ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

9/7-78

P2 - 11021

Н.А.Черников

ПРОСТРАНСТВО АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ С НЕСИММЕТРИЧНЫМ ТЕНЗОРНЫМ ПОЛЕМ

1977

P2 - 11021

Н.А.Черников

ПРОСТРАНСТВО АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ С НЕСИММЕТРИЧНЫМ ТЕНЗОРНЫМ ПОЛЕМ

Направлено в "Известия вузов. Математика".

Черников Н.А. P2 - 11021

Пространство аффинной связности с несимметричным тензорным полем

На гладком многообразии конечной размерности задается несимметричное тензорное поле и определяется через него аффинная связность как решение алгебраического уравнения, предложенного Эйнштейном для нужд единой теории поля. Выясняются условия, при которых уравнение для связности сводится к уравнению для тензора кручения. Приводятся явные выражения для свернутой средней связности и для ковектора кручения. Показывается, как выражаются через тензор кручения уравнения типа Борна-Инфельда.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Chernikov N.A. P2 - 11021

Affine Connection Space with Asymmetric Tensor Field

On a differentiable manifold of finite dimensionality an asymmetric tensor field is given. In terms of this field, the affine connection is defined as a solution of the algebraic equation Einstein ~~has~~ suggested for unified field theory. Conditions are established under which the equation for connection is reduced to that for the torsion tensor. Explicit form is given for the contracted mean connection and for the torsion covector. It is shown how equations of the Born-Infeld type are expressed by the torsion tensor.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На n-мерном гладком многообразии в координатном базисе dx^{α} /и дуальном базисе $\partial/\partial x^{\alpha}$ / рассмотрим тензорное поле $g_{\alpha\beta}(x)$, никаким условиям симметрии не подчиненное. Затем определим аффинную связность * $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ как решение уравнения

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} - g_{\sigma\beta}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\gamma} - g_{\alpha\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\gamma\beta} = 0, \qquad /1/$$

предложенного Эйнштейном /3/ в поисках единой теории поля. Будем требовать, чтобы уравнение /1/ определяло связность $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ однозначно. Каким условиям при этом должен удовлетворять тензор $g_{\alpha\beta}$, выяснится в процессе решения уравнения /1/.

В данной статье, однако, получена не сама связность $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$, а только ее свертка $\Gamma_{\alpha} = \Gamma^{\mu}_{\alpha\mu}$. Поэтому здесь выяснены не все, а только часть условий, накладываемых на тензор $g_{\alpha\beta}$. При этом оказывается, что уравнение /1/ можно заменить уравнением для тензора кручения, указанным в конце статьи. Кроме того, в данной статье рассмотрены уравнения типа Борна-Инфельда /4/ и показано, какие условия они накладывают на тензор кручения. Как Эйнштейн, так и Борн и Инфельд ограничивались рассмотрением четырехмерного случая

---

* С употребляемыми здесь геометрическими объектами можно познакомиться по книгам /1,2/.

$n=4$. Мы не фиксируем размерности многообразия в расчете на те или иные физические и геометрические приложения.

Будем обозначать

$$h_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(g_{\alpha\beta}+g_{\beta\alpha}),\quad \phi_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(g_{\alpha\beta}-g_{\beta\alpha}), \qquad /2/$$

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\mu}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}+\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}),\quad S^{\mu}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}-\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}). \qquad /3/$$

По определению, $\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\mu}_{\alpha\beta}$ есть средняя связность между искомой связностью $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ и противоположной ей связностью $\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}$, тогда как $S^{\mu}_{\alpha\beta}$ является тензором кручения. Ковариантное дифференцирование со средней связностью будем обозначать символом $\overset{\circ}{\nabla}$. Так как

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\gamma}g_{\alpha\beta}=\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}-g_{\sigma\beta}\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\sigma}_{\gamma\alpha}-g_{\alpha\sigma}\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\sigma}_{\gamma\beta},$$

то уравнение /1/ можно записать в виде:

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\gamma}g_{\alpha\beta}=g_{\sigma\beta}S^{\sigma}_{\alpha\gamma}+g_{\alpha\sigma}S^{\sigma}_{\gamma\beta}. \qquad /4/$$

2. СВЕРТКА СРЕДНЕЙ СВЯЗНОСТИ

Обозначим g определитель матрицы $(g_{\alpha\beta})$ и $a^{\alpha\beta}$ - алгебраическое дополнение элемента $g_{\alpha\beta}$ в этой матрице. Как известно,

$$g_{\sigma\alpha}a^{\sigma\beta}=g\delta^{\beta}_{\alpha}=g_{\alpha\sigma}a^{\beta\sigma},$$

$$\frac{\partial g}{\partial x^{\gamma}}=a^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}.$$

Умножим уравнение /1/ на $a^{\alpha\beta}$ и свернем произведение по индексам α и β. В результате получим

$$\frac{\partial g}{\partial x^{\gamma}} = g\delta^{\alpha}_{\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\gamma} + g\delta^{\beta}_{\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\gamma\beta} = g\,(\Gamma^{\sigma}_{\sigma\gamma} + \Gamma^{\sigma}_{\gamma\sigma}).$$

Следовательно, чтобы уравнение /1/ допускало однозначное решение, требуется условие $g \neq 0$. В этом случае

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\mu}_{\alpha\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \ln\sqrt{|g|}. \qquad /5/$$

Таким образом, средняя связность эквиаффинна.

Принимая условие

$$g \neq 0, \qquad /6/$$

мы можем ввести тензор $\tilde{g}^{\alpha\beta} = \dfrac{a^{\alpha\beta}}{g}$, взаимный тензору $g_{\alpha\beta}$, так что

$$g_{\sigma\alpha}\,\tilde{g}^{\sigma\beta} = \delta^{\beta}_{\alpha} = g_{\alpha\sigma}\,\tilde{g}^{\beta\sigma}. \qquad /7/$$

3. КОВЕКТОР КРУЧЕНИЯ

Умножим уравнение /1/ на $\tilde{g}^{\mu\beta}\,\tilde{g}^{\alpha\nu}$ и свернем произведение по индексам α и β. В результате получим

$$\frac{\partial \tilde{g}^{\mu\nu}}{\partial x^{\gamma}} + \tilde{g}^{\alpha\nu}\,\Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma} + \tilde{g}^{\mu\alpha}\,\Gamma^{\nu}_{\gamma\alpha} = 0. \qquad /8/$$

Так как

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\gamma}\,\tilde{g}^{\mu\nu} = \frac{\partial \tilde{g}^{\mu\nu}}{\partial x^{\gamma}} + \tilde{g}^{\alpha\nu}\,\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\mu}_{\gamma\alpha} + \tilde{g}^{\mu\alpha}\,\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\nu}_{\gamma\alpha},$$

то уравнение /8/ можно записать в виде

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\gamma}\tilde{g}^{\mu\nu} = \tilde{g}^{\alpha\nu} S^{\mu}_{\gamma\alpha} + \tilde{g}^{\mu\alpha} S^{\nu}_{\alpha\gamma} . \qquad /9/$$

Аналогично /2/ обозначим

$$\tilde{h}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\tilde{g}^{\alpha\beta} + \tilde{g}^{\beta\alpha}), \qquad \tilde{\phi}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\tilde{g}^{\alpha\beta} - \tilde{g}^{\beta\alpha}). \qquad /10/$$

Из уравнения /9/ получаем

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\gamma} \tilde{\phi}^{\mu\nu} = \tilde{h}^{\mu\alpha} S^{\nu}_{\alpha\gamma} - \tilde{h}^{\nu\alpha} S^{\mu}_{\alpha\gamma} .$$

Следовательно,

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\gamma} \tilde{\phi}^{\mu\gamma} = \tilde{h}^{\mu\alpha} S_{\alpha} , \qquad /11/$$

где

$$S_{\alpha} = S^{\mu}_{\alpha\mu} \qquad /12/$$

есть ковектор кручения.

С другой стороны, имеем

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\gamma} \tilde{\phi}^{\mu\gamma} = \frac{\partial \tilde{\phi}^{\mu\gamma}}{\partial x^{\gamma}} + \tilde{\phi}^{\mu\alpha} \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha} .$$

Учитывая результат /5/, находим

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\gamma} \tilde{\phi}^{\mu\gamma} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} (\tilde{\phi}^{\mu\gamma} \sqrt{|g|}).$$

Подставляя последнее в /11/, получаем

$$\tilde{h}^{\mu\alpha} S_{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} (\tilde{\phi}^{\mu\gamma} \sqrt{|g|}). \qquad /13/$$

Следовательно, чтобы уравнение /1/ допускало однозначное решение, требуется еще условие $\tilde{h} \neq 0$, где $\tilde{h}$ - определитель матрицы $(\tilde{h}^{\alpha\beta})$.

Докажем, что это условие эквивалентно условию $h \neq 0$, где h - определитель матрицы $(h_{\alpha\beta})$. Действительно, так как

$$h_{\alpha\sigma} \tilde{g}^{\sigma\beta} = \frac{1}{2}(\delta_\alpha^\beta + g_{\alpha\sigma} \tilde{g}^{\sigma\beta}),$$

$$g_{\alpha\sigma} \tilde{h}^{\sigma\beta} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\sigma} \tilde{g}^{\sigma\beta} + \delta_\alpha^\beta),$$

то

$$h_{\alpha\sigma} \tilde{g}^{\sigma\beta} = g_{\alpha\sigma} \tilde{h}^{\sigma\beta}. \tag{14}$$

Отсюда находим

$$h = h g^2. \tag{15}$$

Значит, условие $\tilde{h} \neq 0$ эквивалентно условию $h \neq 0$.

Принимая условие

$$h \neq 0, \tag{16}$$

введем тензор $h^{\alpha\beta}$, взаимный тензору $h_{\alpha\beta}$, и докажем, что тензор

$$g_{\alpha\mu} h^{\mu\nu} g_{\beta\nu} = h_{\alpha\beta} - \phi_{\alpha\mu} h^{\mu\nu} \phi_{\nu\beta} = g_{\mu\alpha} h^{\mu\nu} g_{\nu\beta} \tag{17}$$

взаимен тензору $\tilde{h}^{\alpha\beta}$. Действительно, согласно /14/ и /7/, получаем

$$g_{\mu\alpha} h^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} \tilde{h}^{\sigma\beta} = g_{\mu\alpha} h^{\mu\nu} h_{\nu\sigma} \tilde{g}^{\sigma\beta} = g_{\sigma\alpha} \tilde{g}^{\sigma\beta} = \delta_\alpha^\beta.$$

Располагая этим результатом, найдем из /13/ ковектор кручения в виде

$$S_\alpha = g_{\alpha\mu} h^{\mu\nu} g_{\beta\nu} \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} (\tilde{\phi}^{\beta\gamma} \sqrt{|g|}). \tag{18}$$

4. ВВЕДЕНИЕ РИМАНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

Приняв условие /16/, располагаем римановой геометрией с основной метрической формой

$$ds^2 = h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta . \qquad /19/$$

Как обычно в римановой геометрии, с помощью тензоров $h_{\alpha\beta}$ и $h^{\alpha\beta}$ будем опускать и поднимать индексы. Например,

$$h_{\alpha\sigma}\phi^{\sigma\beta} = \phi_\alpha{}^\beta = \phi_{\alpha\sigma} h^{\sigma\beta} . \qquad /20/$$

Как положено в римановой геометрии, введем связность, обозначаемую скобкой Кристоффеля для метрического тензора $h_{\alpha\beta}$:

$$\left\{ {\mu \atop \alpha\ \beta} \right\} = \frac{1}{2} h^{\mu\sigma} \left(\frac{\partial h_{\sigma\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial h_{\sigma\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma} \right). \qquad /21/$$

Ковариантное дифференцирование с такой связностью будем обозначать буквой D . Например,

$$D_\gamma \phi_{\alpha\beta} = \frac{\partial \phi_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} - \left\{ {\sigma \atop \gamma\ \alpha} \right\} \phi_{\sigma\beta} - \left\{ {\sigma \atop \gamma\ \beta} \right\} \phi_{\alpha\sigma} . \qquad /22/$$

Так как

$$g_{\alpha\beta} = h_{\alpha\sigma} \left(\delta_\beta^\sigma - \phi_\beta{}^\sigma \right), \qquad /23/$$

то $g = hJ$, где

$$J = \det \left(\delta_\beta^\sigma - \phi_\beta{}^\sigma \right). \qquad /24/$$

Значит, пара условий /6/ и /16/ эквивалентна паре условий

$$h \neq 0, \quad J \neq 0. \qquad /25/$$

В обозначениях римановой геометрии на основании /18/ и /17/ записываем ковектор кручения в виде

$$S_{\alpha} = (\delta_{\alpha}^{\mu} - \phi_{\alpha}^{\beta}\phi_{\beta}^{\mu}) \frac{1}{\sqrt{|J|}} D_{\gamma} (\tilde{\phi}_{\mu}^{\gamma}\sqrt{|J|}). \qquad /26/$$

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТЕНЗОРА $\tilde{\phi}$

Чтобы найти ковектор кручени., нам осталось вычислить тензор $\tilde{\phi}$ С этой целью прибегаем к алгебре аффиноров.

Любой смешанный тензор ϕ_{α}^{μ} рассматриваем как аффинор, т.е. как оператор, превращающий любой ковектор S с компонентами S_{α} в ковектор ϕS с компонентами $\phi_{\alpha}^{\mu} S_{\mu}$ /или любой вектор T с компонентами T^{μ} в вектор $T\phi$ с компонентами $T^{\alpha}\phi_{\alpha}^{\mu}$ /.

На основании /7/ и /23/ заключаем, что

$$h_{\alpha\sigma} \tilde{g}^{\sigma\mu} = [\frac{E}{E-\phi}]_{\alpha}^{\mu}, \quad h_{\alpha\sigma}\tilde{g}^{\mu\sigma} = [\frac{E}{E+\phi}]_{\alpha}^{\mu}. \qquad /27/$$

Здесь ϕ- аффинор с компонентами /20/, E - единичный аффинор * . Из /10/ и /27/ следует, что

$$\tilde{\phi}_{\alpha}^{\mu} = h_{\alpha\sigma}\tilde{\phi}^{\sigma\mu} = [\frac{\phi}{E-\phi^{2}}]_{\alpha}^{\mu} \qquad /28/$$

Значит, осталось подсчитать аффинор

$$\tilde{\phi} = \frac{\phi}{E-\phi^{2}}. \qquad /29/$$

---

* Впрочем, дальше будет видно, что единичный аффинор удобнее обозначать так же, как число 1. Соответственно произведение числа λ /или трансцедентного элемента λ над полем чисел/ на единичный аффинор следует обозначать просто λ . Такой способ обозначений принят в алгебре операторов квантовой механики.

Правило такого счета основывается на теореме Гамильтона-Кэли, согласно которой каждый аффинор ϕ является корнем характеристического уравнения: $J(\phi)=0$, где

$$J(\lambda)=\det(\lambda\delta^{\mu}_{\alpha}-\phi^{\mu}_{\alpha}). \qquad /30/$$

Для рассматриваемого аффинора из-за того, что тензор $\phi_{\alpha\beta}$ антисимметричен, а тензор $h^{\alpha\beta}$ симметричен, характеристический полином /30/ имеет вид $J(\lambda)=P(\lambda^2)$ при четной размерности $n=2k$ и $J(\lambda)=\lambda P(\lambda^2)$ при нечетной размерности $n=2k+1$, где $P(\lambda^2)$ - полином от λ^2 степени k. Значит, в обоих случаях имеем $\phi P(\phi^2)=0$. С другой стороны, по теореме Безу разность $P(1)-P(\lambda^2)$ делится на $1-\lambda^2$ без остатка, т.е. имеем

$$P(1)-P(\lambda^2)=(1-\lambda^2)Q(\lambda^2),$$

где $Q(\lambda^2)$ - полином от λ^2 степени $k-1$ Следовательно,

$$\phi[P(1)-P(\phi^2)]=\phi(1-\phi^2)Q(\phi^2)=\phi P(1).$$

Но $P(1)$ есть число, равное /24/. Действительно,

$$P(1)=J(1)=J.$$

Согласно второму из условий /25/, это число не равно нулю, а потому искомый аффинор /29/ равен

$$\tilde{\phi}=\frac{\phi\, Q(\phi^2)}{J}. \qquad /31/$$

Подставляя этот результат в /26/, получаем окончательное выражение для ковектора кручения:

$$S_{\alpha}=\left[\frac{1-\phi^2}{\sqrt{|J|}}\right]^{\mu}_{\alpha} D_{\gamma}\left[\frac{\phi Q(\phi^2)}{\sqrt{|J|}}\right]^{\gamma}_{\mu}. \qquad /32/$$

Добавим еще один результат. Из /27/ так же, как и из /17/, следует, что

$$h_{\alpha\sigma}\tilde{h}^{\sigma\mu}=\left[\frac{1}{1-\phi^2}\right]^{\mu}_{\alpha}. \qquad /33/$$

При любой размерности получаем

$$\frac{1}{1-\phi^2} = 1 + \phi\tilde{\phi} = 1 + \frac{\phi^2 Q(\phi^2)}{J}. \qquad /34/$$

При четной размерности, пользуясь тем, что $P(\phi^2) = 0$, получаем более простую, аналогичную /31/, формулу

$$\frac{1}{1-\phi^2} = \frac{Q(\phi^2)}{J}. \qquad /35/$$

6. УРАВНЕНИЯ $S_a = 0$

Эйнштейн полагал $S_a = 0$. Это можно рассматривать как систему дифференциальных уравнений, накладываемых на тензорное поле $\phi_{a\beta}(x)$ при заданном поле $h_{a\beta}(x)$. Из полученных здесь результатов следует, что при условиях /25/ уравнения

$$S_a = 0 \qquad /36/$$

эквивалентны уравнениям

$$D_\mu \left[\frac{\phi Q(\phi^2)}{\sqrt{|J|}} \right]^\mu_a = 0. \qquad /37/$$

или, что все равно, уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} (\tilde{\phi}^{\mu a} \sqrt{|g|}) = 0. \qquad /38/$$

Если поле $\phi_{a\beta}$ имеет вид внешней производной от некоторого поля ϕ_a, то уравнения /38/ могут быть получены из вариационного принципа. Действительно, рассмотрим нериманов объем

$$V = \int \sqrt{|g|}\, dx^1 \dots dx^n \qquad /39/$$

некоторой области D и его вариацию, равную

$$\delta V = \int \frac{1}{2} \tilde{g}^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} \sqrt{|g|}\, dx^1 \dots dx^n . \qquad /40/$$

При постоянном поле $h_{\alpha\beta}$ имеем $\delta g_{\alpha\beta} = \delta \phi_{\alpha\beta}$. Значит,

$$\delta V = \int \frac{1}{2} \tilde{\phi}^{\alpha\beta} \, \delta \phi_{\alpha\beta} \sqrt{|g|}\, dx^1 \dots dx^n . \qquad /41/$$

Пусть теперь

$$\phi_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \phi_\beta - \frac{\partial}{\partial x^\beta} \phi_\alpha . \qquad /42/$$

Применяя теорему Стокса и полагая $\delta\phi_\alpha = 0$ на границе области D , получаем

$$\delta V = \int \frac{\partial}{\partial x^\beta} (\tilde{\phi}^{\alpha\beta} \sqrt{|g|})\, \delta\phi_\alpha \, dx^1 \dots dx^n . \qquad /43/$$

Считая вариацию $\delta\phi_\alpha$ произвольной внутри области D , приходим к уравнениям /38/.

В случае, когда метрическая форма /19/ задает геометрию четырехмерного мира Пуанкаре-Минковского, т.е. когда

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 , \qquad /44/$$

система уравнений /38/ и /42/ составляет основное содержание нелинейной электродинамики Борна-Инфельда.

7. ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА ПОЛЯ ϕ_a

Рассмотрим теперь вариацию /40/ объема /39/ при постоянном поле ϕ_a , считая произвольным поле $h_{a\beta}$. Поскольку при этом $\delta g_{a\beta} = \delta h_{a\beta}$, то

$$\delta V = \int \frac{1}{2} \tilde{h}^{a\beta} \delta h_{a\beta} \sqrt{|g|}\, dx^1 \ldots dx^n \ . \qquad /45/$$

Следуя Гильберту [5], тензор

$$T^{a\beta} = \sqrt{|J|}\, \tilde{h}^{a\beta} \qquad /46/$$

называем тензором энергии-импульса, или тензором натяжений поля ϕ_a. Его ковариантная дивергенция по римановой связности /21/ равна нулю. Убедимся в этом непосредственно.

Согласно /46/, /33/ и /34/, имеем

$$T^{\mu}_{a} = h_{a\sigma} T^{\sigma\mu} = \sqrt{|J|}\, (\delta^{\mu}_{a} + \phi^{\sigma}_{a} \tilde{\phi}^{\mu}_{\sigma}) . \qquad /47/$$

Поэтому

$$D_{\mu} T^{\mu}_{a} = \phi_{a}^{\ \sigma} D_{\mu} (\tilde{\phi}^{\mu}_{\sigma} \sqrt{|J|}) + \frac{1}{2} \sqrt{|J|} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial x^{a}} + 2 \tilde{\phi}^{\mu}_{\sigma} D_{\mu} \phi^{\sigma}_{a} \right) .$$

По правилам дифференцирования определителей получаем

$$\frac{\partial J}{\partial x^{a}} = -J \left[\frac{1}{1-\phi} \right]^{\mu}_{\sigma} D_{a} \phi^{\sigma}_{\mu} = -J \left[\frac{1+\phi}{1-\phi^{2}} \right]^{\mu}_{\sigma} D_{a} \phi^{\sigma}_{\mu} .$$

Значит,

$$\frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial x^{a}} = -\tilde{\phi}^{\mu}_{\sigma} D_{a} \phi^{\sigma}_{\mu} = \tilde{\phi}^{\mu\sigma} D_{a} \phi_{\mu\sigma} .$$

С другой стороны,

$$2 \tilde{\phi}^{\mu}_{\sigma} D_{\mu} \phi_{a}^{\ \sigma} = 2 \tilde{\phi}^{\mu\sigma} D_{\mu} \phi_{\sigma a} = \tilde{\phi}^{\mu\sigma} (D_{\mu} \phi_{\sigma a} + D_{\sigma} \phi_{a\mu}) .$$

Следовательно,

$$D_\mu T^\mu_\alpha = \phi^\sigma_\alpha D_\mu (\tilde{\phi}^\mu_\sigma \sqrt{|J|}) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sqrt{|J|}\, \tilde{\phi}^{\mu\sigma} (D_\alpha \phi_{\mu\sigma} + D_\mu \phi_{\sigma\alpha} + D_\sigma \phi_{\alpha\mu}). \qquad /48/$$

В силу полевых уравнений /38/ и /42/ получаем искомый результат:

$$D_\mu T^\mu_\alpha = 0.$$

Отметим, что равенства /37/ и /49/ можно записать в виде

$$D_\mu (\tilde{g}^{\mu\nu} \sqrt{|J|}) = 0, \qquad D_\nu (\tilde{g}^{\mu\nu} \sqrt{|J|}) = 0. \qquad /50/$$

8. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ТЕНЗОРА КРУЧЕНИЯ

Будем искать решение уравнения /1/ в виде суммы

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \left\{ {\mu \atop \alpha\beta} \right\} + T^\mu_{\alpha\beta}, \qquad /51/$$

в которой первое слагаемое является римановой связностью /21/, а второе - искомым тензором. Подставляя /51/ в /1/, получаем уравнение для тензора T :

$$g_{\sigma\beta} T^\sigma_{\alpha\gamma} + g_{\alpha\sigma} T^\sigma_{\gamma\beta} = \phi_{\alpha\beta\gamma}, \qquad /52/$$

где

$$\phi_{\alpha\beta\gamma} = D_\gamma \phi_{\alpha\beta} \qquad /53/$$

есть ковариантная производная /22/. Обозначая

$$T_{\alpha\beta\gamma} = T^{\sigma}_{\alpha\beta} h_{\sigma\gamma}\ , \qquad T^{\mu}_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta\sigma} h^{\sigma\mu}\ , \qquad /54/$$

приходим к уравнению

$$T_{\alpha\gamma\beta} + T_{\gamma\beta\alpha} + \phi^{\sigma}_{\alpha} T_{\gamma\beta\sigma} - \phi^{\sigma}_{\beta} T_{\alpha\gamma\sigma} = \phi_{\alpha\beta\gamma}$$

или, поменяв местами индексы α и β , - к уравнению

$$T_{\beta\gamma\alpha} + T_{\gamma\alpha\beta} + \phi^{\sigma}_{\beta} T_{\gamma\alpha\sigma} - \phi^{\sigma}_{\alpha} T_{\beta\gamma\sigma} + \phi_{\alpha\beta\gamma} = 0. \qquad /55/$$

Над всеми слагаемыми, входящими в равенство /55/, выполним операцию, превращающую тензор вида $T_{\alpha\beta\gamma}$ в тензор $T_{(\alpha\beta\gamma)}$, равный

$$T_{(\alpha\beta\gamma)} = \frac{1}{3}(T_{\alpha\beta\gamma} + T_{\gamma\alpha\beta} + T_{\beta\gamma\alpha}). \qquad /56/$$

Такая операция над тензором $\phi^{\sigma}_{\beta} T_{\gamma\alpha\sigma} - \phi^{\sigma}_{\alpha} T_{\beta\gamma\sigma}$ дает нуль. Поэтому из /55/ получаем следствие

$$2T_{(\alpha\beta\gamma)} + \phi_{(\alpha\beta\gamma)} = 0, \qquad /57/$$

так что

$$T_{\beta\gamma\alpha} + T_{\gamma\alpha\beta} = -T_{\alpha\beta\gamma} - \frac{3}{2}\phi_{(\alpha\beta\gamma)}. \qquad /58/$$

Подставляя это в /55/, приходим к уравнению

$$T_{\alpha\beta\gamma} = \phi^{\sigma}_{\beta} T_{\gamma\alpha\sigma} - \phi^{\sigma}_{\alpha} T_{\beta\gamma\sigma} + \phi_{\alpha\beta\gamma} - \frac{3}{2}\phi_{(\alpha\beta\gamma)}\ ,$$

эквивалентному уравнению /1/.

Разобьем тензор $T_{\alpha\beta\gamma}$ на части

$$P_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(T_{\alpha\beta\gamma} + T_{\beta\alpha\gamma}), \qquad S_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(T_{\alpha\beta\gamma} - T_{\beta\alpha\gamma}). \qquad /59/$$

Сразу же заметим, что тензор $S_{\alpha\beta\sigma}h^{\sigma\mu} = S^{\mu}_{\alpha\beta}$ есть тензор кручения. Что касается тензора $P^{\mu}_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta\sigma}h^{\sigma\mu}$, то он равен разности

$$P^{\mu}_{\alpha\beta} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\mu}_{\alpha\beta} - \left\{ {\mu \atop \alpha\ \beta} \right\} \qquad /60/$$

средней связности /3/ и связности /21/.

Из /58/ без труда получаем систему двух уравнений

$$P_{\alpha\beta\gamma} = \phi^{\sigma}_{\beta} S_{\gamma\alpha\sigma} - \phi^{\sigma}_{\alpha} S_{\beta\gamma\sigma}, \qquad /61/$$

$$S_{\alpha\beta\gamma} = \phi^{\sigma}_{\beta} P_{\gamma\alpha\sigma} - \phi^{\sigma}_{\alpha} P_{\beta\gamma\sigma} + \phi_{\alpha\beta\gamma} - \frac{3}{2}\phi_{(\alpha\beta\gamma)}, \qquad /62/$$

эквивалентную одному уравнению /1/. Из /57/, равно как и из /61/ и /62/, следует, что

$$P_{(\alpha\beta\gamma)} = 0, \qquad /63/$$

$$2S_{(\alpha\beta\gamma)} + \phi_{(\alpha\beta\gamma)} = 0. \qquad /64/$$

Подставим теперь /61/ в /62/ и получим следующее уравнение для тензора кручения:

$$S_{\alpha\beta\gamma} + \phi^{\mu}_{\alpha}\phi^{\sigma}_{\gamma} S_{\mu\beta\sigma} + \phi^{\nu}_{\beta}\phi^{\sigma}_{\gamma} S_{\alpha\nu\sigma} =$$

$$= \phi^{\mu}_{\alpha}\phi^{\nu}_{\beta}(S_{\nu\gamma\mu} + S_{\gamma\mu\nu}) + \phi_{\alpha\beta\gamma} - \frac{3}{2}\phi_{(\alpha\beta\gamma)}. \qquad /65/$$

Согласно /64/,

$$S_{\nu\gamma\mu} + S_{\gamma\mu\nu} = -S_{\mu\nu\gamma} - \frac{3}{2}\phi_{(\mu\nu\gamma)}.$$

Подставляя это в /65/, получаем окончательное уравнение для тензора кручения:

$$S_{\alpha\beta\gamma} + \phi^{\mu}_{\alpha}\phi^{\nu}_{\beta} S_{\mu\nu\gamma} + \phi^{\mu}_{\alpha}\phi^{\sigma}_{\gamma} S_{\mu\beta\sigma} + \phi^{\nu}_{\beta}\phi^{\sigma}_{\gamma} S_{\alpha\nu\sigma} = \Psi_{\alpha\beta\gamma}, \qquad /66/$$

где

$$\Psi_{\alpha\beta\gamma} = \phi_{\alpha\beta\gamma} - \frac{3}{2}\phi_{(\alpha\beta\gamma)} - \frac{3}{2}\phi^{\mu}_{\alpha}\phi^{\nu}_{\beta}\phi_{(\mu\nu\gamma)}. \qquad /67/$$

Вместо того, чтобы решать систему уравнений /1/ с n^3 неизвестными $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$, можно решать систему уравнений /66/ с $\frac{n^2(n-1)}{2}$ неизвестными $S_{\alpha\beta\gamma}$. Действительно, если известен тензор S, то из /61/ находим тензор P, а вместе с тем и связность

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \left\{ {\mu \atop \alpha\,\beta} \right\} + P^{\mu}_{\alpha\beta} + S^{\mu}_{\alpha\beta}, \qquad /68/$$

удовлетворяющую системе уравнений /1/.

Заметим, наконец, что в случае /42/

$$\phi_{(\alpha\beta\gamma)} = 0. \qquad /69/$$

Согласно /64/, в этом случае и

$$S_{(\alpha\beta\gamma)} = 0, \qquad /70/$$

так что система уравнений Борна-Инфельда /38/ и /69/ эквивалентна системе уравнений /36/ и /70/.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Норден А.П. Пространства аффинной связности. М., "Наука", 1976.*
2. *Широков П.А. Тензорное исчисление. Изд-во Казанского университета, 1961.*
3. *Эйнштейн А. Собрание научных трудов, т. 2, М., "Наука", 1966.*
4. *Born M., Infeld L. Foundation of the New Field Theory. Proc.Roy Soc., A144, 1934, p. 425-451.*
5. *Hilbert D. Die Grundlagen der Physik. Nachr.Gottingen, 1915, S.395-407.*

Рукопись поступила в издательский отдел
14 октября 1977 года.