ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 11102

Хр.Я.Христов, Б.П.Дамянов

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ - НОВЫЙ КЛАСС ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

I. Общая постановка задачи и определение

1977

P2 - 11102

Хр.Я.Христов, Б.П.Дамянов

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ - НОВЫЙ КЛАСС ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

I. Общая постановка задачи и определение

Направлено в "Bulgarian Journal of Physics"

Христов Хр.Я., Дамянов Б.П. P2 - 11102

Асимптотические функции - новый класс обобщенных функций. I. Общая постановка задачи и определение

Для предложенных ранее /6/ асимптотических функций, включающих обычные дифференцируемые функции и обобщенные функции Соболева-Шварца с точечным носителем, для которых допустимо умножение, здесь исследуется более общий вариант. Он характеризуется тем, что круг допустимых алгебраических и аналитических операций над асимптотическими функциями значительно расширен: включает также деление, извлечение корня, практически произвольную замену независимой переменной и т.д. В первой части работы даны общая постановка задачи и общее определение асимптотических функций как класса соответствующим образом выбранных функциональных последовательностей.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Christov Chr.Ya., Damianov B.P. P2 - 11102

Asymptotic Functions - a New Class of Generalized Functions. I. General Assumptions and Definitions

In a previous paper /6/ we have introduced asymptotic functions which include as particular cases the ordinary differentiable functions and the generalized functions of Soboljev-Schwartz with a point carrier and which can be multiplied with each other. A more general and elaborate version of functions is proposed here. It permits a considerably larger circle of algebraic and analytic operations, such as: division, extraction of roots, almost arbitrary substitutions of the independent variable, etc. In this first part a general formulation of the problem is given, and classes of sequences of functions, representing each particular asymptotic functions, are defined.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

В недавней работе одного из нас /6/ был предложен новый класс обобщенных функций - они были названы асимптотическими. Цель, которая при этом преследовалась, заключалась в том, чтобы, сохраняя по мере возможности ценные свойства обычных функций и обобщенных функций Соболева-Шварца /1-3/, обеспечить возможность их умножения. Эти функции могут быть полезны в ряде случаев, но мы имели в виду прежде всего общее описание волновых пакетов в квантовой механике (в импульсном представлении) /4/. Предлагая общую формулировку задачи с физической точки зрения, мы можем сказать, что если обобщенные функции Соболева-Шварца служили для математического уточнения понятия материальной точки как границы частиц с заданной массой и уменьшающимися размерами, то асимптотические функции должны уточнить понятие плоской волны как границы волновых пакетов, которые, однако, согласно выражениям, в которые они входят, мы должны иметь право умножать между собой. На самом деле мы расширили круг допустимых алгебраических и аналитических действий над ними, и поэтому теория усложнилась.

Как это обычно делается, мы ввели асимптотические функции как классы последовательностей обычных функций - представителей асимптотической функции. В работе /8/ мы привели коротко - без доказательств - более общий вариант асимптотических функций, который характеризуется тем, что круг допустимых действий над ними был значительно расширен: их множество оказалось замкнутым не только по отношению к умножению, но и к некоторым другим действиям, не имеющим места в множестве обобщенных функций Соболева-Шварца. Здесь мы приведем со всеми необходимыми доказательствами определение и основные свойства асимптотических функций. В настоящей, первой, части будут даны общая постановка задачи и общее определение этих функций.

1. ПОНЯТИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ЧИСЛА

В качестве простой модели тех структур, которые будем создавать, и для того, чтобы избежать постоянного обращения к другим работам /6, 7/ , напомним коротко определение асимптотических чисел (полиномиального типа). Каждое из них задается классом своих представителей – последовательностей $a(s)$ $(0 < s \leqq s_1)$, где s_1 – некоторое фиксированное положительное число. Подразумеваем, что s стремится к нулю и поэтому мы смотрим на $a(s)$ не только как на функцию, а как на последовательность, элементы которой обозначены значениями непрерывной переменной $s\ (0 < s \leqq s_1)$, а не натуральными числами $n = 1, 2, 3 \ldots$, как это обычно делается. Второе соображение, побуждающее нас рассматривать $a(s)$ как последовательности, – это то, что интерес представляет только поведение $a(s)$ при $s \to 0$.

Определение 1. Последовательности $a(s)$ имеют вид

$$a(s) = \sum_{n=\nu}^{\nu^*} a_n \cdot s^n + a^*(s), \tag{1}$$

или, что то же самое,

$$a(s) = \sum_{n}^{N} a_n \cdot s^n + a^*(s). \tag{2}$$

Здесь ν и $\nu^*\ (\nu \leqq \nu^*)$, степень и точность $a(s)$, – целые числа, которые вдобавок могут принимать еще значение $+\infty$ (больше всех целых чисел), а N, спектр $a(s)$, – ограниченное снизу множество целых чисел

ν^*

$n(\nu \leqq n \leqq \nu')$. Чтобы охватить случай, когда сумма отсутствует (не нарушая формулировки правила нахождения ν и ν^* при различных операциях над асимптотическими числами), предположим, что ν может принимать еще нецелое значение $\nu^* + \epsilon$, где ϵ – "малое" положительное число. Поэтому $\nu \leqq \nu^*$ следует заменить на $\nu \leqq \nu^* + \epsilon \ldots$ Так как n в (1) и (2) принимает только целые значения (но не значение $n = \infty$), мы можем считать, что если $\nu^* = \infty$, то $\nu^* + \epsilon = \nu^*$, т.е. нет надобности вводить значение $\nu = \infty + \epsilon$. Компоненты a_n – вещественные числа, а остаточный член $a^*(s)$ – вещественная функция s , определенная при всех $s\ (0 < s < s_1)$ и удовлетворяющая единственному условию:

$$a^*(s) : s^{\nu^*} \to 0\,. \tag{3}$$

(Подразумеваем: при $s \to 0$). В случае $\nu^* = \infty$ условие (3) следует заменить на

$$a^*(s) : s^n \to 0 \tag{4}$$

при любом целом $n \leqq \nu^*$. Это будем иметь в виду, когда будем записывать условия типа (3).

Определение 2. Множество всех последовательностей $a(s)$ (1), получаемых при некотором выборе структурных индексов ν и ν^*, компонент a_n и остаточного члена $a^*(s)$, обозначим через $A(s)$. Каждому выбору ν , ν^* , a_n и $a^*(s)$ соответствует точно одна последовательность $a(s)$ из $A(s)$ но, строго говоря, обратное утверждение не имеет места: (1) можно разложить в том же виде при любых $\nu' < \nu$ и $\nu^{*\prime} \leqq \nu^*$ $(\nu' \leqq \nu^{*\prime} + \epsilon)$. Достаточно выбрать $a_n = 0$ при $\nu' \leqq n < \nu$ и $a'^*(s) = \sum_{\nu^{*\prime}+1}^{\nu'} a_n s^n + a^*(s)$.

Взаимную однозначность можем обеспечить, если предположим, что ν и ν^* максимальны для заданной последовательности $a(s)$. Назовем их собственными значениями ν и ν^*.

Если ν конечно, а $\nu^* = \infty$, сумма в (1) превращается в бесконечный степенной ряд. Никакие ограничения на коэффициенты a_n не ставятся – ряд асимптотический. При $\nu \geqq 0$ его сумма задается как функция с заданными производными при $s=0$. Чтобы охватить случай, когда $\nu < 0$, мы можем отнести это утверждение к деленной на s^{ν} сумме. Если через $o^{\kappa}(s)$ обозначим функцию, удовлетворяющую условию $o^{\kappa}(s):s^{\kappa} \to 0$ (см. (4)), то указанным условием ряд задается с точностью до функции типа $o^{\infty}(s)$, быстро (т.е. быстрее любой степени s) стремящейся к нулю. Например, мы можем записать

$$a(s) = \sum_{n=\nu}^{\infty}{}' \; a_n s^n [1 - \exp(-1/|a_n| r^n s^{\alpha})], \tag{5}$$

$0 < \alpha < 1$, $r > s_1$ /5,7/ при некотором выборе α и r.

Определение 3. Каждое асимптотическое число a задается классом последовательностей a(s) типа (1) с заданными структурными индексами ν, ν^* и компонентами a_n, а также с произвольными остаточными членами; т.е. a задается своими структурными индексами и своими компонентами. Последовательности a(s), соответствующие заданному асимптотическому числу a, назовем его представителями.

Поскольку представители a(s) данного числа a строятся по заданным значениям ν и ν^*, мы не будем считать их собственными (т.е. среди представителей a(s) числа a, кроме тех, для которых ν^* – собственное и которые назовем собственными представителями, могут быть и такие, остаточные члены которых сами представимы в виде (1)), подставляя там ν^* вместо ν и некоторое число больше ν^* вместо ν^*. Их назовем несобственными представителями a. Их включение в множество представителей необходимо, так как иначе оно оказалось бы неплотным, что приведет к усложнениям при определении действий.

Теорема 1. Каждое асимптотическое число a с $\nu \geqq 0$ задается одной струей с вершиной в $s=0$ /7/, т.е. множеством всех функций a(s), которые около точки $s=0$ развиваемы в ряд Тейлора до порядка ν^*. При этом предполагаем, что коэффициенты фиксированы, а остаточный член – произволен. Чтобы включить и числа с $\nu < 0$, достаточно рассматривать обобщенные струи, когда a(s) могут иметь полюсную особенность данного порядка при $s=0$, а ряд Тейлора заменить на ряд Лорана или, что всё равно, рассматривать a(s) как частное двух обычных струй: $a(s) = a'(s) : a''(s)$ при $\nu^* - \nu = \nu^{*\prime} - \nu' = \nu^{*\prime\prime} - \nu''$.

Определение 4. Числа a с представителями $a(s) = a^{+}(s) = o^{\nu}(s)$, т.е. числа, для которых $\nu = \nu^* + \epsilon$, назовем асимптотическими нулями o^{ν}. При $\nu = \infty$ получаем абсолютный нуль с представителями $o^{\infty}(s)$.

Теорема 2. Классы представителей различных асимптотических чисел или взаимно чужие, или класс одного из них, a, покрывает полностью класс другого, a′. В этом случае пишем $a \succ a'$ или $a' \prec a$. Необходимо и достаточно для этого, чтобы $\nu^* < \nu^{*\prime}$ и $a_n = a_n'$ при $n \leqq \nu^*$. Каждому числу a′ соответствуют числа $a \neq a'$, такие, что $a \succ a'$, и каждому числу a, за исключением абсолютного нуля, соответствуют числа a′, такие, что $a \prec a'$. Соотношение "$\prec$" является частичным упорядочением в множестве асимптотических чисел /7/.

Как обычно, мы вводим алгебраические действия, а также и более общие функции над асимптотическими числами с помощью тех же функций над представителями аргументов. Если при некотором выборе представителей аргументов для некоторого значения s функция оказывается неопределенной (например, при делении, если представитель знаменателя для некоторого s равен нулю), то мы экстраполируем ее произвольно.

Определение 5. Функция асимптотических чисел определена, если в том случае, когда представители аргументов пробегают соответствующие им классы, полученные последовательности покрывают точно класс представителей одного числа a – оно и задает результат. Примем, что эти последовательности могут покрывать только частично класс представителей числа a. Если имеется много чисел с таким свойством, результат задается тем из них, точность которого максимальна, т.е. тем, у которого множество представителей минимально. Если покрытие полно, результат назовем перфектным.

Мы предположили, что множество N в (2) ограничено снизу, потому что иначе действия умножения и деления не всегда были бы определены. Действие деления, естественно, определено всегда за исключением случая, когда знаменатель – некоторый нуль, o^{ν}. Сложение и вычитание определены всегда. Эти общие определения остаются и в случае, когда точности аргументов бесконечны. Тогда аргументы и результирующие последовательности – асимптотические ряды. Единственное усложнение в том, что остаточные члены не всегда получаются почленным сложением. Например, если

$$a(s) = \sum_{n=\nu}^{\infty} a_n s^n + a^*(s) \quad (\nu^* = \infty),$$

$$a'(s) = \sum_{n=\nu}^{\infty} a'_n s^n + a^{*\prime}(s) \quad (\nu^{*\prime} = \infty)$$

и

$$a''(s) = a(s) \pm a'(s) = \sum_{n=\nu}^{\infty} a''_n s^n + a^{*\prime\prime}(s),$$

то $a''_n = a_n \pm a'_n$ $(\nu^{*\prime\prime} = \infty)$, но вообще $a^{*\prime\prime}(s) \neq a^*(s) \pm a^{*\prime}(s)$. Для нас это не имеет значения, так как, тем не менее, если a^* и $a^{*\prime}(s)$ покрывают множество всех быстро стремящихся к нулю функций $o^{\infty}(s)$, то то же самое будет иметь место и для $a^{*\prime\prime}(s)$. Это относится и к остальным алгебраическим действиям, когда аргументы – асимптотические числа бесконечной точности.

Если мы хотим рассматривать асимптотические числа как обобщение обычных чисел a_c, то самые естественные изоморфные включения получаются, если мы представим их как

$$a_c(s) = a_c + o^{\infty}(s) \qquad \text{или} \qquad a_c(s) = a_c + o^{\circ}(s)), \qquad (6)$$

т.е. как числа с одноэлементным спектром $N=(0)$, компонентой $a_o = a_c$ и точностью $\nu^* = \infty$ (соответственно $\nu^* = 0$). Асимптотические числа с $\nu=0$ назовем конечными, с $\nu > 0$ – инфинитезимальными, а с $\nu < 0$ – бесконечными (полиномиального типа).

Переход к комплексным асимптотическим числам тривиален: a_n и $a^*(s)$ становятся комплексными. По-прежнему n остается вещественным.

Для наших целей будет полезно произвести одно несложное обобщение развитой здесь теории.

Определение 6. Будем считать асимптотическими также числа, представители которых получаются из представителей рассмотренных чисел формальной заменой s на $s^{1/N}$, где $N = 2,3,4...$. Это значит, что целые числа ν, ν^* и n в (1) и (3) заменяются на числа типа N'/N (N' – целое или $+\infty$, $N = 1,2,3...$). Все выводы остаются в силе за исключением того, что при $\nu \geqq 0$ коэффициенты a_n в (1) можно рассматривать как деленные на $n!$ производные $a(s)$ при $s=0$ (утверждение, которым мы нигде не пользовались).

Теорема 3. Замкнутость по отношению к элементарным алгебраическим действиям сохраняется.

На самом деле, если для аргументов рассматриваемого действия числа N' и N'' одинаковы, правильность утверждения очевидна, а если различны, то случай сразу сводится к рассмотренному, с заменой N' и N'' на N – наименьшее общее кратное чисел N' и N''. Это обобщенное множество асимптотических чисел все же не является изоморфным ранее введенному, потому что не существует числа N, которое являлось бы общим кратным сразу для всех чисел N^i, $i=1,2,3...$. Ради простоты в дальнейшем будем работать с целыми степенями, и только когда появится необходимость, например в случае извлечения корня, будем переходить к дробным.

2. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Не будем рассматривать самое общее понятие асимптотической функции $y=f(x)$ в случае, когда как x, так и y – асимптотические переменные, т.е. когда структурные индексы и компоненты y являются функциями структурных индексов и компонент x. Ограничимся некоторым их подмножеством.

Пусть аргумент x – обычная вещественная переменная, пробегающая все значения от $-\infty$ до $+\infty$. Каждую функцию $f(x)$ будем задавать классом своих представителей. Это функциональные последовательности или функции двух переменных определенного типа $f(s,x)$. Значения стремящегося к нулю параметра s $(0 < s \leq s_1)$, как и при асимптотических числах, указывают элементы каждой последовательности. Сами функции $f(s,x)$ – вещественны, но могли бы быть и комплексными: тогда мы бы имели комплексные асимптотические функции одной вещественной переменной x (параметр s всегда вещественен). Выбор множества $F(s,x)$ функции $f(s,x)$ и его разбиение на необязательно взаимно чужие классы, которые задают множество $F(x)$ асимптотических функций $f(x)$, зависит от целей, которые мы себе ставим, от множества функций, обычных и обобщенных, которые мы хотим включить, и от круга действий, алгебраических и аналитических, которые мы хотим совершать над ними. Действия, как обычно, будем сводить к тем же действиям над представителями аргументов, причём класс представителей функции, задающей результат, должен совпадать с множеством последовательностей, полученных путем применения рассматриваемого действия над различными представителями аргументов. В более общем случае мы можем потребовать, чтобы множество полученных функциональных последовательностей было подмножеством класса представителей функции, задающей результат, но при этом потребуем еще, чтобы сам класс представителей результата был минимальным классом с этим свойством, т.е. чтобы он был подмножеством классов представителей всех других функций с этим свойством. Если при некотором выборе представителей аргументов

для некоторых значений s и x действие не имеет смысла, то мы можем экстраполировать результат произвольно (в рамках общих ограничений для функции $f(s,x)$).

Мы предложим вариант, который имеет следующие, на наш взгляд, ценные качества:

a) $F(x)$ включает обычные бесконечно дифференцируемые функции, а также любые линейные комбинации функций Дирака и их производных. Это означает, что если $\bar{f}(x)$ – произвольная достаточно много раз дифференцируемая функция [6], то среди $F(x)$ имеются функции $f(x)$, для которых $f(x)$ – любой представитель

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(s,x)\,\bar{f}(x)\,dx = c(s)\,\bar{f}^{(k)}(x_0) + o^{\circ}(s), \qquad (7)$$

где $f(s,x)$, $c(s)$ и $o^{\circ}(s)$ – представители конечного асимптотического числа c и асимптотический нуль степени o, а $\bar{f}^{(k)}(x_0)$ – k-ая производная $\bar{f}(x)$ при $x=x_0$. Конечно, среди $F(x)$ должны находиться и произвольные линейные комбинации функций со свойством (7) при различных k и x_0. Имеется возможность рассмотреть и другие обобщенные функции, например разрывные $f(x)=\{(x-½)^{(k)}$ при $x>0$ и 0 при $x<0\}$.

b) Круг допустимых действий, по отношению к которым множество функций $F(x)$ замкнуто, широк: охватывает сложение и вычитание, умножение и деление функций на ненулевые асимптотические числа, дифференцирование и интегрирование, умножение функций между собой, а также и деление, если знаменатель в определенном смысле нигде не нуль, извлечение нечетных корней, а при комплексных функциях – и любых чётных корней. Возможна также замена независимой переменной x на другую: $y=y(k)$, определенную при всех x, возрастающую по абсолютному значению по крайней мере линейно при $x \to \pm\infty$ и бесконечно дифференцируемую, лишь бы все производные не аннулировались в некоторой точке. При некоторых не очень жестких ограничениях на рост $f(s,x)$ при $x \to \pm\infty$, не затрагивающих возможность задавать δ-функции и их производные, мы можем выделить некоторое подмножество функций $f(s,x)$ и тем самым функции $f(x)$, такие, чтобы они имели скалярное произведение, т.е. чтобы для любых $f(s,x)$ и $g(s,x)$ из множества представителей $f(x)$ и $g(x)$ интегралы

$$I(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s,x) fg(s,x) dx \qquad (8)$$

задавали множество представителей некоторого асимптотического числа. В том же смысле для них определены также величины

$$I_a^b(s) = \int_a^b f(s,x) g(s,x) dx, \qquad (9)$$

где a, b – заданные обычные или даже конечные асимптотические числа. Асимптотические функции этого подмножества имеют фурье-образы, однако они принадлежат не тому же самому, а некоторому другому, также вполне определенному множеству асимптотических функций – асимптотическим функциям второго рода.

c) Множество представителей всех асимптотических функций частично перекрывается аналогичным множеством для функций Соболева-Шварца /2,6/. Если среди функциональных последовательностей, представляющих одну функцию Соболева-Шварца $\phi(x)$, и последовательностей, представляющих одну асимптотическую функцию $f(x)$, имеются общие элементы, то $f(x)$ назовем асимптотическим аналогом функции Соболева-Шварца $\phi(x)$ и наоборот. (В этом смысле мы говорили, что в пункте а) асимптотические функции включают функции Дирака и их производные). С другой стороны, в $F(s,x)$ имеются последовательности $f(s,x)$, которые не являются представителями ни одной функции Соболева-Шварца. В общем, множества последовательностей, задающие функции Соболева-Шварца и асимптотические функции, как мы увидим, частично перекрываются. Оказывается, что одной функции Дирака или некоторой ее производной соответствует много асимптотических функций (со свойством (8)), и в таком смысле разбиение $F(s,x)$ на классы оказывается более детальным. Это можно оценить как недостаток асимптотических функций по сравнению с функциями Соболева-Шварца, но нам кажется, что отсутствие такого детального разбиения является той причиной, по которой функции Соболева-Шварца нельзя умножать и по которой выражения типа $\delta(x^2)$ не имеют смысла и т.д. Все же классы представителей каждой асимптотической функции довольно обширны и естественно выделены, и поэтому мы считаем, что эти новые функции могут быть полезны.

d) Асимптотические функции имеют следующее ценное свойство. Они введены как функции одной обычной (неасимптотической) переменной, но они вполне определены и для всех конечных (с $\nu = 0$) и инфинитезимальных (с $\nu > 0$) значений

$$x = \sum_{n=\nu}^{\nu^*} x_n s^n + x^*(s) \quad (\nu \geq 0). \qquad (10)$$

Соответствующие значения $f(x)$ оказываются тоже асимптотическими числами. Более того, этих значений и даже некоторой довольно ограниченной их части достаточно, чтобы определить функцию $f(x)$: исходя из них можно однозначно восстановить класс представителей $f(x)$.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КЛАССА ПРЕДСТАВИТЕЛЕЙ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Зададим конкретно множество $F(s,x)$ представителей $f(s,x)$, которые дают множество $F(x)$ асимптотических функций $f(x)$.

Определение 7. Функции $f(s,x)$ задаются в виде

$$f(s,x) = f_o(s,x) + \sum_{\ell=1}^{L} \sum_{m}^{M_\ell} f_{\ell m}(s, t_{\ell m}), \qquad (11)$$

$$t_{\ell m} = (x - x_\ell) \cdot s^{-m}. \qquad (12)$$

Различающиеся между собой фиксированные значения x_ℓ переменной x назовем особыми точками $f(s,x)$, а также и $f(x)$. Их множество конечно: $\ell = 1,2,\ldots,L<\infty$. Натуральные числа m, соответствующие каждой особой точке x_ℓ, назовем внутренними степенями. При каждом ℓ они пробегают некоторое конечное множество значений M_ℓ – спектр внутренних степеней. Функцию $f_o(s,x)$ назовем регулярной частью, или регулярной компонентой, а $f_{\ell m}(s,t)$ – сингулярными частями, или сингулярными компонентами функции $f(s,x)$.

Так, задание класса функций $f(s,x)$ сводится к определению классов функций, среди которых мы можем выбирать $f_{\ell m}(s,t)$ и $f_o(s,x)$. Они задаются следующим

Определением 8

А. Все функции $f_{\ell m}$ и f_o имеют степенные разложения по s, т.е. они представимы в виде

$$f_{\ell m}(s,t) = \sum_{n=\nu_{\ell m}}^{\nu^*_{\ell m}} f_{\ell mn}(t)\cdot s^n + f^*_{\ell m}(s,t), \tag{13}$$

$$f_o(s,x) = \sum_{n=\nu_o}^{\nu^*_o} f_{on}(x) s^n + f^*_o(s,x). \tag{14}$$

Здесь $\nu_{\ell m}$, ν_o, $\nu^*_{\ell m}$ и ν^*_o – заданные целые числа или $+\infty$ – степени и точности $f_{\ell m}$ и f_o. При этом $\nu_{\ell m} \leqq \nu^*_{\ell m} + \epsilon$ и $\nu_o \leqq \nu^*_o + \epsilon$, а

$$f^*_{\ell m}(s,t) : s^{\nu^*_{\ell m}} \to 0, \quad f^*_o(s,x) : s^{\nu^*_o} \to 0 \tag{15}$$

(см. замечание к (4)). Множители $f_{\ell mn}(t)$ и $f_{on}(x)$ назовем коэффициентными функциями, а $f^*_{\ell m}(s,t)$ и $f^*_o(s,x)$ – остаточными членами $f_{\ell m}(s,t)$ и $f_o(s,x)$, или, что все равно, $f(s,x)$. Тогда (11) можно записать в виде

$$f(s,x) = \sum_{n=\nu_{\ell m}}^{\nu^*_{\ell m}} f_{\ell mn}(t_{\ell m})\cdot s^n + f^*_{\ell m}(s,t_{\ell m}) + \sum_{n=\nu_o}^{\nu^*_o} f_{on}(x)\cdot s^n + f^*_o(s,x),$$

$$t_{\ell m} = (x - x_\ell)\, s^{-m}. \tag{17}$$

В более общем случае суммирование по n здесь, как и в (13) и (14), можно произвести по некоторым спектрам: $n \in N_{\ell m}$, соответственно $n \in N_o$ (см. (2)). Тогда вместо $\sum\limits_{n=\nu}^{\nu^*}$ следует записать $\sum\limits_{n}^{N}$. Если $\nu_{\ell m}$ или ν_o – конечны, а $\nu^*_{\ell m}$ и соответственно ν^*_o – бесконечны, суммы по n превращаются в бесконечные ряды. Мы будем считать их асимптотическими – не будем предполагать никакой сходимости, т.е. не будем накладывать ограничений на рост коэффициентов $f_{\ell mn}$ и f_{on}. Тем не менее согласно (5) мы можем сопоставить им суммы, причём разложения (13) и (14) остаются /5/.

В. Каждой функции $f(s,x)$ соответствует число $s_o > 0$, $\leqq s_1$, такое, что при каждом фиксированном $s<s_o$ и при $t \neq 0$ функции $f_{\ell m}(s,t)$ имеют производные по t – $f^{(i)}_{\ell m}(s,t)$, а при $t=0$ – левые и правые производные $f^{(i)}_{\ell m}(s,+0)$ и $f^{(i)}_{\ell m}(s,-0)$. Обозначим $f^i(s,t) = \frac{1}{i!} f^{(i)}(s,t)$ и пусть

$$\Delta f^i_{\ell m}(s) = f^i_{\ell m}(s,+0) - f^i_{\ell m}(s,-0) \;- \tag{18}$$

разделенные на $i!$ разрывы производных по t сингулярных частей. Обозначим через $\nu^i_{\ell m}$ и $\nu^{i*}_{\ell m}$ их степени и точности, так что

$$\Delta f^i_{\ell m}(s) = \sum_{n=\nu^i_{\ell m}}^{\nu^{i*}_{\ell m}} \Delta f^i_{\ell mn} \cdot s^n + \Delta f^{i*}_{\ell m}(s) \quad |m \in M^o_\ell|. \tag{19}$$

Очевидно,

$$\nu^i_{\ell m} \geqq \nu_{\ell m}, \quad \nu^{i*}_{\ell m} \geqq \nu^*_{\ell m}, \quad \nu^i_{\ell m} \leqq \nu^{i*}_{\ell m} + \epsilon. \tag{20}$$

Все эти величины имеют смысл и при $m = 0$. Тогда они относятся к $f_o(s,x)$, причём разрывы $\Delta f^{*i}_{\ell_o}$ появляются при $t_{\ell_o} = x - x_\ell = 0$, т.е. при $x = x_\ell$. Так, (18) и (19) имеют место при

$$m \in M_{\ell,o} = \begin{cases} (0, M_\ell), & \text{если} \quad f_o(s,x) \neq 0, \\ M_\ell, & \text{если} \quad f_o(s,x) \equiv 0. \end{cases}$$

Степени $\nu^i_{\ell m}$ и точности $\nu^{i*}_{\ell m}$, очевидно, определены не при всех $\ell = 1,2,\ldots L$ и $m \in M_{\ell_o}$, а только при тех, для которых $f^i_{\ell m}$ и f^i_o имеют разрывы.

C. Пусть

$$f^*_{\ell mn}(s,t) = \sum_{n'=n+1}^{\nu^*_{\ell m}} f_{\ell mn'}(t)\,s^{n'} + f^*_{\ell m}(s,t) \quad |\nu_{\ell m} - 1 \leqq n \leqq \nu^*_{\ell m}|, \tag{21}$$

$$f^*_{on}(s,x) = \sum_{n'=n+1}^{\nu^*_o} f_{on'}(x)\,s^{n'} + f^*_o(s,x) \quad |\nu_o - 1 \leqq n \leqq \nu^*_o| \text{ -- } \tag{22}$$

остаточные суммы рядов (13) и (14). (При $n = \nu^*_{\ell m}$ и $n = \nu^*_o$ получаем остаточные члены $f^*_{\ell m}(s,t)$ и $f^*_o(s,x)$). Предположим, что $f^{*i}_{\ell mn}(s,t)$ при любом $s \in (0, s_1]$, когда $t \to \pm\infty$, стремятся к нулю быстро – быстрее любой отрицательной степени $|t|$ – и что существуют положительные $s_{\ell mn,o}$, такие, что при $0 < s < s_{\ell mn,o}$ они допускают мажорации типа

$$|f^{i*}_{\ell mn}(s,t)| \leqq \hat{o}_{\ell mn}(s)\, \hat{f}^i_{\ell mn}(t) \qquad |\nu_{\ell m} - 1 \leqq n \leqq \nu^*_{\ell m}|. \tag{23}$$

При этом

$$\lim_{s \to o} \hat{o}_{\ell mn}(s) : s^n = 0, \tag{24}$$

а функции $\hat{f}^i_{\ell mn}(t)$ ограничены и при $t \to \pm\infty$ быстро стремятся к нулю. Подобную мажорацию допускают также остаточные суммы $f^*_{on}(s,x)$:

$$|f^{i*}_{on}(s,x)| \leqq \hat{o}_{on}(s)\, \hat{f}^i_{on}(x), \tag{25}$$

где

$$\hat{o}_{on}(s) : s^n \to 0. \tag{26}$$

Функции $\hat{f}^i_{on}(x)$ ограничены в каждом конечном интервале (на их рост при $x \to \pm\infty$ не накладываем никаких ограничений).

D. Разрывы $\Delta f^i_{\ell m}(s)$ $(m \in M_{\ell_o})$ взаимно компенсируются, так что функция $f(s,x)$ в целом непрерывна со всеми ее производными по x при всех x (и при $s < s_o$), включая и $x = x_\ell$.

Разрывы $\Delta f^i_{\ell m}(s)$ необходимы, чтобы совместить интегрируемость функции $f_{\ell m}(s,t)$ с ее быстрым стремлением к нулю при $t \to \pm\infty$. Отметим еще, что величины $s_{\ell mn}$, а также и $\hat{o}_{\ell mn}(s)$ не могут зависеть от i и от t. Они могут зависеть от n (при $n \to \infty$ $s_{\ell mn,o}$ могут стремиться к нулю, а $\hat{o}_{\ell mn}(s)$ могут возрастать). То, что при заданных ℓ, m, n, i и t, когда $s \to 0$, $|\Delta f^{*(i)}_{\ell mn}(t)|$ будут иметь порядок $\hat{o}^n(s)$, следует из (13) и (14). Смысл (23) и (25) в том, что мажорация равномерна – переменные разделяются: $\hat{o}_{\ell mn}(s)$ не зависят от i и t, а $\hat{f}_{\ell mn}(t)$ – от s. Примером функциональных последовательностей, имеющих мажорацию указанного типа, могут служить

$$f^i(s,t) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{s+s_o} + \dfrac{1}{s_o}\right) f^i\, e^{-i^{-4}t^2} & \text{при} \quad s \neq s_o, \\ 0 & \text{при} \quad s = s_o \end{cases}$$

(где $\nu = 1$, $\nu^* = \infty$ и f^i – числа, которые могут расти произвольно быстро при $i \to \infty$), а функций, не имеющих указанной мажорации,

$$f^i(s,t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{s-s_i} + \frac{1}{s_i}\right) f^i e^{-i^{-4} t^2} & \text{при } s \neq s_i, \\ 0 & \text{при } s = s_i, \end{cases} \qquad (27)$$

причём $s_i \to 0$, когда $i\to\infty$. Примером функций, которые не мажорируемы при $s>s_o$, может быть (27), если $\{s_i\}$ составляют множество, плотное в интервале от s_o до $s'_o \leqq s_1$. Условие компенсации D мы можем отменить. Получим более общий класс асимптотических функций, которые также могут существовать, но такое обобщение нам не нужно.

Определение 9. Производные $f^{(i)}_{\ell mn}(t)$, $f^{(i)}_{on}(x)$, $f^{*(i)}_{\ell m}(s,t)$, $f^{*(i)}_{o}(s,x)$, $f^{*(i)}_{\ell mn}(s,t)$, $f^{*(i)}_{\ell on}(s,x)$; $i=0,1,2,\ldots$ имеют разрывы первого рода при $t=0$ и соответственно при $x=x_\ell$. Для определенности примем, что их значения в точках разрыва задаются условием Дирихле: они равны среднему арифметическому левой и правой границ, например,

$$f^{*(i)}_{\ell on}(s,x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{2}[f^{*(i)}_{\ell on}(s,x_\ell-\epsilon) + f^{*(i)}_{\ell on}(s,x_\ell+\epsilon)].$$

Теорема 4. Функции $f_{\ell mn}(t)$ и $f_{on}(x)$ бесконечно дифференцируемы при $t\neq 0$, соответственно $x\neq x_\ell$, причём при $t=0$, соответственно $x=x_\ell$, имеют левые и правые производные любого порядка $f^{(i)}_{\ell mn}(\pm 0)$, соответственно $f^{(i)}_{on}(x_\ell \pm 0)$.

Из тех же соображений, что и в теореме 9, следует утверждение, что разрывы

$$\Delta f^{i}_{\ell mn} = \frac{1}{i!}\left(f^{(i)}_{\ell mn}(+0) - f^{(i)}_{\ell mn}(-0)\right) \quad |m\in M_{\ell o}|, \qquad (28)$$

$$\Delta f^{i}_{on} = \frac{1}{i!}\left(f^{(i)}_{on}(x_\ell+0) - f^{(i)}_{on}(x_\ell-0)\right) \qquad (29)$$

равны нулю при $n<\nu^{i}_{\ell m}$, соответственно при $n<\nu^{i}_{\ell o}$. Сингулярные компоненты $f_{\ell mn}(t)$ и их производные $f^{(i)}_{\ell mn}(t)$ быстро стремятся к нулю при $t\to\pm\infty$.

Это следует из соотношений

$$f^*_{\ell mn-1}(s,t) = f_{\ell mn}(t)\, s^n + f^*_{\ell mn}(s,t) \quad |n \leqq \nu^*_{\ell m}|, \qquad (30)$$

$$f^*_{on-1}(s,x) = f_{on}(x)\, s^n + f^*_{on}(s,x) \quad |n \leqq \nu^*_{o}|, \qquad (31)$$

которые следуют из (21) и (22) и из предполагаемых мажораций (23) и (25).

Теорема 5. Согласно С числа $s_{\ell mn,o}$, задающие интервалы, в которых предполагается мажорация, могут уменьшаться с возрастанием n и могут стремиться к нулю, если $\nu^*_{\ell m}$ или ν^*_o бесконечны. Покажем, однако, что если это так, то можно найти и s_o, которое от n не зависит.

На самом деле, из (30) и (31) видно, что f^* (s,t) и f^* (s,x) в интервалах $s_{\ell mn,o}<s<s_{\ell m\, n-1,o}$, соответственно $s_{on,o}<s<s_{on-1,o}$, являются линейными комбинациями конечных коэффициентов двух функций, которые мажорируемы в этом интервале. Следовательно, $s_{\ell mn,o}=s_{\ell m\, n-1,o}$, $s_{on,o}=s_{on-1,o}$.

Этим утверждение доказано. Зависимость от ℓ и m несущественна, так как комбинации этих индексов пробегают конечное множество значений. Следовательно, $s_{\ell mno}$ может зависеть от выбора функции $f(s,x)$, но не от индексов ℓ, m, n. Мы можем взять $s_{\ell mno}=s_o$.

Теорема 6. При конечных $\nu^*_{\ell m}$ и ν^*_o остаточные члены $f^*_{\ell m}(s,t)$ и $f^*_o(s,x)$ имеют свойства функций $f^*_{\ell mn}(s,x)$ и $f^*_{on}(s,x)$ при $n=\nu^*_{\ell m}$, соответственно $n=\nu^*_o$. При $\nu^*_{\ell m}=\infty$ или $\nu^*_o=\infty$ условие С не накладывает ограничений на $f^*_{\ell m}$, соответственно f^*_o. Это утверждение является следствием трех предыдущих теорем.

Теорема 7. Остаточные суммы разрывов

$$\Delta f^{i*}_{\ell mn}(s) = \sum_{n'=n+1}^{\nu^{i*}_{\ell m}} \Delta f^{i}_{\ell mn'}\, s^{n'} + \Delta f^{i*}_{\ell m}(s) \quad |m \in M^{\circ}_{\ell}|, \qquad (32)$$

которые можно ввести на базе (19), допускают мажорацию типа (23):

$$|\Delta f^{i*}_{\ell mn}(s)| \leqq \hat{o}_{\Delta \ell mn}(s) \hat{f}_{\Delta \ell mn} . \qquad (33)$$

Достаточно взять

$$\hat{o}_{\Delta \ell mn}(s) = \hat{o}_{\ell mn}(s), \quad \hat{f}^{i}_{\Delta \ell mn} = \hat{f}^{i}_{\ell mn}(-0) + \hat{f}^{i}_{\ell mn}(+0). \qquad (34)$$

В духе определения 6 мы обобщим функции $f(s,x)$ и $f(x)$ введением дробных степеней s с одним и тем же знаменателем N во всех представителях данной функции $f(x)$, т.е. формальной заменой s на $s^{1/N}$. Значит, все числа ν, N^*, n будем считать дробными, с одним и тем же знаменателем N (определение 10).

Эта замена элементарна, но нельзя считать, что это новое множество функций изоморфно исходному, так как знаменатели N для различных асимптотических функций неодинаковы. Ради простоты в дальнейшем, если не сказано другое, будем работать с целыми степенями s, и только когда будет необходимо – при извлечении корня и при замене независимой переменной x, – будем переходить к дробным показателям s. (Все нужные доказательства обобщаются автоматически по соображениям, приведенным в конце пункта 1 для асимптотических чисел).

Теорема 8. Каждая функция $f(s,x)$ из множества $F(s,x)$ имеет следующие характеристики:

a. Основные структурные параметры N, L, x_ℓ, M_ℓ $(\ell = 1,2,\dots L)$.

b. Основные структурные индексы $\nu_{\ell m}$, ν_o, $\nu^*_{\ell m}$, ν^*_o.

c. Дополнительные структурные индексы $\nu^{i}_{\ell m}$, $\nu^{*i}_{\ell m}$ $(m \in M_{\ell o})$.

d. Коэффициенты $f\Delta f^{i}_{\ell mn}$ разрывных функций (32) $(m \in M_{\ell o})$.

e. Коэффициентные функции $f_{\ell mn}(t)$ (13) и $f_{on}(x)$ (14) регулярной и сингулярных компонент (с соответствующими разрывами).

f. Остаточные члены $\Delta f^{i*}_{\ell m}(s)$ разрывных функций (18) $(m \in M_{\ell o})$.

g. Остаточные члены $f^*_o(s,x)$ и $f^*_{\ell m}(s,t)(m \in M_\ell)$ регулярной и сингулярных компонент (с соответствующими разрывами).

Это еще не означает, что различным выборам этих величин соответствуют различные функции $f(s,x)$ – существует небольшая неоднозначность в разложении (11), которую укажем позже.

Все эти величины не произвольны: кроме требований B и C определения 8, затрагивающих каждую из них в отдельности, должно выполняться еще условие D того же определения, налагающее некоторые связи между ними. Вопрос, какие из них в какой мере произвольны, будет рассмотрен позже.

4. ПОНЯТИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Определение 11. Каждая асимптотическая функция $f(x)$ задается через свои представители $f(s,x)$ – те, которые соответствуют фиксированным значениям параметров a, индексов b, c, коэффициентов и коэффициентных функций d, e и произвольному выбору остаточных членов f, g.

Множество $F(s,x)$ всех функциональных последовательностей $f(s,x)$ и множество $F(x)$ всех асимптотических функций $f(x)$ получается в том случае, когда меняем структурные индексы b, c, коэффициенты и коэффициентные функции d, e и остаточные члены f, g, сохраняя при этом структурные параметры a (определение 12).

Тем не менее иногда (например, при извлечении корней и замене независимой переменной) понадобится менять и структурные параметры a. Поэтому множества $F(s,x)$ и $F(x)$ (определения 12) назовем первичными, а те, которые получаются при замене еще и структурных параметров a, назовем расширенными (определение 13).

Так получается самое общее понятие асимптотической функции. Обычно будем работать с первичными множествами, даже с $N = 1$, и только тогда, когда понадобится, будем переходить к расширенным множествам.

Мы здесь в явном виде указали те классы функциональных последовательностей $f(s, x)$, которые представляют заданную асимптотическую функцию $f(x)$. Обычно когда вводятся обобщения понятия функции или других понятий методом абстракции, классы представителей задаются более тонкими критериями эквивалентности, слабой сходимости и т.д. Такой подход возможен и здесь, но мы дадим эти критерии позже.

Теорема 9. Когда s стремится к нулю, график общего члена $f_{\ell mn}((x-x_\ell)s^{-m})s^n$ остается подобным себе: становится более узким и в то же время более высоким или менее высоким – в зависимости от того, какие значения принимает n : $n<0$ или $n>0$. Если $n=0$, ординаты (при данном t) сохраняют свою величину. Но быстроты этих двух процессов, сужения и повышения или понижения, могут быть различны в зависимости от значений m и n. То же самое относится и к отдельным членам регулярной компоненты $f_{on}(x)\, s^n$, однако их графики не сужаются, а только ординаты могут расти или уменьшаться. Ввиду этого мы можем назвать введенные нами асимптотические функции аморфными. Точнее, ввиду того, что при заданном t главные части являются полиномами по s, они полиномиально-автоморфны.

Каждая асимптотическая функция $f(x)$ задается величинами a – e, так как параметр s_o, а также и остаточные члены ее регулярной и сингулярных компонент, как и остаточные члены соответствующих разрывов, произвольны (при заданных точностях ν_o^*, $\nu_{\ell m}^*$ ($m \in M_\ell$) и $\nu_{\ell m}^{i*}$ ($m \in M_{\ell o}$)).

Функцию, у которой все коэффициентные функции регулярной и сингулярных компонент, как и все коэффициенты соответствующих разрывов, равны нулю, назовем нулевой асимптотической функцией (определение 14).

Нулевую функцию, у которой точности ν_o^* и $\nu_{\ell m}^*$ остаточных членов регулярной и сингулярных компонент (а следовательно, и всех разрывов) бесконечны, назовем абсолютной нулевой асимптотической функцией (определение 15).

Теорема 10. Абсолютная нулевая асимптотическая функция задается полностью множествами пар ℓ, m, которым соответствуют ненулевые функции $f_{\ell m}^*(s,t)$ и $f_o^*(s,x)$, и теми, которым соответствуют ненулевые разрывы у них и у их производных $f_{\ell m}^{*(i)}(s,t)$ при $t = 0$ ($m \in M_{\ell o}$). (Это еще не означает, что различным выборам этих множеств соответствуют различные абсолютные нулевые функции).

Замкнутость множества $F(x)$ асимптотических функций $f(x)$ по отношению к указанным выше алгебраическим и аналитическим операциям покажем в другой работе, где также рассмотрим вопросы о существовании асимптотических функций (в какой мере условие D ограничивает величины a–e) и единственности (в какой мере разложение (11) для данной функции $f(s, x)$ определяет ее регулярную и ее сингулярные части). После этого будут рассмотрены общие свойства этих функций, а также их отношения к другим известным обобщениям понятия "функция".

ЛИТЕРАТУРА

1. Schwartz L. Théorie des distributions. Paris, vol. 1, 1950; vol. 2, 1951.
2. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними (вып. 1), Москва, 1959.
3. Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. Теория обобщенных функций (секвенциальный подход), Москва, ИЛ, 1976.
4. Гольдбергер М., Ватсон К. Теория столкновения, Москва, 1967.
5. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений, Москва, ИЛ, 1968.

6. Christov Chr. Eine neue Art vor verallgemeinert Funktionen - die asymptotischen Funktionen. Nova Acta Leopoldina, 1974, No. 212, B. 39, 181-197.
7. Christov Chr., Todorov T. Asymptotic Numbers - Algebraic Operations with them. Serdica, Bulgaricae Mathematicae Publicationes, vol. 2, 1976, p. 87-102.
8. Christov Chr.Ya., Damianov B.P., Todorov T.D. Asymptotic Functions and their Application to the Quantum Theory, Proceedings of International Conference for Advanced Mathematical Methods in Theoretical Physics, Calcutta, 1976.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 ноября 1977 года.