ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 11022

А.Б.Пестов, Н.С.Шавохина

ФОТОН В СФЕРИЧЕСКОМ МИРЕ

1977

P2 - 11022

А.Б.Пестов, Н.С.Шавохина

ФОТОН В СФЕРИЧЕСКОМ МИРЕ

Направлено в ТМФ

Пестов А.Б., Шавохина Н.С. P2 - 11022

Фотон в сферическом мире

Решены уравнения Максвелла для чистого поля излучения в сферическом мире. После однозначного выделения оси времени получен базис в пространстве решений в виде, независимом от выбора какой-либо специальной системы координат на трехмерной сфере - пространственном сечении сферического мира. Оказалось, что если радиус сферического мира равен комптоновской длине волны, то нижнее значение энергии фотона равно минимальной энергии рождения пары - в сферическом мире каждый фотон может превратиться в пару.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Pestov A.B., Shavokhina N.S. P2 - 11022

Photon in a Spherical World

The Maxwell equations for radiation field without charge have been solved in a spherical world. A basis in the space of solutions has been found in the form independent of a particular coordinate system on the three-dimensional sphere - space section of the spherical world - after the time axis has been given a distinct status. It turned out that if the spherical world radius is equal to the Compton wave length, then the lower value of the photon energy is equal to the minimum energy of the pair production - in a spherical world each photon can transform into a pair.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

Квантовая теория электромагнитного поля в римановом пространстве-времени изучалась в работах /1-4/. К римановым мирам относится и сферический мир де Ситтера, который интересен во многих отношениях /5 - 9/. Замечательно, что сферический мир удовлетворяет принципу соответствия. В пределе бесконечно большого радиуса сферический мир переходит в плоский. Это позволило сформулировать метод инвариантного ящика в квантовой теории поля /7, 10 - 12/.

И все же наибольший интерес сферический мир, по-видимому, представляет, когда его радиус мал. Действительно, поскольку радиус не может быть бесконечно малым, то для него существует нижняя, не равная нулю, граница - гипотетическая "элементарная длина". Кроме того, при этом должны наблюдаться новые явления, которые не имеют места в плоском мире.

В данной работе получены первые указания в пользу последнего утверждения. При рассмотрении фотонов в сферическом мире оказалось, что энергия каждого фотона строго больше нуля. Если радиус мира равен комптоновской длине волны, то нижнее значение энергии фотона равно минимальной энергии рождения пары. Таким образом, в сферическом мире каждый фотон может превратиться в пару.

Чтобы не загружать текст, чисто математические результаты вынесены в приложение. Тот факт, что матричные элементы $D^j_{\ell k}(V)$ группы SU(2) образуют базис неприводимого представления (j, j) группы O_4, позволяет получить полную систему поперечных векторных полей на трехмерной сфере, независимую от выбора какой-либо специальной системы координат на ней.

Сферический мир де Ситтера можно представить в виде однополостного гиперболоида

$$-(x^0)^2+(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2+(x^4)^2=r^2 \qquad (1)$$

в пятимерном плоском пространстве-времени с метрикой

$$ds^2=\eta_{ab}dx^a dx^b=-(dx^0)^2+(dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2+(dx^4)^2 .$$

В декартовых координатах объемлющего пятимерного пространства уравнения Максвелла в сферическом мире имеют вид /11/

$$m^a F_{ab} = 0, \qquad (2)$$

$$m^a \tilde{F}_{ab} = 0 ,$$

$$x^a F_{ab} = 0 , \qquad (3)$$

$$(4)$$

где

$$\tilde{F}_{ab} = \frac{1}{2r}\epsilon_{abijk} F^{jk}x^i \quad -$$

бивектор, дуальный к F_{ab},

$$m_a = r\frac{\partial}{\partial x^a} - \frac{1}{r}x_a x^b \frac{\partial}{\partial x^b} . \qquad (5)$$

Здесь и далее латинские индексы пробегают значения 0, 1,2,3,4. ϵ_{abijk} – полностью антисимметричный тензор, $\epsilon_{01234}=1$. Индексы поднимаются и опускаются с помощью тензора η_{ab} и ему обратного $\eta^{ab}=\eta_{ab}$. Например, $x_a=\eta_{ab}x^b$, $m^a=\eta^{ab}m_b$, $F^{jk}=\eta^{ja}\eta^{kb}F_{ab}$. Векторный потенциал A_a вводится следующим образом /11/:

$$F_{ab} = m_a A_b - m_b A_a - \frac{1}{r} x_a A_b + \frac{1}{r} x_b A_a \,, \tag{6}$$

$$x^a A_a = 0 \,. \tag{7}$$

При этом уравнения (3) и (4) удовлетворяются тождественно, а уравнение (2) дает

$$m^a m_a A_b - 2A_b - m_b m^a A_a + \frac{2}{r} x_b m^a A_a = 0 \,. \tag{8}$$

При выводе (8) были использованы тождества

$$m_a m_b - m_b m_a = \frac{1}{r} x_a m_b - \frac{1}{r} x_b m_a$$

и равенства

$$x^a m_b A_a + r A_b = 0 \,,$$

вытекающие из (7). Так как уравнения (8) имеют решения вида

$$A_a = \frac{1}{r} m_a \Phi ,$$

где Φ - произвольная скалярная функция, то однозначно определить A_a по начальным данным невозможно. Поэтому необходимо избавиться от таких решений. Накладывая на векторный потенциал дополнительные условия

$$m^\mu A_\mu = 0, \quad A_0 = 0 \quad (\mu = 1,2,3,4) \,, \tag{9}$$

получаем, что $\Phi = \mathrm{const}$, а $m_a \Phi = 0$. Действительно, подставляя в (9) $A_a = m_a \Phi$, получаем уравнения

$$m^\mu m_\mu \Phi = 0, \quad m_0 \Phi = 0 \,,$$

решениями которых будет $\Phi = \mathrm{const}$.

Уравнения (9) определяют кулоновскую калибровку в сферическом мире. При этих условиях уравнения (8) принимают вид $(m^a m_a - 2)A_\mu = 0$. Таким образом, чистое поле излучения описывается уравнениями

$$(m^a m_a - 2)A_\mu = 0, \tag{10}$$

$$m^\mu A_\mu = 0. \tag{11}$$

Греческие индексы принимают значения 1,2,3,4. Условие ортогональности (7) к радиусу-вектору x^a является следствием (10), (11) в силу тождества

$$m^a m_a (m^b A_b) = m^b (m^a m_a A_b) + 2m^a A_a - \frac{2}{r} x^b (m^a m_a A_b).$$

Прежде чем перейти к решению уравнений (10), (11), введем лабораторное время в сферическом мире. Это необходимо для однозначной физической интерпретации полученных ниже результатов. Векторное поле $B^a = \delta^a_0$ задает в пятимерном плоском мире физическое время, поскольку координаты x^0, x^1, x^2, x^3, x^4 в нем декартовы. Проектируя векторное поле B^a на гиперболоид (1), вводим физическое время в сферическом мире. Искомую проекцию найдем, раскладывая вектор B^a по направлению радиуса вектора x^a и по ортогональному ему направлению

$$B^a = (B^a - \frac{1}{r^2} x^a x_b B^b) + \frac{1}{r^2} x^a x_b B^b = B^a_\perp + B^a_r,$$

$$(B_\perp, B_\perp) + (B_r, B_r) = (B, B), (B, B) = B_a B^a.$$

Векторное поле

$$B^a_\perp = \delta^a_0 - \frac{1}{r^2} x_0 x^a$$

лежит на гиперболоиде и определяет координатные линии физического времени в сферическом мире. Чтобы найти явный вид линий времени, нужно решить систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^a}{cdt} = B^a_{\perp} \tag{12}$$

с начальными данными $x^0(t)|_{t=0} = 0$.
Интегрируя (12), получаем

$$x^0 = r\,\mathrm{tg}\frac{ct}{r}, \tag{13}$$

$$x^\mu = \frac{u^\mu}{\cos(ct/r)},$$

где u^μ - постоянные интегрирования. Требуя, чтобы семейство интегральных кривых (13) принадлежало сферическому миру, то есть удовлетворяло уравнению (1), получаем

$$u_\mu u^\mu = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 1. \tag{14}$$

Это уравнение задает трехмерную единичную сферу в четырехмерном эвклидовом пространстве, отнесенном к декартовым координатам u^μ. Подчеркнем, что все линии времени времениподобны. Действительно,

$$(B_\perp, B_\perp) = -1/\cos^2\frac{ct}{r}.$$

Так как t изменяется в пределах

$$-\frac{\pi r}{2c} < t < \frac{\pi r}{2c},$$

то длина временного интервала равна

$$\tau = \frac{\pi r}{c}. \tag{15}$$

Очевидно, что при $r \to \infty$ $x^0 = ct$.

Из (13), (14) следует, что t, u^μ определяют систему координат в сферическом мире. В координатах t, u^μ операторы m_a, $m_{ab} = x_a \frac{\partial}{\partial x^b} - x_b \frac{\partial}{\partial x^a}$, имеют вид

$$m_0 = \frac{r}{c} \frac{\partial}{\partial t},$$

$$m_\mu = -\frac{r}{c} \sin\frac{ct}{r} u_\mu \frac{\partial}{\partial t} + \cos\frac{ct}{r} \ell_\mu, \tag{16}$$

$$m_{\mu\nu} = u_\mu \frac{\partial}{\partial u_\nu} - u_\nu \frac{\partial}{\partial u_\mu},$$

где

$$\ell_\mu = \frac{\partial}{\partial u_\mu} - u_\mu u^\nu \frac{\partial}{\partial u^\nu}.$$

Отметим, что оператор m_0 задает сдвиг по времени в сферическом мире. Этого следовало ожидать, поскольку m_0 является проекцией $\partial/\partial x^0$. Из (16) следует

$$m^a m_a = \cos^2\frac{ct}{r}[\Delta - \frac{r^2}{c^2} \cos^2\frac{ct}{r} \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{\cos^2(ct/r)} \frac{\partial}{\partial t})],$$

где $\Delta = ½ m^{\mu\nu} m_{\mu\nu}$ — оператор Лапласа на трехмерной сфере. Уравнения (10), (11) примут вид

$$(\frac{r^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2} - \Delta + 1) A'_\mu = 0, \tag{17}$$

$$\ell^\mu A'_\mu = 0, \tag{18}$$

где $A'_\mu = \cos\frac{ct}{r} A_\mu$. В дальнейшем штрих у A'_μ будем опускать.

Уравнения (2)-(7) конформно-инвариантны. Действие генераторов K_a, $K_{ab} = -K_{ba}$ пятнадцатипараметрической группы конформных преобразований на векторных и бивекторных полях задается равенствами

$$(K_a A)_i = m_a A_i + \frac{1}{r} x_i A_a - \frac{1}{r} x_a A_i ,$$

$$(K_{ab} A)_i = m_{ab} A_i + \eta_{ai} A_b - \eta_{bi} A_a ,$$

$$(K_a F)_{ij} = m_a F_{ij} + \frac{1}{r} x_i F_{aj} + \frac{1}{r} x_j F_{ia} - \frac{2}{r} x_a F_{ij} , \tag{19}$$

$$(K_{ab} F)_{ij} = m_{ab} F_{ij} + \eta_{ai} F_{bj} + \eta_{aj} F_{ib} - \eta_{ib} F_{aj} - \eta_{jb} F_{ia} .$$

Операторы K_a, K_{ab} действуют в пространстве решений уравнений Максвелла. Группа же симметрии уравнений (10), (11) сужается до группы вращений трехмерной сферы – операторы $K_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 1,2,3,4$) действуют в пространстве решений этих уравнений. Одним из операторов Казимира группы O_4 является временная компонента псевдовектора

$$W_a = \frac{1}{8} \epsilon_{abcij} K^{bc} K^{ij} ,$$

с помощью которого строится оператор Казимира группы де Ситтера /6/. В пределе $r \to \infty$ оператор W_0 переходит в rot. После довольно громоздких вычислений получаем

$$(W_0 A)_0 = 0 ,$$

$$(W_0 A)_\mu = \tfrac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, m^{\nu\alpha} A^\beta , \tag{20}$$

где $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ – полностью антисимметричный тензор, $\epsilon_{1234} = 1$. Из (20) следуют важные тождества

$$m^{\mu}(W_0 A)_{\mu} = 0, \quad x^{\mu}(W_0 A)_{\mu} = 0.$$

Кроме того, для векторов A_{μ}, удовлетворяющих (18), имеет место равенство

$$(W_0^2 A)_{\mu} = (-\Lambda + 1)A_{\mu}. \qquad (21)$$

Оператор W_0 самосопряжен относительно скалярного произведения

$$\langle A, B\rangle = \int (A_1^* B_1 + A_2^* B_2 + A_3^* B_3 + A_4^* B_4) d\Omega,$$

где $d\Omega$ – элемент объема трехмерной сферы, и, следовательно, обладает полным набором собственных векторов. Согласно (21) для решения уравнений (17), (18) достаточно найти собственные значения и собственные векторы оператора W_0. Собственные значения W_0 находятся следующим образом: вычисляя второй оператор Казимира C_2 группы 0_4, получаем

$$C_1 = W_0, \quad 2C_2 = W_0^2,$$

откуда следует, что собственные значения n оператора W_0 равны

$$n = \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots .$$

Собственный вектор W_0 обозначим $(A_{\epsilon}^{p})_{\mu}$. Для него имеем

$$(W_0 A_{\epsilon}^{p})_{\mu} = \epsilon p (A_{\epsilon}^{p})_{\mu}, \qquad (22)$$

$$(-\Lambda + 1)(A_{\epsilon}^{p})_{\mu} = p^2 (A_{\epsilon}^{p})_{\mu}, \qquad (23)$$

где $\epsilon = \pm 1$, $p = 2, 3, 4\ldots$ Явный вид векторов A_{ϵ}^{p} найден в приложении. Здесь для простоты опущены индексы, связанные с вырождением уровней p.

Общее решение уравнений (17), (18) представим в виде ряда

$$A_\mu = \sum_{p,\epsilon} q_\epsilon^p(t)(A_\epsilon^p)_\mu ,$$

где $q_\epsilon^p(t)$ удовлетворяют уравнению гармонического осциллятора

$$\ddot{q}_\epsilon^p(t) + \omega_p^2 q_\epsilon^p(t) = 0 \qquad (24)$$

с частотой ω_p, равной

$$\omega_p = \frac{c}{r} p \qquad (p = 2,3,4 \ldots) .$$

Уравнение (24) имеет два независимых решения, $e^{i\omega_p t}$ и $e^{-i\omega_p t}$. Найденные решения уравнения (18) вида $e^{-i\omega_p t}(A_\epsilon^p)_\mu$ обозначим $(U_\epsilon^p)_\mu$. В этих обозначениях общее решение уравнений (17), (18) представляется рядом

$$A_\mu = \sum_{p,\epsilon} [q_\epsilon^p (U_\epsilon^p)_\mu + \overset{+}{q}{}_\epsilon^p(\overset{+}{U}{}_\epsilon^p)_\mu]. \qquad (25)$$

Здесь q_ϵ^p уже не зависят от t, а + означает комплексное сопряжение. Из (25) видно, что решение $(U_\epsilon^p)_\mu$ описывает монохроматическую волну с амплитудой q_ϵ^p.

В квантовой теории электромагнитного поля q_ϵ^p, $\overset{+}{q}{}_\epsilon^p$ являются эрмитовски сопряженными операторами q_ϵ^p, $\overset{+}{q}{}_\epsilon^p$ и удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$q_\epsilon^p \overset{+}{q}{}_{\epsilon'}^{p'} - \overset{+}{q}{}_{\epsilon'}^{p'} q_\epsilon^p = \delta_{pp'}\delta_{\epsilon\epsilon'} ,$$

$$q_\epsilon^p q_{\epsilon'}^{p'} - q_{\epsilon'}^{p'} q_\epsilon^p = 0 . \qquad (26)$$

$$\overset{+}{q}{}_\epsilon^p \overset{+}{q}{}_{\epsilon'}^{p'} - \overset{+}{q}{}_{\epsilon'}^{p'} \overset{+}{q}{}_\epsilon^p = 0 .$$

Эти перестановочные соотношения получаются из общих правил квантования электромагнитного поля в римановых мирах /1-2/.

Оператор $m_0 = \frac{r}{c}\frac{\partial}{\partial t}$ задает сдвиг по времени в сферическом мире, поэтому сохраняющаяся величина

$$\hat{H} = -\frac{\hbar}{2}(A, K_0 A) = \frac{\hbar}{2}(K_0 A, A) \tag{27}$$

является оператором энергии в квантовой теории электромагнитного поля /1,2/. Здесь $K_0 A$ определяется согласно (19). Круглые скобки в (25) означают скалярное произведение в пространстве решений уравнений Максвелла /1,2/

$$(A, B) = \int_{\Sigma} (B^i A_{ij} - A^i B_{ij})\, d\sigma^j ,$$

где Σ - пространственноподобная гиперповерхность,

$$A_{ij} = m_i A_j - m_j A_i - \frac{1}{r} x_i A_j + \frac{1}{r} x_j A_i ,$$

$$B_{ij} = m_i B_j - m_j B_i - \frac{1}{r} x_i B_j + \frac{1}{r} x_j B_i -$$

пара решений уравнений Максвелла (2)-(7).
Используя (25), (26), (27), для оператора энергии получаем

$$\hat{H} = \tfrac{1}{2} \sum_{p,\epsilon} \hbar\omega_p (q^p_\epsilon \overset{+}{q}{}^p_\epsilon + \overset{+}{q}{}^p_\epsilon q^p_\epsilon) .$$

Отсюда сразу же следует, что $\overset{+}{q}{}^p_\epsilon$, q^p_ϵ -операторы рождения и уничтожения фотонов с энергией

$$\mathcal{E}_p = \hbar\omega_p = \frac{\hbar c}{r} p \qquad (p = 2,3,4,\ldots) .$$

Минимальное значение энергии фотона в сферическом мире равно

$$\mathcal{E}_{min} = \frac{2\hbar c}{r} \tag{28}$$

и при $r < \infty$, очевидно, не равно нулю.

Если положить радиус сферического мира r равным $\frac{\hbar}{m_0 c}$ –комптоновской длине волны электрона, то

$$\mathcal{E}_{min} = 2m_0 c^2.$$

$2m_0c^2$ – минимальная энергия рождения пары. Таким образом, в сферическом мире с радиусом, равным $\hbar/m_0c$, каждый фотон может превращаться в пару частица-античастица. Этого не наблюдается в плоском мире Пуанкаре-Минковского, где $\mathcal{E}_{min}=0$. Для гармонического осциллятора при $r=\hbar/m_0c$ минимальная энергия приобретает наглядный физический смысл, поскольку

$$E_0 = m_0 c^2 .$$

Наконец, приведем значение минимальной энергии фотона при r, равном слабой длине ($r = 10^{-17}$см) /13/:

$$\mathcal{E}_{min} = 6{,}3 \text{ эрг} \approx 4000 \text{ ГэВ}.$$

Для сравнения отметим, что на современных ускорителях достигнута энергия порядка 500 ГэВ.

В квантовой механике энергия без нарушения ее величины может быть измерена с точностью

$$\Delta E \cdot \tau \geq \hbar,$$

где τ – длительность измерения /14/. Пусть длительность измерения τ равна временному интервалу сферического мира (15)

$$\tau = \frac{\pi r}{c}.$$

Так как из (28) следует, что τ и $\mathcal{E}_{min}$ связаны соотношением

$$\mathcal{E}_{min} \cdot \tau = h,$$

то $\mathcal{E}_{min}$ можно придать смысл точности измерения энергии.

Авторы выражают глубокую признательность Р.А.Асанову, Н.А.Черникову за полезные обсуждения и ценные замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим матричные элементы неприводимых представлений группы $SU(2)$, явный вид которых приведен в [15].

$$D^j_{\ell k}(V) = i^{\ell+k}\sqrt{\frac{(j+\ell)!(j-\ell)!}{(j+k)!(j-k)!}}\, v_1^{\ell-k}\, v_2^{\ell+k}\, P^{(\ell+k,\ell-k)}_{j-\ell}(v_1 v_1^* - v_2 v_2^*),$$

где

$$j = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \ldots, \qquad \ell; k = -j, -j+1, \ldots, j-1, j,$$

$$v_1 v_1^* + v_2 v_2^* = 1,$$

$P^{(a,b)}_n$ – полиномы Якоби.
Известно, что функции $D^j_{\ell k}(V)$ образуют полную ортогональную систему фукций на единичной трехмерной сфере S_3.

$$\int D^j_{\ell k}(V) D^{j'}_{\ell' k'}(V)\, d\Omega = \frac{2\pi^2}{2j+1}\delta_{jj'}\, \delta_{\ell\ell'}\, \delta_{kk'}. \qquad (2.1)$$

где $d\Omega$ – элемент объема S_3.
Докажем, что функции $D^j_{\ell k}(V)$ образуют базис неприводимого представления (j, j) группы O_4. С этой целью перейдем от канонического базиса

$$m_{\mu\nu} = u_\mu \frac{\partial}{\partial u_\nu} - u_\nu \frac{\partial}{\partial u_\mu}$$

алгебры Ли группы O_4 к базису

$$L_{(\pm)} = \tfrac{1}{2}(m_{12} \pm im_{23} + m_{43} \pm im_{41}),$$

$$L_0 = \tfrac{1}{2}(m_{31} + m_{42}),$$

$$K_{(\pm)} = \tfrac{1}{2}(m_{21} \pm im_{32} + m_{43} \pm im_{41}),$$

$$K_0 = \tfrac{1}{2}(m_{31} + m_{24}).$$

Делая замену переменных

$$v_1 = u_4 + iu_2, \quad v_1^* = u_4 - iu_2,$$

$$v_2 = u_3 + iu_1, \quad v_2^* = u_3 - iu_1.$$

получаем

$$L_{(+)} = -i\left(v_1 \frac{\partial}{\partial v_2^*} - v_2 \frac{\partial}{\partial v_1^*}\right),$$

$$L_{(-)} = -i\left(v_1^* \frac{\partial}{\partial v_2} - v_2^* \frac{\partial}{\partial v_1}\right),$$

$$L_0 = \tfrac{1}{2}\left(v_1 \frac{\partial}{\partial v_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial v_2} - v_1^* \frac{\partial}{\partial v_1^*} - v_2^* \frac{\partial}{\partial v_2^*}\right),$$

$$K_{(+)} = -i\left(v_1^* \frac{\partial}{\partial v_2^*} - v_2 \frac{\partial}{\partial v_1}\right),$$

$$K_{(-)} = -i\left(v_1 \frac{\partial}{\partial v_2} - v_2^* \frac{\partial}{\partial v_1^*}\right),$$

$$K_0 = \tfrac{1}{2}\left(-v_1 \frac{\partial}{\partial v_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial v_2} + v_1^* \frac{\partial}{\partial v_1^*} - v_2^* \frac{\partial}{\partial v_2^*}\right).$$

Применяя операторы K, L к $D^j_{\ell k}(V)$ и используя формулы дифференцирования и некоторые другие соотношения для полиномов Якоби /16/, получаем, что $D^j_{\ell k}(V)$ являются решениями дифференциальных уравнений

$$L_0 D^j_{\ell k}(V) = \ell D^j_{\ell k}(V),$$

$$L_{(\pm)} D^j_{\ell k}(V) = \sqrt{(j \mp \ell)(j \pm \ell + 1)}\, D^j_{\ell \pm 1, k}(V),$$

$$K_0 D^j_{\ell k}(V) = k D^j_{\ell k}(V), \qquad (2.2)$$

$$K_{(\pm)} D^j_{\ell k}(V) = \sqrt{(j \mp k)(j \pm k + 1)}\, D^j_{\ell, k \pm 1}(V).$$

Тем самым наше утверждение доказано. Так как

$$\Delta = \tfrac{1}{2} \sum_{\mu,\nu=1}^{4} m_{\mu\nu} m_{\mu\nu} = -2(L_{(+)}L_{(-)} + K_{(+)}K_{(-)} + L_0^2 + K_0^2 - L_0 - K_0),$$

то согласно (2.2)

$$\Delta D^j_{\ell k}(V) = -2j(2j+2) D^j_{\ell k}(V). \qquad (2.3)$$

Таким образом, функции $D^j_{\ell k}(V)$ являются собственными функциями оператора Лапласа на трехмерной сфере. Отсюда и из (22), (23) заключаем, что решение уравнений (22) следует искать в виде линейных комбинаций $D^j_{\ell k}(V)$ с заданным значением j. Равенства (2.2) позволяют проверить приводимые ниже результаты:

$$(A^p_1)_1 = i\sqrt{(j - \ell + 1)(j + k + 1)}\, D^{j+1/2}_{\ell+1/2, k+1/2}(V) +$$

$$+ i\sqrt{(j + \ell + 1)(j - k + 1)}\, D^{j+1/2}_{\ell-1/2, k-1/2}(V),$$

$$(A^p_1)_2 = -\sqrt{(j - \ell + 1)(j - k + 1)}\, D^{j+1/2}_{\ell+1/2, k-1/2}(V) -$$

$$- \sqrt{(j + \ell + 1)(j + k + 1)}\, D^{j+1/2}_{\ell-1/2, k+1/2}(V).$$

$$(A^p_1)_3 = -\sqrt{(j-\ell+1)(j+k+1)}\,D^{j+1/2}_{\ell+1/2,\,k+1/2}(V) +$$

$$+\sqrt{(j+\ell+1)(j-k+1)}\,D^{j+1/2}_{\ell-1/2,\,k-1/2}(V),$$

$$(A^p_1)_4 = -i\sqrt{(j-\ell+1)(j-k+1)}\,D^{j+1/2}_{\ell+1/2,\,k-1/2}(V) +$$

$$+ i\sqrt{(j+\ell+1)(j+k+1)}\,D^{j+1/2}_{\ell-1/2,\,k+1/2}(V),$$

для правополяризованных состояний (ϵ =1)

$$(A^p_{-1})_1 = i\sqrt{(j-\ell+1)(j+k+1)}\,D^{j+1/2}_{k+1/2,\,\ell+1/2}(V) +$$

$$+ i\sqrt{(j+\ell+1)(j-k+1)}\,D^{j+1/2}_{k-1/2,\,\ell-1/2}(V),$$

$$(A^p_{-1})_2 = \sqrt{(j-\ell+1)(j-k+1)}\,D^{j+1/2}_{k-1/2,\,\ell+1/2}(V) +$$

$$+ \sqrt{(j+\ell+1)(j+k+1)}\,D^{j+1/2}_{k+1/2,\,\ell-1/2}(V),$$

$$(A^p_{-1})_3 = -\sqrt{(j-\ell+1)(j+k+1)}\,D^{j+1/2}_{k+1/2,\,\ell+1/2}(V) +$$

$$+ \sqrt{(j+\ell+1)(j-k+1)}\,D^{j+1/2}_{k-1/2,\,\ell-1/2}(V),$$

$$(A^p_{-1})_4 = -i\sqrt{(j-\ell+1)(j-k+1)}\,D^{j+1/2}_{k-1/2,\,\ell+1/2}(V) +$$

$$+ i\sqrt{(j+\ell+1)(j+k+1)}\,D^{j+1/2}_{k+1/2,\,\ell-1/2}(V).$$

для левополяризованных состояний ($\epsilon = -1$) при этом

$$p = (2j + 2), \quad j = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \ldots,$$

$$\ell = -(j+1), -j, \ldots, j, j+1,$$

$$k = -j, -j+1, \ldots, j-1, j.$$

Вырождение уровней p обусловлено, очевидно, тем, что операторы $K_{\mu\nu}$ коммутируют с оператором W_0. Вырождение требует несколько уточнить обозначение собственных векторов W_0:

$$(A^p_\epsilon)_\mu \Longrightarrow (A^p_{\epsilon\ell k})_\mu .$$

Кратность вырождения равна $p^2 - 1$. С помощью (2.1) находим, что

$$< A^p_{\epsilon\ell k}, A^{p'}_{\epsilon'\ell' k'} > = 4\pi^2 p\, \delta_{pp'} \delta_{\epsilon\epsilon'} \delta_{\ell\ell'} \delta_{kk'},$$

где

$$< A, B > = \int (\overset{*}{A}_1 B_1 + \overset{*}{A}_2 B_2 + \overset{*}{A}_3 B_3 + \overset{*}{A}_4 B_4) d\Omega .$$

Векторы $(A^p_{\epsilon\ell k})_\mu$ образуют полную ортогональную систему поперечных векторных полей на трехмерной сфере, по которой можно разложить любое поперечное векторное поле A_μ, удовлетворяющее условию $< A, A > \neq \infty$,

$$A_\mu = \sum_{p,\epsilon,\ell,k} C^p_{\epsilon\ell k} (A^p_{\epsilon\ell k})_\mu \quad ,$$

$$C^p_{\epsilon\ell k} = \frac{1}{4\pi^2 p} < A^p_{\epsilon\ell k}, A > .$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Пестов А.Б., Черников Н.А., Шавохина Н.С. ТМФ, 1975; 23, с. 331. Препринт ОИЯИ, Р2-8370, Дубна, 1974.
2. Пестов А.Б., Черников Н.А., Шавохина Н.С. Тезисы докладов IV Советской гравитационной конференции, изд. АН БССР, Минск, 1976; Сб. "Классическая и квантовая теория гравитации", изд. ИФ АН БССР, Минск, 1976, с. 98.
3. Фролов В.П. Препринт ФИАН, №127, 1972.
4. Пестов А.Б. Сб. "Проблемы теории гравитации и элементарных частиц", вып. 7, с. 79, Атомиздат, Москва, 1976; Препринт ОИЯИ, Р2-8070, Дубна, 1974.
5. Dirac P.A.M. Ann. Math., 1935, 36.
6. Гюрши Ф. Сб. "Теория групп и элементарные частицы", М., Мир, 1967, с. 104.
7. Chernikov N.A., Tagirov E.A. Ann.Inst. H. Poincare. VIX, 2, Sect.A, Paris, 1968; Препринт ОИЯИ, Р2-3777, Дубна, 1968.
8. Hannabus K.C. Proc. Cambr. Phil. Soc. 70, 283, 1973.
9. Менский М.Б. Пространство - время и концепция частиц. М., Наука, 1976.
10. Черников Н.А., Шавохина Н.С. ТМФ, 1973, 15, с. 91; Препринт ОИЯИ, Р2-6173, Дубна, 1971.
11. Пестов А.Б., Черников Н.А., Шавохина Н.С. ТМФ, 1975, 25, с. 327; Препринт ОИЯИ, Р2-7829, Дубна, 1974.
12. Захаров А.В., Шавохина Н.С. Сб. "Теория относительности и гравитации", вып. 10-11, Казань, 1975.
13. Марков М.А. Препринт ОИЯИ, Е2-7229, Дубна, 1973.
14. Блохинцев Д.И. Основы квантовой механики. Изд. "Высшая школа", Москва, 1963, с. 460.
15. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Тодоров И.Т. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. М., Наука, 1969, с. 117.
16. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, 2, М., Наука, 1966, с. 170.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 октября 1977 года.