(s,x)$ (определение 1).

Т е о р е м а 5. Добавлением любого модуля эквивалентности к заданному разложению некоторой функции $f(s,x)$ мы получаем другое разложение той же самой функции, и все ее разложения можно получить этим способом, исходя из любого среди них.

Т е о р е м а 6. Необходимым (хотя и недостаточным) условием для того, чтобы функция $f(s,x)$ была модулем эквивалентности, является условие, чтобы она была представителем некоторого абсолютного нуля (см. определение 15 и теорему 10 в /1/). (Это справедливо даже и в том случае, если при введении функций $f(x)$, среди которых допускаются равные нулю, условие компенсации D определения 8 в /1/ не было бы поставлено).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем использовать простое утверждение, что если

$$\sum_{n=\nu}^{\nu^*} a_n s^n + o^{\nu^*}(s) = 0 \tag{28}$$

при всех s, то обязательно $a_n = o^{\nu^*}(s) = 0$. Для модуля эквивалентности имеем

$$\sum_n f_{on}(x) s^n + f_o^*(s,x) + \sum_{\ell,m,n} f_{\ell mn}(t_{\ell m}) s^n + \sum_{\ell,m} f_{\ell m}^*(s,t_{\ell m}) = 0. \tag{29}$$

Даем переменной x некоторое фиксированное значение $x_o \neq x_\ell$. Все члены превратятся в функции s. В результате использования подстановки (12) в /1/ и выполнения свойства C определения 8 /1/ при $s \to 0$ все члены последних двух сумм в (29) будут быстро стремиться к нулю. Члены первой суммы зададут полином s степени не выше ν_o^*, а $f_o^*(s,x)$ будет убывать быстрее, чем $s^{\nu_o^*}$. Согласно (28) при любом $x_o \neq x_\ell$ уравнение (29) ведет к исчезновению компонент $f_{on}(x)$ и к тому, что остаточный член $f_o^*(s,x)$ должен быстро стремиться к нулю, т.е. получаем $\nu_o = \nu_o^* = \infty$. (Не можем утверждать, что $f_o^*(s,x) = 0$, так как этот член мог бы быть компенсирован остальными быстро стремящимися к нулю членами). Согласно определению 9 в /1/ тот же результат имеет место и при $x = x_\ell$.

Имея в виду это, подставляем в (29) $x = x_\ell + s t_o$ при некотором выбранном ℓ и фиксированном $t_o \neq 0$. При $s \to 0$ все оставшиеся члены быстро стремятся к нулю за исключением, может быть, $f_{\ell 1n}(t_o)s^n$ и $f_{\ell 1}^*(s,t_o)$. Согласно (28) опять находим $f_{\ell 1n}(t) = 0$ и $\nu_{\ell 1} = \nu_{\ell 1}^* = \infty$, а согласно определению 9 /1/ получаем, что это верно для всех t. Повторяем эти рассуждения подряд при любом ℓ и получаем, что результат имеет место для всех ℓ. Имея в виду и этот результат, подставляем $x = x_\ell + s^2 t_0$, считая t_0 фиксированным. Путем тех же рассуждений получаем $f_{\ell 2n}(t) = 0$ и $\nu_{\ell 2} = \nu^*_{\ell 2} = \infty$ при всех t и ℓ. В общем получаем $\nu_0 = \nu^*_0 = \nu_{\ell m} = \nu^*_{\ell m} = \infty$ – все коэффициенты модуля – нуль, а точности всех остаточных членов – бесконечны. Согласно определению 1 и формулам (11,12) [1] теорема 6 доказана: модуль эквивалентности должен иметь вид

$$f(s,x) = \bar{f}^*_0(s,x) + \sum_{\ell,m} \bar{f}^*_{\ell m}(s,t_{\ell m}) + \sum_{\ell,m}{}_0\, \underline{f}^*_{\ell m}(s,t_{\ell m}), \tag{30}$$

$$(t_{\ell m} = (x - x_\ell)s^{-m}, \quad \bar{\nu}^*_0 = \bar{\nu}^*_{\ell m} = \underline{\nu}^*_{\ell m} = \infty).$$

Конечно, чтобы это выражение было представителем абсолютного нуля, необходимо, чтобы разрывы были скомпенсированы.

Дальше найдем, какие еще ограничения на $\bar{f}^*_0$, $\bar{f}^*_{\ell m}$ и $\underline{f}^*_{\ell m}$ мы должны наложить чтобы выражение (27) было модулем. Введем прежде всего некоторые обозначения. Пусть LM – множество пар ℓ, m, которым соответствуют отличные от нуля функции $f_{\ell m} = \underline{f}_{\ell m} + \bar{f}_{\ell m}$. При этом примем для единства, что если $f_0 \neq 0$ или $\bar{f}_0 \neq 0$, в LM появляются сразу все пары $\ell, 0$ (им, конечно, соответствует один член, который можем записать в виде

$$f_0(s,x) = \sum_\ell f_{\ell 0}(s, t_{\ell 0}) \qquad (t_{\ell 0} = x - x_\ell), \tag{31}$$

соответственно

$$\bar{f}_0(s,x) = \sum_\ell \bar{f}_{\ell 0}(s, t_{\ell 0}), \tag{32}$$

хотя и $f_{\ell 0}$ и $\bar{f}_{\ell 0}$ отдельно не определены однозначно. Дальше LM^i будет то множество пар ℓ, m, которым соответствуют отличные от нуля разрывные функции $\underline{f}^i_{\ell m}(s,t)$. Очевидно, $LM^i \subset LM$, а (11,12) [1] запишется в более компактном виде:

$$f(s,x) = \sum_{\ell,m}^{LM} f_{\ell m}(s, t_{\ell m}) = \sum_{\ell,m}^{LM} \underline{f}_{\ell m}(s, t_{\ell m}) + \sum_{\ell,m}^{LM} \bar{f}_{\ell m}(s, t_{\ell m}).$$

Введем еще обозначения $I_{\ell m}$, M^i_ℓ, MI_ℓ и т.д., как множества значений i при заданных ℓ, m, множества m при заданных ℓ, i, множества пар m, i при заданном ℓ, которым соответствуют ненулевые разрывы $\Delta f^i_{\ell m}(s)$.

Оказывается полезным ввести еще понятие локализованных асимптотических функций (это те функции, у которых не только сингулярные части, но и регулярная часть удовлетворяет условию быстрого стремления к нулю при $t_{\ell m} \to \infty$). Для регулярной части это имеет место при $x \to \pm\infty$. В соответствии с этим мы будем иметь локализованные нулевые асимптотические функции, а также локализованные абсолютные нулевые асимптотические функции. Тогда (30) можно записать в виде

$$f(s,x) = \sum_{\ell,m}^{LM} f^*_{\ell m}(s,x) = \sum_{\ell,m}^{LM} \bar{f}^*_{\ell m}(s, t_{\ell m}) + \sum_{\ell,m}^{\bigcup_i LM^i} \underline{f}^*_{\ell m}(s, t_{\ell m}). \tag{33}$$

Некоторым парам $\ell, m \in LM$ могут соответствовать и нулевые значения $\bar{f}^*_{\ell m}$. Это возможно только тогда, когда для этой пары $\underline{f}^*_{\ell m} \neq 0$. Нет необходимости указывать степени и точности отдельных членов в (33) – все они бесконечны.

Сформулируем некоторые теоремы, указывающие на эквивалентность между членами (33).

Теорема 7. Пусть $F^{*I}_{\ell m}$ – множество функций $f^*_{\ell m}(s,t)$ степени $\nu_{\ell m} = \infty$ с разрывами при $i \in I$, где I, точнее, $I_{\ell m}$ – некоторое множество неотрицательных чисел i. Подразумеваем, что если $m = 0$, функции $f^*_{\ell 0}(s,t)$ локализованы. Имеется эквивалентность:

$$F^{*I}_{\ell m}(s, t_{\ell m}) \equiv F^{*I}_{\ell m'}(s, t_{\ell m'}) \qquad (m, m' \in M_{\ell 0}). \tag{34}$$

Это значит, что при любых $m, m' \in M_{\ell 0}$ каждой функции $f^*_{\ell m}(s, t_{\ell m})$ из множества $F^{*I}_{\ell m}(s, t_{\ell m})$ можно сопоставить функцию $f'^*_{\ell m'}(s, t_{\ell m'})$ из $F^{*I}_{\ell m'}(s, t_{\ell m'})$ с теми же производными с разрывами ($I \equiv I'$), значения которой совпадают со значениями $f^*_{\ell m}$ при всех s и всех x. Справедливо, конечно, и обратное утверждение: каждой функции $f'^*_{\ell m'}$ соответствует функция $f^*_{\ell m}$ с совпадающими значениями.

Докажем сначала, что $F^{*I}_{\ell_m}(s,t_{\ell_m}) \subseteq F^{*I}_{\ell_m'}(s,t_{\ell_m'})$. Условия дифференцируемости и быстрого стремления к нулю при $t \to \pm\infty$, очевидно, выполнены: если $f^*_{\ell_m}(s,t_{\ell_m})$, рассматриваемая как функция класса $F^{*I}_{\ell_m}$, удовлетворяет этим условиям, она будет удовлетворять им и как функция класса $F^{*I}_{\ell_m'}$. Остановимся на доказательстве мажорации. Пусть дано, что мажорирование (23) в /1/ для $f^*_{\ell_m}(s,t)$ имеет место. При этом мы можем предположить, что функции $\hat{f}^i_{\ell_m}(t)$ $(i=0,1,2..)$ убывают с возрастанием t при $t>0$, а также и с уменьшением t при $t<0$. Рассмотрим сначала случай $m>m'\geq 0$. Тогда, обозначая $t_{\ell_m'}=t$, для функции $f^*_{\ell_m}(s,t_{\ell_m})=f^*_{\ell_m}(s,t.s^{-(m-m')})$ $(m-m'>0)$, рассматриваемой как функция класса $F^{*I}_{\ell_m'}(s,t)$, в интервале $0<s<s_o$ и при $t\neq 0$ находим

$$\frac{1}{i!}\left|\frac{d^i}{dt^i}f^*_{\ell_m}(s,ts^{-(m-m')})\right|=\left|s^{-i(m-m')}f^{*i}_{\ell_m}(s,ts^{-(m-m')})\right|\leq$$

$$\leq \hat{o}^i_{\ell_m}(s)s^{-i(m-m')}\hat{f}^i_{\ell_m}(ts^{-(m-m')})\leq \hat{o}^i_{\ell_m}(s)s^{-i(m-m')}\hat{f}^i(t.s_1^{-(m-m')}).$$

(s_1 - верхний предел возможных значений s). Выбираем

$$\hat{o}^i_{\ell_m'}(s)=\hat{o}^i_{\ell_m}(s)s^{-i(m-m')},\quad \hat{f}^i_{\ell_m}(t)=\hat{f}^i_{\ell_m}(ts_1^{-(m-m')}).$$

Таким образом, найдена оценка (23) /1/ для функции $f^*_{\ell_m}(s,t_{\ell_m})$, рассматриваемой как функция класса $F^{*I}_{\ell_m'}$ $(\bar{s}_o=s_o)$. Это доказательство справедливо и при $m'=0$.

Покажем справедливость той же самой мажорации в случае $0\leq m<m'$. Для функции

$$f^*_{\ell_m}(s,t_{\ell_m})=f^*_{\ell_m}(s,ts^{m'-m})\qquad |m'-m>0|,$$

рассматриваемой как функция класса $F^*_{\ell_m'}(s,t_{\ell_m'})$, имеем

$$\frac{1}{i!}\left|\frac{d^i}{dt^i}f^*_{\ell_m}(s,ts^{m'-m})\right|\leq\left|s^{i(m'-m)}f^{*i}_{\ell_m}(s,ts^{m'-m})\right|\leq$$

$$\leq s^{i(m'-m)}\hat{o}^i_{\ell_m}(s)\hat{f}^i_{\ell_m}(t.s^{m'-m}).$$

Положим

$$s^{i(m'-m)}\hat{o}^i_{\ell_m}(s)=\underline{o}^i_{\ell_m'}(s)\hat{\bar{o}}^i_{\ell_m'}(s).$$

При этом обе функции, $\underline{\hat{o}}^i_{\ell_m'}$ и $\hat{\bar{o}}^i_{\ell_m'}$, быстро стремятся к нулю, а $\hat{\bar{o}}^i_{\ell_m'}(s)$ остается ограниченной при $0<s\leq s_1$. Определяем еще

$$\hat{f}^i_{\ell_m'}(t)=\sup_{0<s\leq s_1}\hat{\bar{o}}^i_{\ell_m'}(s)\hat{f}^i_{\ell_m}(t.s^{m'-m})$$

и получаем

$$\frac{1}{i!}\left|\frac{d^i}{dt^i}f^*_{\ell_m}(s,ts^{m'-m})\right|\leq \underline{\hat{o}}^i_{\ell_m'}(s)\hat{f}^i_{\ell_m'}(t).$$

Покажем, что функция $\hat{f}^i_{\ell_m'}(t)$ при $t\to\pm\infty$ тоже быстро стремится к нулю. (Доказательство, которое мы приводим, дано И.Т.Тодоровым.) На самом деле, при $t>0$ и любом $n>0$ имеем

$$\hat{f}^t_{\ell_m'}(t)\cdot t^n=\max_{0<s\leq s_1}s^{-n(m'-m)}\hat{\bar{o}}^i_{\ell_m'}(s)\hat{f}^i_{\ell_m}(ts^{m'-m})(ts^{m'-m})^n.$$

Ввиду того, что $\tilde{\bar{o}}^i_{\ell_m'}(s)$ при $s\to 0$ быстро стремится к нулю, множитель $s^{-n(m'-m)}\hat{\bar{o}}^i_{\ell_m'}(s)$ будет оставаться ограниченным при всех s. Из того, что функция $\hat{f}^i_{\ell_m}(t_{\ell_m})$ при $t_{\ell_m}\to\infty$ также быстро стремится к нулю, видно, что множитель $\hat{f}^i_{\ell_m}(ts^{m'-m})\cdot(ts^{m'-m})^n$ стремится к нулю при $t\to\infty$. Доказательство при $t<0$ аналогично. Этим искомое мажорирование доказано, и тем самым доказана указанная эквивалентность.

Теорема 8. При $\nu_{\ell_o}=\nu_{\ell'_o}=\infty$ множества $\bar{F}_{\ell_o}(s,t_{\ell_o})$ и $\bar{F}_{\ell'_o}(s,t_{\ell'_o})$ из локализованных функций $\bar{f}_{\ell_o}(s,x-x_{\ell})$ и $\bar{f}_{\ell'_o}(s,x-x_{\ell'})$ эквивалентны.

Эта теорема очевидно означает, что любую непрерывную функцию $\bar{f}^*_{\ell_o}(s,t_{\ell_o})$ из класса $\bar{F}_{\ell_o}(s,t_{\ell_o})$ при $\nu_{\ell_o}=\infty$ мы можем рассматривать как функцию $\bar{f}_{\ell'_o}(s,t_{\ell'_o})$ из класса $\bar{F}_{\ell'_o}(s,t_{\ell'_o})$ при $\nu_{\ell'_o}=\infty$ и наоборот $(t_{\ell_o}+x_{\ell}=x=t_{\ell'_o}+x_{\ell'})$. Условие B в случае $I=\Phi$ безотносительно к ℓ, так что оно сразу переносится от ℓ к ℓ' и обратно. Чтобы проверить C, покажем сначала, что $\bar{F}_{\ell_o}\subset\bar{F}_{\ell'_o}$. После того, как функции $\hat{o}^i_{\ell_o}(s)$ и $\hat{f}^i_{\ell_o}(t)$ даны, строим

$$\hat{o}^{i}_{\ell'_o}(s)=\hat{o}^{i}_{\ell_o}(s),$$
$$\hat{f}^{i}_{\ell'_o}(t)=\hat{f}^{i}_{\ell_o}(t+x_{\ell}-x_{\ell'}).$$

Аналогично доказывается, что $\bar{F}_{\ell_o}\supset\bar{F}_{\ell'_o}$. Этим теорема 8 доказана.

Теорема 9. Имеются два включения: $F^{\Phi}_{\ell_o}\subset F_o$ и $F^{I}_{\ell_m}\subset F^{I'}_{\ell_m}$, если $I\subset I'$ ($\nu_{\ell_o}=\infty$).
Этими соотношениями (и теми, которые из них следуют) исчерпываются все эквивалентности и включения между функциями $F^{I}_{\ell_m}$.

Теорема 10. Еще одним необходимым условием для того, чтобы данное разложение (11,12)[1] было модулем эквивалентности, является то, что его регулярная часть должна удовлетворять условию быстрого исчезновения при $x\to\pm\infty$, т.е. оно должно быть представителем локализованной абсолютной нулевой асимптотической функции.

Это следует непосредственно из (11,12)[1], (29) и (30), если иметь в виду, что все компоненты $f_{\ell_m}(s,t_{\ell_m})$ в (11,12)[1] (их множество конечно) удовлетворяют этому условию, а они вместе с $f_0(s,x)$ должны дать 0.

Каждый модуль эквивалентности является представителем некоторой локализованной абсолютной нулевой функции, но обратное утверждение несправедливо. У нулевой функции регулярная и сингулярные компоненты произвольны, а для модуля их сумма - нуль. Следующие две теоремы показывают, какие из этих частей мы можем взять произвольно.

Теорема 11. Пусть $f(s,x)$ - некоторый представитель одной локализованной абсолютной нулевой функции. Надлежащим изменением одной (любой) из ее компонент, сохраняя все остальные, или добавлением одной новой компоненты, сохраняя все заданные, мы можем превратить $f(s,x)$ в модуль эквивалентности. (Это утверждение имеет место даже и без учета условия компенсации разрывов - условия D определения 8 [1]).

Эта компонента задается суммой остальных, соответственно суммой всех заданных компонент, взятой с обратным знаком. То, что эта сумма будет обладать свойствами B и C согласно определению 8[1], следует из теорем 2, 7 и 8.

4. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ И СТАНДАРТНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

Видно, что разложение (11,12) в[1] неоднозначно: если к некоторому разложению данной функции $f(s,x)$ добавим некоторый модуль, получим новое разложение той же самой функции. Это ведет к возникновению понятий класса эквивалентных разложений данной функции $f(s,x)$ и данной асимптотической функции $f(x)$:

Определение 2. Два разложения (11,12)[1], заданные наборами величин $a-g$ и $a'-g'$ (см. теорему 8[1]), эквивалентны, если они задают одну и ту же функцию $f(s,x)$.

Определение 3. Каждому разложению заданной асимптотической функции, заданному набором величин $a-e$, соответствует множество разложений ее представителей $f(s,x)$, которые задаются еще величинами f и g (см. теорему 8[1]).

Определение 4. Два разложения, заданные наборами $a-e$ и $a'-e'$, эквивалентны, если соответствующие им множества разложений их представителей, заданные еще величинами f и g, соответственно f' и g', эквивалентны, т.е. если каждому разложению, заданному величинами $a-g$, соответствует разложение, заданное величинами $a'-g'$, и наоборот.

Обозначим через $\underset{\sim}{LM}$ и $\underset{\sim}{LM}^{i}$ подмножества множеств LM и LM^{i}, характеризуемые тем, что степени соответствующих компонент f_{ℓ_m} конечны. Тогда нетрудно проверить

Теорему 12. Необходимыми и достаточными условиями для того, чтобы два разложения, $a-g$ и $a'-g'$, задавали одну и ту же функцию $f(s,x)$, являются следующие:

1. $\underset{\sim}{LM}^{i}\equiv\underset{\sim}{LM}^{i\,\prime}$,
2. $\Delta f^{i}_{\ell_m}(s)-\Delta f^{i\,\prime}_{\ell_m}(s)=o^{\infty}(s)\quad(i=0,1,2,\ldots;(\ell,m)\in\underset{\sim}{LM}^{i})$,

3. $\sum_{m}^{M_\ell^i} \Delta f^i_{\ell_m}(s) = \sum_{m}^{M_\ell^{i}} \Delta f^{i'}_{\ell_m}(s) = 0 \qquad ((\ell, i) \in \underset{\sim}{LI}),$

4. $\underset{\sim}{LM} = \underset{\sim}{LM}'$, $\qquad$ (35)

5. $f_{\ell_m}(s,t) - f'_{\ell_m}(s,t) = o^\infty(s,t) \qquad ((\ell, m) \in \underset{\sim}{LM})$,

6. $\sum_{\ell,m}^{LM} f_{\ell_m}(s, t_{\ell_m}) - \sum_{\ell,m}^{LM'} f'_{\ell_m}(s, t_{\ell_m}) = 0.$

Здесь через $o^\infty(s)$ обозначены функции, быстро стремящиеся к нулю при $s \to 0$, а через $o^\infty(s,t)$ – функции типа $f_{\ell_m}(s,t)$, удовлетворяющие условиям В и С в определении 8 /1/ при $\nu_{\ell_m} = \infty$.

Условия 1–6 не являются независимыми, следовательно, при проверке эквивалентности двух разложений мы должны их учитывать в указанном порядке. Первые три условия затрагивают свойства разрывов, а остальные три условия относятся к свойствам компонент. Условия 1 и 2 затрагивают только разрывы, при которых $\nu^i_{\ell_m}$ конечны. Условие 3 выражает компенсацию разрывов для каждой функции $f(s,x)$ и $f'(s,x)$ в отдельности. Оно не устанавливает связи между характеристиками $f(s,x)$ и $f'(s,x)$. Его можно было бы не записывать, так как оно входит в определение функций $f(s,x)$, но дано для ясности. Ему можно удовлетворить надлежащим изменением одного только разрыва $\Delta f^i_{\ell_m}(s)$ и $\Delta f^{i'}_{\ell_m}(s)$ при каждом ℓ и i ($m \in M_{\ell_o}$, соответственно $m \in M'_{\ell_o}$). Условия 4 и 5 затрагивают те части функций, в которых $\nu_{\ell_m} = \infty$. Выписывая условие 5 при $m=0$, мы должны согласно (31) подразумевать, что оно справедливо только для сумм:

$$\sum_\ell^L f_{\ell_o}(s, t_{\ell_o}) - \sum_\ell^{L'} f'_{\ell_o}(s, t_{\ell_o}) = o^\infty(s, t_{\ell_o}),$$

где в правой части t_{ℓ_o} – любая из разностей $x - x_\ell$. Условию 5 можно удовлетворить надлежащими изменениями только одной из гладких частей $\bar{f}_{\ell_m}(s,t)$ или $\bar{f}'_{\ell_m}(s,t)$ одной из функций f или f'. После того, как это условие выполнено, условию 6 можно удовлетворить надлежащим изменением только одной из компонент одной из функций $f(s,x)$ или $f'(s,x)$ при любом выборе всех остальных компонент. Причем это изменение небольшое – его степень бесконечна.

Видим, что ряд характеристик эквивалентных разложений не определен. Например, после того, как $\underset{\sim}{LM}$ и $\underset{\sim}{LM}^i$ заданы, LM и LM^i ограничены только соотношениями $LM^i \subset LM$, $LM \supset \underset{\sim}{LM}$, $LM^i \supset \underset{\sim}{LM}^i$ и не связаны с соответствующими множествами для $f'(s,x)$. Разрывные функции, как и компоненты, тоже не определены однозначно, однако неопределенность затрагивает только остаточные члены, причем не полностью, а до аддитивных членов, степени которых бесконечны.

Тот же самый вопрос о классах эквивалентности мы можем ставить и по отношению к асимптотическим функциям $f(x)$. Ответ дается следующей

Теоремой 13. Необходимые и достаточные условия эквивалентности двух разложений асимптотических функций следующие:

1. $\underset{\sim}{LM}^i \equiv \underset{\sim}{LM}^{i'}$ при $i = 0, 1, 2, \ldots,$

2. $\nu^i_{\ell_m} = \nu^{i'}_{\ell_m}$, $\nu^{i*}_{\ell_m} = \nu^{i*'}_{\ell_m}$ при $i = 0, 1, 2, \ldots,$ $(\ell, m) \in \underset{\sim}{LM}^i$,

3. $\Delta f^i_{\ell_{mn}} = \Delta f^{i'}_{\ell_{mn}}$ при $i = 0, 1, 2, \ldots, (\ell, m) \in \underset{\sim}{LM}^i$; $n = \nu^i_{\ell_m}, \nu^i_{\ell_m}+1, \ldots, \nu^{i*}_{\ell_m}$;

4. $\underset{\sim}{LM} \equiv \underset{\sim}{LM}'$, $\qquad$ (36)

5. $\nu_{\ell_m} = \nu'_{\ell_m}$, $\nu^*_{\ell_m} = \nu^{*'}_{\ell_m}$, $(\ell, m) \in \underset{\sim}{LM}$,

6. $f_{\ell_{mn}}(t) = f'_{\ell_{mn}}(t)$, $n = \nu_{\ell_m}, \nu_{\ell_m}+1, \ldots, \nu^*_{\ell_m}$, $(\ell, m) \in \underset{\sim}{LM}$.

$(f_{on}(x) = f'_{on}(x),\ n = \nu_o, \nu_o + 1, \ldots, \nu^*_o)$.

Таким образом, мы видим, что разрывы и компоненты бесконечной степени несущественны: мы можем их снимать или добавлять в любом количестве – асимптотическая функция $f(x)$ не изменяется, т.е. множество ее представителей $f(s,x)$ остается одним и те же. Только к тривиальной нулевой функции, которая не имеет никаких компонент, мы не можем добавлять разрывы и компоненты бесконечной степени – иначе она из тривиальной превратилась бы в абсолютную нулевую асимптотическую функцию.

В каждом классе эквивалентных разложений выделим одно стандартное – более простое в некотором смысле. Его характеристики будем отмечать знаком "–". Стандартное разложение зададим следующим

Определением 5.

а) Множества LM^{i-} $(i=0,1,\ldots)$ – минимальны. Если имеется несколько таких множеств, выберем то, у которого элементы m в M_ℓ^i – минимальны ($\ell = 0,1,2,\ldots, L$). (В случае, когда такая неопределенность возникает, то в соответствующих M_ℓ^{i-} имеется только один элемент, так что нет надобности указывать, какой из элементов в M_ℓ^{i-} должен быть минимальным).

б) Множество LM^- – минимально. (Конечно, $LM^- \supset LM^{i-}$ при $i=0,1,2,\ldots$). Если имеется несколько таких множеств, выберем то, у которого элементы m в $M_{\ell_0}^-$ минимальны ($\ell = 1,2,\ldots L$).

Условие б) накладывается после того, как условие а) выполнено. При $i=0,1,2,\ldots$ а) и б) независимы друг от друга, так что их можно накладывать в любом порядке.

Покажем, что эти условия совместимы и что однозначно задают структурные индексы и компоненты стандартного разложения. При этом в явном виде дадим процедуру построения стандартных разложений и покажем, как каждому заданному разложению мы можем сопоставить соответствующее ему стандартное разложение.

Каждому разложению, т.е. каждому набору величин $a-g$ для заданной функции $f(s,x)$, сопоставим диаграмму по следующему правилу. По абсциссе откладываем переменную x и обозначаем особые точки x_ℓ, не соблюдая строго соотношение расстояний между ними. По ординате откладываем внутреннюю степень m: над каждой точкой x_ℓ ставим те точки, ординатам m которых соответствуют ненулевые компоненты – сингулярные и регулярная. Если регулярная компонента не нуль, точки ставим при всех x_ℓ. Их ординаты $m=0$. Это значит, что каждому элементу множества LM соответствует точка на диаграмме. При этом мы отмечаем точку кружком, если соответствующая степень $\nu_{\ell m}$ конечна, а при $m=0$ – также и в случае, если мажорирующие функции $\hat{f}_0^i(x)$ не все быстро стремятся к нулю при $x \to \pm\infty$, т.е. если пара (ℓ, m) входит в $\underset{\sim}{LM}$. Дальше рассматриваем множества LM^i, последовательно при $i=0,1,2,\ldots$. Если пара (ℓ, m) входит в LM^i, мы пишем соответствующую цифру

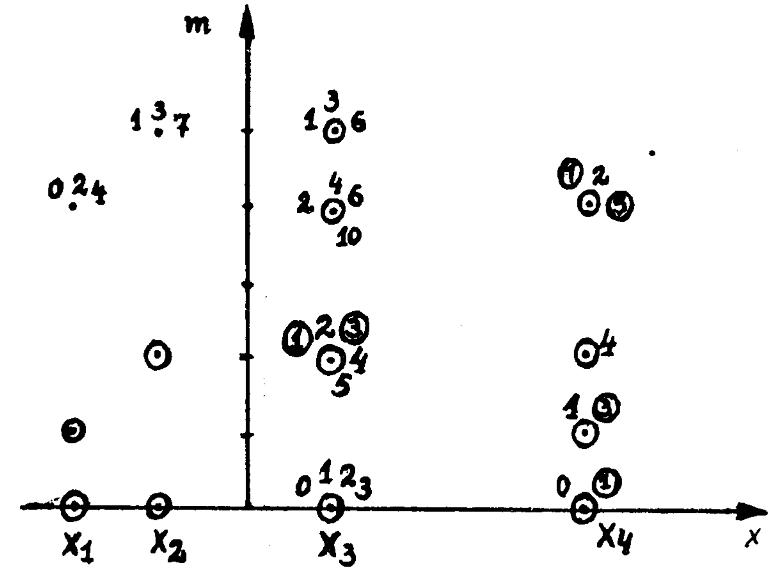

Рис. 2

рядом с точкой ℓ, m. При этом ставим ее в кружок, если степень $\nu_{\ell m}^i$ конечна, т.е. если ℓ, m входит в $\underset{\sim}{LM}^i$. Очевидно, если рядом с данной точкой имеются цифры в кружках, то и сама точка должна быть в кружке.

Эта диаграмма несет не всю информацию о разложении функции $f(s,x)$, а только часть ее, но, как мы увидим, именно ту часть, которая нам будет нужна. Точки и цифры в кружках назовем закрепленными, а без кружков – плавающими. Это связано с тем, что согласно теоремам 6 и 7 цифры без кружков можем переносить вверх и вниз, а точки без кружков, если вокруг них нет цифр, – повсюду. Точки и цифры в кружках мы не можем переносить, не меняя при этом значений функции $f(s,x)$, – в этом смысле они закреплены.

Дальше в связи с понятием стандартного разложения ставим три следующих связанных между собой, но все же различных вопроса:

1. Как, исходя из данного разложения, т.е. из данного набора величин $a-g$, мы можем перейти к стандартному разложению.

Какие ограничения на величины $a-g$ мы должны наложить, чтобы разложение было стандартным, т.е. чтобы были $a^{-}-g^{-}$.

Как, исходя из стандартного разложения $a^{-}-g^{-}$ данной функции $f(s,x)$, мы можем перейти к любому другому $a-g$, ему эквивалентному.

Начнем с вопроса 1. Если рядом с некоторой точкой (ℓ, m) имеется плавающая цифра i, а в той же колонке имеются одна или несколько закрепленных цифр i, мы можем передвинуть плавающие цифры i к одной из закрепленных, например к самой нижней, и таким образом плавающие цифры исчезнут. Если закрепленных цифр i в этой колонке нет, мы можем собрать плавающие цифры i в одном месте, а так как все разрывы должны быть скомпенсированы, плавающие цифры опять исчезнут. И, таким образом, цифр без кружков не будет. Поэтому точки без кружков не будут сопровождаться цифрами. Тогда согласно теоремам 6 и 7 мы можем переносить их повсюду. Если имеются закрепленные точки, перенесем плавающие точки к одной из закрепленных. Это и будет стандартное разложение. Если закрепленных точек нет, мы перенесем их в точки $(\ell, 0)$, т.е. останется одна регулярная часть $f_0^*(s,x)$ бесконечной точности, удовлетворяющая условию быстрого исчезновения при $x \to \pm\infty$. Если эта функция $f^*(s,x)$ не нуль, получим стандартное разложение в этом случае. Наконец, если функция $f_0^*(s,x)$ окажется нулем – это значит, что стандартная функция $f(s,x)$ не имеет ни регулярной, ни сингулярных частей, – она нуль.

Из этой процедуры сразу вытекает ответ на вопрос II. Мы имеем три типа стандартных функций $f(s,x)$:

$$
\begin{aligned}
&A: \quad \underset{\sim}{LM} \equiv LM \neq \Phi, \\
&B: \quad \underset{\sim}{LM} = \Phi, \ LM = (\ell, 0), \\
&C: \quad LM = \Phi.
\end{aligned}
\tag{37}
$$

В случае A имеется по крайней мере одна неисчезающая компонента, $f_{\ell m}(s,t)$ или $f_0(s,x)$, причем их степени конечны, а степень $f_0(s,x)$ может быть и бесконечной, но мажорирующие функции $\hat{f}_0^{\,i}(x)$ $(i = 0,1,2\ldots)$ не все быстро стремятся к нулю при $x \to \pm\infty$. Иными словами, нет разрывов или сингулярных частей бесконечной степени и нет регулярной части бесконечной степени, мажорируемой при помощи функций $\hat{f}_0^{\,i}(x)$, которые быстро стремятся к нулю. В случае B нет сингулярных частей, а регулярная часть не исчезает тождественно. Она не имеет разрывов, имеет бесконечную степень и мажорируется при помощи функций $\hat{f}_0^{\,i}(x)$, которые быстро стремятся к нулю при $x \to \pm\infty$. В случае C стандартное разложение не имеет никаких отличных от нуля частей.

Ответ на вопрос III простой. Чтобы получить любые разложения данной функции $f(s,x)$, когда ее стандартное разложение задано, достаточно добавить некоторый модуль. При этом можем ограничиться модулями, для которых множества $\underline{LM}^{\,i}$ и $\overline{LM}$ не пересекаются с множествами $\underset{\sim}{LM}^{i}$ и $\underset{\sim}{LM}$ для стандартного разложения. ($\underline{LM}^{\,i}$ и $\overline{LM}$ относятся соответственно к функциям $\underline{f}_{\ell m}$ и $\overline{f}_{\ell m}$).

Определение 6. Стандартным разложением данной асимптотической функции назовем то, которому соответствуют стандартные разложения ее представителей.

Тогда те же самые вопросы I, II, III мы можем ставить и по отношению к классам эквивалентности и стандартным разложениям асимптотических функций. Ответы на вопросы аналогичны и даже более просты, чем в случае обычных разложений.

По вопросу I следует сказать, что для того, чтобы перейти к стандартному разложению $f(x)$, достаточно вычеркнуть все разрывы бесконечной степени и все сингулярные компоненты бесконечной степени, а также и регулярную компоненту бесконечной степени, если она удовлетворяет условию быстрого стремления к нулю. Только если $\underset{\sim}{LM} = \emptyset$, а $LM \neq \emptyset$, компонента $f_0^*(s,x)$ с $\nu_0 = \infty$, которая удовлетворяет условию быстрого стремления к нулю при $x \to \pm\infty$, должна остаться или должна появиться, если в исходном разложении $(\ell, 0) \notin LM$.

По вопросу II, очевидно, мы должны сказать, что будет три типа стандартных разложений асимптотических функций $f(x)$, характеризуемых теми же самыми условиями (37), что и стандартные разложения функциональных последовательностей $f(s,x)$.

Ответ на вопрос III вытекает из первых двух. В случае A мы можем добавлять любое множество компонент бесконечной степени, а также и любые множества разрывов производных каждого порядка, причем степени их всех бесконечны. В случае B можно заменить регулярную компоненту бесконечной степени, которая удовлетворяет условию быстрого исчезновения на бесконечности, любым множеством быстро стремящихся к нулю компонент бесконечной степени с компенсированными разрывами. В случае C мы можем ввести любое конечное множество функций $f^*_{\ell m}$, соответствующих заданным множествам LM^i и $LM \supseteq LM^i$, сумма которых нуль, этого можно достичь надлежащим выбором одной из них при произвольном выборе всех остальных.

Теорема 14. Каждая асимптотическая функция $f(x)$ имеет одно и только одно стандартное разложение.

Доказательство не будем приводить, а отметим только, что, строго говоря, для стандартных разложений функций $f(s,x)$ нет теоремы, аналогичной этой, - остаточные члены их компонент и их разрывов определены до аддитивных членов бесконечной точности.

В заключение укажем, как мы можем построить любую асимптотическую функцию и любой ее представитель. Так как вопрос о переходе от стандартных к нестандартным разложениям (и наоборот) выяснен, мы при этом можем ограничиться их стандартными разложениями.

1. Выбираем число L, особые точки x_ℓ и множества M_ℓ $(\ell = 1,2,\ldots,L)$ и составляем множество LM из пар (ℓ, m).

2. Выбираем множества $LM^i \subseteq LM$ $(i = 0,1,2,\ldots)$.

3. Выбираем $\nu_{\ell m}$ и $\nu^*_{\ell m}$ $(\ell, m \in LM)$, а также $\nu^i_{\ell m}$ и $\nu^{i*}_{\ell m}$ $(\ell, m \in LM)$, причем все они конечны и только $\nu^*_{\ell m}$ и $\nu^{i*}_{\ell m}$ могут принимать еще значение $+\infty$.

4. Выбираем разрывы
$\Delta f^i_{\ell mn}(n = \nu^i_{\ell m}, \nu^i_{\ell m} + 1, \ldots, \nu^{i*}_{\ell m};\ i = 0,1,2,\ldots;\ (\ell, m) \in LM^i)$.

5. Строим разрывные части коэффициентных функций $f_{\ell mn}(t)$ всех компонент искомой функции.

6. Выбираем гладкие части коэффициентных функций $\bar{f}_{\ell mn}(t)$ $(n = \nu_{\ell m}, \nu_{\ell m} + 1, \ldots, \nu^*_{\ell m})$.

7. Строим все компоненты $f_{\ell m}(s,t)$.

Этим асимптотическая функция $f(x)$ определена. Конечно, все эти величины (и множества) не произвольны. В частности, $\nu^i_{\ell m}$, $\nu^{i*}_{\ell m}$ и $\Delta f^i_{\ell mn}$ должны быть такими, чтобы компенсация имела место, а $\bar{f}_{\ell mn}(t)$ - такими, чтобы условия мажорации были выполнены при некотором значении s_0.

Если мы хотим получить некоторый представитель выбранной функции, мы должны еще

8. Выбрать остаточные члены разрывов $\Delta f^i_{\ell m}{}^*(s)$.

9. Выбрать остаточные члены гладких частей компонент $\bar{f}^*_{\ell m}(s,t)$.

Конечно, они тоже не произвольны. В частности, $\bar{f}^*_{\ell m}(s,t)$ должны удовлетворять условию мажорации.

В следующей работе мы покажем замкнутость множества асимптотических функций по алгебраическим и основным аналитическим действиям, сформулируем их основные свойства и сравним их с другими известными обобщениями понятия "функция".

ЛИТЕРАТУРА

1. Христов Хр.Я., Дамянов Б.П. ОИЯИ, Р2-11102, Дубна, 1977.
2. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва, ИЛ, 1968.
3. Christov Chr., Todorov T. Asymptotic Numbers – Algebraic Operations with them. Serdica, Bulgaricae Mathematicae Publicationes, 1976, vol.2, 87–102.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 ноября 1977 года.