СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 10976

С.Б.Ильин, Э.А.Тагиров

КОНФОРМНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ УРАВНЕНИЯ ЛОРЕНЦА-ДИРАКА И ПРИНЦИП ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

1977

P2 - 10976

С.Б.Ильин,* Э.А.Тагиров

КОНФОРМНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ УРАВНЕНИЯ ЛОРЕНЦА-ДИРАКА И ПРИНЦИП ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

* Саратовский государственный университет им. Н.Г.Чернышевского.

Ильин С.Б., Тагиров Э.А.

Р2 - 10976

Конформная инвариантность уравнения Лоренца-Дирака и принцип эквивалентности

Понятие об инвариантности общерелятивистских уравнений безмассовых частиц и полей относительно конформного отображения обобщается так, чтобы его можно было применить к соответствующим уравнениям с ненулевыми массами. Отмечается, что сформулированному таким образом принципу условной конформной инвариантности наряду с такими фундаментальными уравнениями, как уравнения геодезических, Максвелла, Дирака, скалярного поля, удовлетворяют также общерелятивистское уравнение Лоренца и уравнение движения излучающего заряда (уравнение Лоренца-Дирака-Хоббса). В последнем случае, как и в уравнении скалярного поля, имеются члены, которые противоречат, по крайней мере, некоторым формулировкам принципа эквивалентности, но необходимы для обеспечения (условной) конформной инвариантности.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Ilyin S.V., Tagirov E.A.

P2 - 10976

Conformal Invariance of the Lorentz-Dirac Equation and the Principle of Equivalence

The concept of invariance with respect to conformal mappings of general relativistic equations of massless fields and particles is extended so that it may be applied to corresponding equations with nonvanishing rest masses. It is pointed out that equally with such fundamental equations as geodesic, Maxwell, Dirac, scalar ones the general relativistic equations of motion of a point charge both nonradiating (the Lorentz equation) and radiating (the Lorentz-Dirac-Hobbs equation) also satisfy to the principle of conditional conformal invariance so formulated. The Lorentz-Dirac-Hobbs equation contains a term which is necessary to ensure its conditional invariance but which disagrees with some formulations of the principle of equivalence.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

§1. *ИНВАРИАНТНОСТЬ УРАВНЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ*

Физически наиболее осмысленные общерелятивистские уравнения безмассовых полей и частиц: уравнения Максвелла, Дирака для нейтрино, изотропных геодезических, кинетической теории фотонного газа, - обладают свойством инвариантности относительно конформных отображений римановых пространств-времен /1-3/, которое мы будем называть просто конформной инвариантностью. Напомним сначала, что мы понимаем под конформным отображением римановых пространств /см., например,/4//.

Определение 1. Римановы пространства V и $\tilde{V}$ с метрическими тензорами $g_{\alpha\beta}$ и $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ взаимно локально конформны, если, скажем, $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ в окрестности точки $\tilde{x} \in \tilde{V}$ можно подходящим выбором координат привести к виду

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{x}) = \Omega^2(\tilde{x}) g_{\alpha\beta}(x), \qquad /1/$$

где $\Omega(x)$ - какая-либо действительная неисчезающая функция.

Определение 2. Отображение $C: x \to \tilde{x}(x), x \in V, \tilde{x} \in \tilde{V}$, при котором имеет место /1/, называется /локально/ конформным.

Определение 3. Уравнение

$$A(x, g_{\alpha\beta}(x), \phi_i(x)) = 0 \qquad /2/$$

относительно функций $\phi_i(x)$ назовем конформно-инвариантным, если в пространстве $\tilde{V}$, конформном к V, в силу /1/ оно может быть приведено к той форме, какую оно имеет в V, т.е. если уравнение

$$A(\tilde{x}, \tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{x}), \tilde{\phi}_i(\tilde{x})) = 0$$

/уравнение /2/ в $\tilde{V}$ / преобразуется к виду

$$A(\tilde{x}, g_{\alpha\beta}(\tilde{x}), \phi_i(\tilde{x}, \tilde{\phi}_j)) = 0 .$$

Связь между $\tilde{\phi}_i$ и ϕ_i, естественно, зависит от конкретного вида уравнения /2/. Если упомянутые выше уравнения сразу оказываются конформно-инвариантными, то традиционное общерелятивистское уравнение скалярного поля $\Box\phi = 0$ конформно-инвариантным не является, а становится таковым при определенном видоизменении [5]:

$$\Box\phi + \frac{1}{6}R\phi = 0, \qquad /3/$$

где R - скалярная кривизна; при этом $\tilde{\phi} = \Omega^{-1}\phi$. В работе [6] было установлено, что с позиций квантовой теории поля именно уравнение $\Box\phi + (\frac{1}{6})R\phi + m^2\phi = 0$ следует рассматривать в качестве общерелятивистского уравнения скалярной частицы с массой покоя m. Введение члена $(1/6)R\phi$ приводит к т.н. "усовершенствованному" тензору энергии-импульса скалярного поля, который отличается от канонического даже в пространстве Минковского, где $R = 0$.

Конформно-инвариантными в пренебрежении массами покоя являются также уравнения с т.н. минимальными взаимодействиями полей спинов 0, 1/2, 1 [7,8]. Предлагаются также конформно-инвариантные теории гравитации.

С конформной инвариантностью уравнения /2/ связана его инвариантность относительно конформных точечных преобразований данного V, если последнее их допускает.

Определение 4. Точечное преобразование $x \to \tilde{x}(x)$ в данном V называется конформным, если

$$'g_{\alpha\beta}('x) = \frac{\partial 'x^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial 'x^{\nu}}{\partial x^{\beta}} g_{\mu\nu}(x)\big|_{x=x('x)} = \omega^2('x) g_{\alpha\beta}('x), \quad /4/$$

где $\omega(x)$ - какая-либо /непрерывная/ действительная неисчезающая функция. Очевидно, что конформное преобразование есть конформное отображение V на себя. Тогда на решениях конформно-инвариантного уравнения /2/ /при условии его общековариантности/ в данном V реализуется представление соответствующей группы конформных преобразований. В случае пространства Минковского, допускающего 15-параметрическую группу конформных преобразований, изоморфную $SO(2,4)$, это есть конформная инвариантность в общеупотребительном смысле.

§2. УСЛОВНАЯ КОНФОРМНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ

Сформулированному здесь условию конформной инвариантности, конечно, не удовлетворяют физические уравнения, содержащие массу покоя. Однако если допустить, что масса при конформных отображениях преобразуется как скалярное поле:

$$\tilde{m} = \Omega^{-1} m, \quad /5/$$

то конформно-инвариантными станут также все массивные аналоги упомянутых здесь уравнений. При этом, конечно, массу покоя неизбежно приходится считать скалярной функцией пространственно-временной точки: $m = m(x)$. Это в общем-то известное обстоятельство /соответствующее закону /5/ преобразование массы, индуцированное конформной группой в пространстве Минковского, было введено еще в работах Схоутена и Хаантьеса [/1/], см. также [/9/] / мы хотим возвести в ранг четко определенного принципа, который мы назовем условной конформной инвариантностью. Оказывается, что этому принципу наряду с упомянутыми выше уравнениями удовлетворяют /см. §3/ фундаментальные уравнения, безмассовых аналогов которых не существует, а именно уравнение Лоренца и общерелятивистское обобщение уравнения Лоренца-Дирака, полученное Хоббсом [10] /таким образом, ему удовлетворяет вся классическая электродинамика/. При этом в случае уравнения Лоренца-Дирака-Хоббса получает объяснение как обеспечивающий условную конформную инвариантность один довольно странный член, в определенном смысле противоречащий принципу эквивалентности. Итак,

Определение 4. Уравнение

$$A(x, g_{\alpha\beta}(x), m, \phi_i(x)) = 0, \quad m = \mathrm{const}, \qquad /6/$$

будем называть условно конформно-инвариантным, если конформно-инвариантно в рамках определения 3 соответствующее уравнение с переменной массой $m(y)$, преобразующейся при отображении C по закону /5/; под соответствующим уравнением с переменной массой имеется в виду уравнение, полученное вариацией действия для уравнения /6/ после подстановки в него $m \to m(x)$.

Насколько естественно возникает закон преобразования /5/, хорошо видно из сравнения конформной инвариантности уравнения изотропных геодезических, описывающих мировые линии безмассовых точечных частиц, и условной конформной инвариантности уравнения временниподобных геодезических, описывающих мировые линии точечных частиц с отличной от нуля массой покоя. Запишем уравнение геодезических [*]:

$$\frac{D}{d\tau}\frac{dx^\alpha}{d\tau} \equiv \frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0 \qquad /7/$$

/т.е. $D/d\tau$ - ковариантная производная по каноническому аффинному параметру τ / и условие изотропности

$$g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0. \qquad /8/$$

[*] Здесь роль функций ϕ из /2/ будет играть, в сущности, аффинный параметр τ.

Из закона преобразования символов Кристоффеля $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ при отображении C /см., например, 4/ / имеем

$$\frac{\tilde{D}}{d\tilde{\tau}}\frac{d\tilde{x}^{\alpha}}{d\tilde{\tau}} = \frac{D}{d\tau}\frac{d\tilde{x}^{\alpha}}{d\tau} + 2\frac{\partial \ln\Omega}{\partial \tilde{x}^{\beta}}\frac{d\tilde{x}^{\alpha}}{d\tau}\frac{d\tilde{x}^{\beta}}{d\tau}.$$

После замены $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}(\tau)$, такой, что

$$d\tilde{\tau} = \Omega^{2} d\tau, \qquad /9/$$

приходим к тем же уравнениям /7/ и /8/, но для $\tilde{x}^{\alpha}$ и $\tilde{\tau}$. Но вот что странно! По смыслу и размерности аффинный параметр τ - это длина /скорость света $c = 1$ / и, казалось бы, вместо /9/ в силу /1/ должно быть $d\tilde{\tau} = \Omega\, d\tau$.

Для времениподобных геодезических вместо /8/ имеем

$$g_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\frac{dx^{\beta}}{d\tau} = -1 \qquad /10/$$

/сигнатуру метрики мы взяли равной +2/. Соответствующее уравнение с переменной массой получим вариацией действия свободной частицы в общей теории относительности /см., например, /11/ /:

$$S = \int m\sqrt{g_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\frac{dx^{\beta}}{d\tau}}\,d\tau,$$

полагая $m = m(x)$:

$$\frac{D}{d\tau}\left(m(x)\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\right) + g^{\alpha\beta}\frac{\partial m}{\partial x^{\beta}} = 0. \qquad /11/$$

В силу /5/ это уравнение конформно-инвариантно /в рамках определения 3/ при преобразовании параметра τ, согласующемся с его смыслом и размерностью:

$$d\tilde{\tau} = \Omega\, d\tau. \qquad /12/$$

Таким образом, условная конформная инвариантность, по существу, означает возможность простой, однозначной и физически осмысленной трансформации уравнения, при которой оно становится конформно-инвариантным.

Возможно, что преобразование /5/ имеет более глубокий смысл, чем быть просто вспомогательной операцией при установлении некоторого общего свойства основных уравнений классической общерелятивистской физики. Например, в работах [10,12], где выводится уравнение движения излучающего заряда, легко усмотреть, что /бесконечный/ полевой вклад в массу заряда в конформных пространствах V и $\tilde{V}$ связан именно соотношением /5/. Другое объяснение преобразования /5/ дается в [9]. Наконец, в квантовополевом подходе с нарушением конформной $(SO(2,4))$ инвариантности роль массы играет вакуумное среднее скалярного поля, для которого в общей теории относительности было бы естественным преобразование /5/.

§4. ЗАМЕЧАНИЕ О ПОДХОДЕ ФУЛТОНА-РЕРЛИХА-ВИТТЕНА

Мы хотим отметить, что конформная инвариантность уравнений в обсуждаемом здесь смысле существенно отличается от подхода к этому вопросу в известной статье Фултона, Рерлиха и Виттена [9]. Эти авторы, фактически, выходят за рамки общей теории относительности, поскольку в основу своего подхода они кладут пространство Вейля W, в котором связность определяется не только метрикой, но еще и векторным полем $\kappa_a(x)$. С помощью соответствующей ковариантной производной можно сделать конформно-инвариантными /наверное, симметрию, возникающую при этом, правильно было бы назвать *конформной ковариантностью*/ те уравнения, которые в общей теории относительности таковыми ни в каком смысле не являются, например традиционное уравнение безмассового скалярного поля $\Box\phi = 0$. Какого-либо существенного ограничения на вид общерелятивистских уравнений /типа необходимости члена

$(1/6)R\phi$ в /3// такой подход, видимо, не накладывает, и новое динамическое содержание в нем возникает лишь при наделении поля $\kappa_{\alpha}(x)$ какой-то динамикой, например в единой теории поля Вейля.

§5. ПРИНЦИП ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ И УСЛОВНАЯ КОНФОРМНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ УРАВНЕНИЯ ЛОРЕНЦА-ДИРАКА

Общерелятивистское уравнение движения точечного электрического заряда e, учитывающее реакцию излучения /в специальной теории относительности такое уравнение называется уравнением Лоренца-Дирака/, было получено Хоббсом /10/ в следующем виде

$$m\frac{D}{d\tau}\frac{dx^{\alpha}}{d\tau} = e\frac{dx_{\beta}}{d\tau}F^{\alpha\beta} + \frac{2}{3}e^{2}(\Gamma^{\alpha} - P^{\alpha}) + \qquad /13/$$

$$+ e^{2}\frac{dx_{\beta}}{d\tau}\int_{-\infty}^{\tau} f^{\alpha}_{\beta\gamma'}(x, x')\frac{dx^{\gamma'}(\tau')}{d\tau'}d\tau',$$

где $F^{\alpha\beta}$ - тензор внешнего электромагнитного поля,

$$\Gamma^{\alpha} = \frac{D^{2}}{d\tau^{2}}\frac{dx^{\alpha}}{d\tau} - \frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\frac{D}{d\tau}\frac{dx^{\beta}}{d\tau}\frac{D}{d\tau}\frac{dx_{\beta}}{d\tau}$$

- т.н. вектор Абрагама,

$$P^{\alpha} = \frac{1}{2}\left(R^{\alpha\beta}\frac{dx_{\beta}}{d\tau} + \frac{dx^{\alpha}}{d\tau}R^{\beta\gamma}\frac{dx_{\beta}}{d\tau}\frac{dx_{\gamma}}{d\tau}\right). \qquad /14/$$

$R^{\alpha\beta}$ - тензор Риччи и $f^{\alpha}_{\beta\gamma'}(x, x')$ - определенное двухточечное решение свободного уравнения Максвелла /оно исчезает в конформно-плоских пространствах/. Точнее говоря, Хоббс исправил вычислительную ошибку известной и в прочих отношениях весьма обстоятельной работы Де Витта и Бреме /12/, которые получили уравнение /13/ без члена P^{α}.

Отсутствие в уравнении движения заряда члена, зависящего от кривизны в точке нахождения заряда, Де Витт и Бреме с удовлетворением трактовали как согласие с принципом эквивалентности. Действительно, если бы их результат был верен, то при переходе в локально-инерциальную систему отсчета /к нормальным координатам с началом в $x^a(\tau)$ / получилось бы уравнение, отличающееся от соответствующего специальнорелятивистского лишь последним, "хвостовым" членом. Такое отличие позволило бы утверждать лишь, что где-то на мировой линии заряда, кривизна отлична от нуля, наоборот, по крайней мере в конформно-плоском пространстве-времени, где $f^a_{\beta\gamma} = 0$, вектор P^a позволяет, в принципе, установить отличие тензора Риччи $R_{a\beta}$ от нуля в точке, т.е. из наблюдения движения одного точечного заряда на сколь угодно малом отрезке его мировой линии. Это означает, что таким способом можно, в принципе, установить наличие или отсутствие поля тяготения "в точке".

Таким образом, появление вектора P^a в уравнении движения электрического заряда имеет принципиальное значение. С другой стороны, вывод уравнения /13/ в любом подходе связан с такой процедурой, как перенормировка массы и, кроме того, в подходе Де Витта-Бреме и Хоббса, обобщающем подход Дирака, есть такие неоднозначные моменты, как выбор поверхности, охватывающей заряд, выбор пути переноса репера, т.е. возникают некоторые основания для сомнений в однозначной определенности факта появления P^a в /13/. С этой точки зрения замечательным является тот факт, что член P^a необходим для обеспечения условной конформной инвариантности уравнения /13/.

Чтобы исследовать, является ли уравнение /13/ условно конформно-инвариантным, необходимо, согласно определению 5, ввести соответствующее уравнение с переменной массой. Такое уравнение, несмотря на то, что /13/ не является лагранжевым, легко установить из очевидной связи /13/ с уравнением геодезических; левая часть /13/ совпадает с этим уравнением и только она содержит массу заряда m. Поэтому искомое уравнение получается подстановкой в /13/ левой части уравнения /11/. После этого нетрудно убедиться, что первый и последний члены в правой части по отдельности преобразуются при конформных отображениях /с заменой канонического параметра τ на $\bar{\tau}$ согласно /12//, так же как и левая часть уравнения /11/. Это доказывает, в частности, условную конформную инвариантность уравнения Лоренца

$$m\frac{D}{d\tau}\frac{dx^{a}}{d\tau} = e\frac{dx^{\beta}}{d\tau}F^{a}{}_{\beta}.$$

Несложные вычисления, которые мы здесь не приводим, показывают также, что дополнительные члены, возникающие от Γ^{a} при переходе от τ к $\bar{\tau}$, согласно /12/, в точности компенсируются дополнительными членами от P^{a}, возникающими при переходе от $R_{a\beta}$ к $\bar{R}_{a\beta}$. Добавим, что так же обстоит дело и с уравнением движения точечного источника скалярного поля, удовлетворяющего уравнению /3/.

Итак, в случае уравнения скалярного поля /3/ и уравнения Лоренца-Дирака-Хоббса /13/ мы наблюдаем следующую интересную закономерность: появление в уравнении членов, явно зависящих от кривизны, с одной стороны, нарушает принцип эквивалентности, по крайней мере в определенной его формулировке /см. в связи с этим работу Логунова и Фоломешкина /13/ /, и в то же время необходимо для обеспечения конформной инвариантности этих уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Schouten J.A., Haantjes J. Physica, 1934, 1, p.869. Koninkl. Ned. Akad. Wetenshap.Proc., 1940, 43, p.1288.*
2. *Gursey F. Nuovo Cim., 1956, 3, p.988.*
3. *Chernikov N.A. Acta Phys. Polon., 1964, 26, p.155.*
4. *Петров А.З. Новые методы в общей теории относительности. "Наука", М., 1966.*

5. Penrose R. In: Relativity, Groups and Topology, C.M. DeWitt and B.S.DeWitt Eds., Gordon and Breach, N.Y., 1964, p.565;
русский перевод в сб.: Гравитация и топология. "Мир", М., 1966.
6. Chernikov N.A., Tagirov E.A. Ann. Inst. H.Poincare, 1968, A9, p.109.
7. Тагиров Э.А. ОИЯИ, Р2-5716, Дубна, 1971.
8. Flato M., Simon J., Sternheimer D. Ann.Phys., (N.Y.), 1970, 61, p.78.
9. Fulton T., Rohrlich F.,Witten L. Revs. Mod. Phys., 1962, 34, p.442.
10. Hobbs J.M. Ann.Phys., N.Y. , 1968, 47, p.141.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля . "Наука", М., 1973.
12. DeWitt B.S., Brehme R.W. Ann.Phys. N.Y. , 1960, 9, p.220.
13. Логунов А.А., Фоломешкин В.Н. Препринт ИФВЭ, ОТФ 77-53, Серпухов, 1977.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 сентября 1977 года.