ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 10966

В.К.Мельников

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ СИСТЕМ

1977

Р2 - 10966

В.К.Мельников

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ СИСТЕМ

Направлено в ТМФ

Мельников В.К. P2 - 10966

Об одном семействе вполне интегрируемых эволюционных систем

Рассмотрено семейство вполне интегрируемых гамильтоновых систем вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = [\Lambda, A_{n+1}] \quad (n \geq 0), \qquad (*)$$

полученных с помощью операторного уравнения типа

$$\frac{\partial L}{\partial t} + [A_n, L] = \Lambda^{-1}[\Lambda, A_n](L - i\zeta),$$

где

$$L = \Lambda^{-1}(\partial + u), \quad A_n = \sum_{m=0}^{n} (i\zeta)^{n-m} A_m(u, u'_x, \dots, u^{(m-1)}_{x^{m-1}}).$$

Найдены первые интегралы и функции гамильтона систем (*).

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Mel'nikov V.K. P2 - 10966

On a Family of Completely Integrable Evolution Systems

We consider a family of completely integrable Hamiltonian systems of the form

$$\frac{\partial u}{\partial t} = [\Lambda, A_{n+1}] \quad (n \geq 0). \qquad (*)$$

They are derived from an operator equation of the type

$$\frac{\partial L}{\partial t} + [A_n, L] = \Lambda^{-1}[\Lambda, A_n](L - i\zeta),$$

where

$$L = \Lambda^{-1}(\partial + u), \quad A_n = \sum_{m=0}^{n} (i\zeta)^{n-m} A_m(u, u'_x, \dots, u^{(m-1)}_{x^{m-1}}).$$

The first intergals and Hamiltonian functions of the systems (*) are also found.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

В предлагаемой статье речь будет идти о семействе вполне интегрируемых эволюционных систем, получаемых с помощью операторного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} L + [\mathbf{A}, L] = \Lambda^{-1}[\Lambda, \mathbf{A}]\,(L - i\zeta), \qquad /1/$$

играющего здесь ту же роль, что и обычное уравнение Лакса. При этом мы ограничимся на этот раз простейшим из возможных случаев, а именно рассмотрим случай операторов L и $\mathbf{A}$ вида

$$L = \Lambda^{-1}(\partial + u), \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}_n = \sum_{m=0}^{n}(i\zeta)^{n-m} A_m,$$

где ∂ - оператор дифференцирования по пространственной переменной x, Λ - диагональная матрица с попарно различными диагональными элементами $\lambda_k \in R$, $k = 1, 2, \ldots, r$; $u = u(x,t)$ - квадратная матрица порядка r с равными нулю диагональными элементами и, наконец, A_m - квадратные матрицы порядка r, элементы которых могут быть представлены в виде суммы конечного числа квазиоднородных полиномов ранга $\rho \leq m$ от элементов матриц u, $u' = \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, u^{(m-1)} = \frac{\partial^{m-1} u}{\partial x^{m-1}}$*. Получаемые таким образом эволюционные уравнения имеют вид

---

*Полином Q от элементов матриц $u, u', \ldots, u^{(m-1)}$ называется квазиоднородным ранга m, если при замене элементов матриц $u, u', \ldots, u^{(m-1)}$ соответственно на z, $z^2, \ldots, z^m$ каждый одночлен q_α полинома Q принимает вид $c_\alpha z^m$, где c_α - константа.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - [\Lambda, A_{n+1}] = 0 \qquad /2n/$$

и образуют зависящее от целочисленного параметра $n \geq 0$ семейство вполне интегрируемых гамильтоновых систем. Это семейство включает в себя ряд важных, исследованных ранее случаев и допускает единое описание с помощью предлагаемого здесь метода.

В статье содержатся вывод уравнений /2n/ и конструкция для нахождения первых интегралов системы /2n/. Эти интегралы образуют r бесконечных серий, удовлетворяющих единственному линейному соотношению, и являются общими для всех уравнений /2n/. Далее, с помощью этих же первых интегралов строится функция Гамильтона системы /2n/. Хотя рассмотрению этого вопроса для аналогичных систем в последнее время было посвящено несколько работ /история вопроса подробно освещена в работе /1/ /, предлагаемый нами метод имеет ряд очевидных преимуществ.

Для нахождения быстроубывающего /при $x \to \pm\infty$ / решения задачи Коши для уравнения /2n/ применим метод обратной задачи /2/. При этом данные рассеяния для системы

$$L\phi = i\zeta\phi \, . \qquad /3/$$

определяемые при $t=0$ по начальным данным для уравнения /2n/, с помощью уравнения /1/ продолжаются на все $t>0$. Далее, с помощью решения обратной задачи для системы /3/ получаем решение задачи Коши для уравнения /2n/ при любом $t>0$.

§1. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ /2n/

При сделанных ранее предположениях равенство /1/ эквивалентно следующему:

$$u_t - A_x - [u, A] + i\zeta[\Lambda, A] = 0 . \qquad /4/$$

В последующем изложении важную роль будет играть уравнение

$$A_x + [u, A] - i\zeta [\Lambda, A] = 0. \qquad /5/$$

Общее решение уравнения /5/ имеет вид

$$A = \phi A_0 \tilde{\psi}, \qquad /6/$$

где $\phi = \phi(x, \zeta)$ и $\psi = \psi(x, \zeta)$ - соответственно фундаментальные матрицы решений систем

$$\phi_x + u(x)\phi = i\zeta\Lambda\phi \quad \text{и} \quad \psi_x - \tilde{u}(x)\psi = -i\zeta\Lambda\psi, \qquad /7/$$

а матрица A_0 не зависит от x. Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что матрица A_0 также не зависит от ζ.

Пусть теперь матрицы ϕ и ψ выбраны так, что при любом действительном ζ справедливы равенства

$$\lim_{x \to -\infty} \phi(x, \zeta) \exp(-i\zeta\Lambda x) = \lim_{x \to -\infty} \psi(x, \zeta) \exp(i\zeta\Lambda x) = E. \qquad /8/$$

Как известно, это всегда возможно, если элементы матрицы $u(x)$ абсолютно интегрируемы по x на оси $-\infty < x < \infty$. С учетом равенств /8/ из уравнений /7/ получаем

$$\phi\tilde{\psi} = \tilde{\psi}\phi = E, \quad \text{т.е.} \quad \tilde{\psi} = \phi^{-1}. \qquad /9/$$

Определим теперь матрицу A_0 так, чтобы у матрицы A существовал предел при $x \to -\infty$. С учетом равенств /8/ нетрудно видеть, что необходимым и достаточным условием этого является равенство нулю всех элементов матрицы A_0, лежащих вне главной диагонали. Таким образом, полагаем

$$A_0 = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_r). \qquad /10/$$

С учетом равенств /6/ и /8/ имеем

$$\lim_{x \to -\infty} A = A_0. \qquad /11/$$

Пусть теперь $p(z)$ - полином наименьшей степени r' от переменной z, обращающийся в нуль во всех точках $z = a_1, a_2, \ldots, a_r$. Из определения полинома $p(z)$ следует, что

$$p(A_0) = 0, \qquad /12/$$

а

$$\det p'(A_0) \neq 0. \qquad /13/$$

В силу соотношения /9/ имеем

$$A^k = \phi A_0^k \tilde{\psi}.$$

Отсюда, с учетом равенства /12/, имеем

$$p(A) = \phi\, p(A_0) \tilde{\psi} = 0. \qquad /14/$$

Определенное таким образом решение A уравнения /5/ обладает асимптотическим при $\zeta \to \pm\infty$ разложением вида

$$A \sim \sum_{m=0}^{\infty} (i\zeta)^{-m} A_m, \qquad /15/$$

где матрица A_0 в силу равенств

$$\lim_{\zeta \to \pm\infty} \phi(x,\zeta) \exp(-i\zeta\Lambda x) = \lim_{\zeta \to \pm\infty} \psi(x,\zeta) \exp(i\zeta\Lambda x) = E$$

та же самая, что и в равенстве /11/, и, следовательно, согласно равенству /10/, удовлетворяет условию $[\Lambda, A_0] = 0$, а остальные коэффициенты разложения /15/ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\frac{\partial A_m}{\partial x} + [u, A_m] - [\Lambda, A_{m+1}] = 0. \qquad /16/$$

Покажем теперь, что элементы $A_{m,\mu\nu}$ матриц A_m при $m > 0$ разлагаются в конечную сумму квазиоднородных полиномов ранга $\rho \leq m$ от элементов матриц u,

$u' = \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, u^{(m-1)} = \frac{\partial^{m-1} u}{\partial x^{m-1}}$. Действительно, в силу равенства /16/ с $m=0$ имеем при $\mu \neq \nu$

$$A_{1,\mu\nu} = -\frac{a_\mu - a_\nu}{\lambda_\mu - \lambda_\nu} u_{\mu\nu} . \qquad /17/$$

Далее, согласно равенству /14/, имеем

$$\sum_{s=1}^{r'} p_s \sum_{k=0}^{s-1} A_0^{s-1-k} A_1 A_0^k = 0, \qquad /18/$$

где p_s - коэффициенты полинома $p(z) = \sum_{s=0}^{r'} p_s z^s$. Отсюда следует, что $p'(a_\mu) A_{1,\mu\mu} = 0$, т.е. с учетом неравенства /13/ имеем

$$A_{1,\mu\mu} = 0. \qquad /19/$$

Предположим теперь, что элементы $A_{m,\mu\nu}$ матриц A_m разлагаются в конечную сумму квазиоднородных полиномов ранга $\rho \leq m$ для всех $m=1,\ldots,m_0$ $(m_0 \geq 1)$. Покажем, что в этом случае элементы $A_{m_0+1,\mu\nu}$ матрицы A_{m_0+1} также разлагаются в конечную сумму квазиоднородных полиномов ранга $\rho \leq m_0+1$. Действительно, в силу равенства /16/ с $m=m_0$ имеем при $\mu \neq \nu$

$$A_{m_0+1,\mu\nu} = \frac{1}{\lambda_\mu - \lambda_\nu}\left[\frac{\partial}{\partial x} A_{m_0,\mu\nu} + \sum_{s=1}^{r} (u_{\mu s} A_{m_0,s\nu} - A_{m_0,\mu s} u_{s\nu})\right]. \qquad /20/$$

Отсюда, согласно предположению индукции, следует, что элементы $A_{m_0+1,\mu\nu}$ матрицы A_{m_0+1} при $\mu \neq \nu$ разлагаются в конечную сумму квазиоднородных полиномов ранга $\rho \leq m_0+1$. Подставим теперь разложение /15/ в равенство /14/. Из условия равенства нулю коэффициента при $(i\zeta)^{-(m_0+1)}$ получаем равенство вида

$$\sum_{s=1}^{r'} p_s \sum_{k=0}^{s-1} A_0^{s-1-k} A_{m_0+1} A_0^k = R_{m_0+1}(A_0, \ldots, A_{m_0}), \qquad /21/$$

где R_{m_0+1} - полином от матриц $A_0, \ldots, A_{m_0}$. Из способа получения полинома R_{m_0+1}, согласно предположению индукции, следует, что элементы матрицы R_{m_0+1} разлагаются в конечную сумму квазиоднородных полиномов ранга $\rho \leq m_0+1$. С другой стороны, в левой части равенства /21/ на главной диагонали стоят элементы $p'(a_\mu)A_{m_0+1,\mu\mu}$. Отсюда, на основании неравенства /13/, следует, что диагональные элементы $A_{m_0+1,\mu\mu}$ матрицы A_{m_0+1} также разлагаются в конечную сумму квазиоднородных полиномов ранга $\rho \le m_0+1$. Таким образом, высказанное ранее утверждение о структуре элементов матриц A_m полностью доказано. Более тщательный анализ показывает, что в действительности все элементы матриц A_m являются либо квазиоднородными полиномами ранга m, либо равны нулю. Отсюда, в частности, следует, что все элементы матриц A_m при $m>0$ обращаются в нуль в любой точке $x=x_0$, если матрица $u(x)$ и все ее производные по x обращаются в нуль в точке $x=x_0$.

Положим теперь

$$A=A_n=\sum_{m=0}^{n}(i\zeta)^{n-m}A_m \qquad (n\geq 0).$$

Подставляя это выражение в уравнение /4/, получаем с учетом равенства /16/ зависящее от целочисленного параметра $n\geq 0$ семейство уравнений /2n/. При этом структура уравнений /2n/ находится в полном согласии со сделанным ранее предположением, что диагональные элементы матрицы $u(x,t)$ равны нулю.

§2. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Выясним теперь, какие величины сохраняются при изменении $u(x,t)$ со временем в силу уравнений /2n/. Замечательной особенностью уравнений /2n/ является существование r бесконечных серий интегралов $I_{m,k}$, общих для всех уравнений /2n/ ($m=2,3,\ldots;k=1,2,\ldots,r$). Действительно, как будет показано ниже, величины

$$I_{m,k}=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Sp}\left(\Lambda\frac{\partial A_m}{\partial a_k}\right)dx \qquad /22/$$

не меняются со временем, если $u(x,t)$ удовлетворяет какому-нибудь из уравнений /2n/.

По поводу формулы /22/ необходимо сразу же заметить следующее. В том случае, когда у матрицы A_0 все диагональные элементы взяты разными, формула /22/ действительно определяет r серий первых интегралов. Однако если среди диагональных элементов матрицы A_0 имеются равные, то возникает естественный вопрос: как варьировать матрицу A_0, чтобы, с одной стороны, получить все r серий, а с другой стороны, иметь корректный результат. Априори некорректность здесь может возникнуть из-за того, что при независимом изменении собственных значений матрицы A_0 степень полинома $p(z)$, удовлетворяющего условиям /12/ и /13/, должна в этом случае увеличиться скачком. Наиболее простой выход здесь следующий. Рассмотрим сначала случай, когда у матрицы A_0 все диагональные элементы различные. Найдем первые интегралы согласно равенству /22/, а затем положим некоторые a_k равными между собой. Однако в силу равенства /6/ матрица A, а следовательно, и коэффициенты A_m ее асимптотического разложения /15/ зависят линейно от диагональных элементов матрицы A_0. Значит, на самом деле величины $I_{m,k}$ не зависят от диагональных элементов матрицы A_0 и полностью определяются одной лишь матрицей Λ. Далее будет показано, что величина

$$H_{n+2} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{r} a_k I_{n+2,k} = \frac{1}{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} Sp(\Lambda A_{n+2})\, dx \qquad /23/$$

является гамильтонианом для системы /2n/, т.е. справедливо равенство

$$\frac{\partial u}{\partial t} = [\Lambda, \frac{\delta H_{n+2}}{\partial \tilde{u}}]. \qquad /24n/$$

Доказательство этих утверждений основано на следующем важном равенстве

$$\frac{\delta H_{m+1}}{\delta \tilde{u}} = A_m. \qquad /25/$$

Чтобы убедиться в справедливости равенства /25/, предположим сначала, что $u(x)$ - бесконечно-дифференцируемая финитная матрица, т.е. $u(x)$ равна нулю вместе со всеми производными по x, если x не принадлежит некоторому интервалу (x_0, x_1).

Рассмотрим теперь функционал

$$H = \int_{x_0}^{x_1} Sp(\Lambda A)dx. \qquad /26/$$

Путем несложных вычислений нетрудно убедиться в справедливости следующего равенства:

$$\frac{\delta H}{\delta \tilde{u}} = \phi(x,\zeta) \int_{x}^{x_1} [\tilde{\psi}(z,\zeta)\Lambda\phi(z,\zeta), A_0] dz \tilde{\psi}(x,\zeta). \qquad /27/$$

Действительно, добавив в уравнениях /7/ к $u(x)$ и $\tilde{u}(x)$ соответственно вариации $\delta u(x)$ и $\delta\tilde{u}(x) = \widetilde{\delta u}(x)$, легко получаем, что вариации $\delta\phi$ и $\delta\psi$ фундаментальных решений уравнений /7/ равны нулю при $x \le x_0$, а при $x > x_0$ имеют вид

$$\delta\phi = -\phi(x,\zeta) \int_{x_0}^{x} \tilde{\psi}(z,\zeta)\delta u(z)\phi(z,\zeta)dz,$$

$$\delta\psi = \psi(x,\zeta) \int_{x_0}^{x} \tilde{\phi}(z,\zeta)\delta\tilde{u}(z)\psi(z,\zeta)dz.$$

Отсюда, с учетом равенства /6/, следует, что вариация δH функционала /26/ имеет вид

$$\delta H = -\int_{x_0}^{x_1} Sp\{\tilde{\psi}(x,\zeta)\Lambda\phi(x,\zeta) \int_{x_0}^{x} [\tilde{\psi}(z,\zeta)\delta u(z)\phi(z,\zeta), A_0] dz\} dx.$$

Проинтегрировав это равенство по частям и перейдя к пределу при $\delta u(x) \to 0$, легко получаем равенство /27/.

С другой стороны, при сделанных выше предположениях о финитности $u(x)$ справедливо равенство

$$\frac{\partial A}{\partial \zeta} = i\phi(x,\zeta) \int_{x_0}^{x} [\tilde{\psi}(z,\zeta)\Lambda\phi(z,\zeta), A_0] dz \tilde{\psi}(x,\zeta). \qquad /28/$$

Чтобы убедиться в справедливости этого равенства, продифференцируем равенство /5/ по ζ . В результате получим следующее уравнение для $B = -i\dfrac{\partial A}{\partial \zeta}$:

$$B_x + [u, B] - i\zeta[\Lambda, B] = [\Lambda, A]. \qquad /29/$$

Решая это уравнение с учетом условия $\dfrac{\partial A}{\partial \zeta} = 0$ при $x \le x_0$, легко получаем равенство /28/.

Из равенств /27/ и /28/ следует равенство

$$\frac{\delta H}{\delta \tilde{u}} - i\frac{\partial A}{\partial \zeta} = \phi(x,\zeta)\int_{x_0}^{x_1}[\tilde{\psi}(z,\zeta)\Lambda\phi(z,\zeta), A_0]dz\,\tilde{\psi}(x,\zeta). \qquad /30/$$

Покажем теперь, что величина

$$J = \int_{x_0}^{x_1}[\tilde{\psi}(z, \zeta)\Lambda\phi(z,\zeta), A_0]dz \qquad /31/$$

стремится к нулю при $\zeta \to \pm\infty$ быстрее любой отрицательной степени ζ , т.е. при любом $n > 0$ справедливо равенство

$$\lim_{\zeta\to\pm\infty} \zeta^n J(\zeta) = 0. \qquad /32/$$

Действительно, поскольку матрица A обладает асимптотическим разложением /15/, то функционал H в силу равенств /19/, /23/ и /26/ обладает асимптотическим разложением вида

$$H \sim H_0 + \sum_{m=2}^{\infty}(m-1)(i\zeta)^{-m}H_m.$$

Отсюда следует, что $\dfrac{\delta H}{\delta \tilde{u}}$ обладает асимптотическим разложением вида

$$\frac{\delta H}{\delta \tilde{u}} \sim \sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{(i\zeta)^{m+1}}\,\frac{\delta H_{m+1}}{\delta \tilde{u}}. \qquad /33/$$

Однако в силу равенства /23/ имеем

$$\frac{\delta H_m}{\delta u} = \frac{1}{m-1} \sum_{s=0}^{m-1} (-1)^s \frac{d^s}{dx^s} \left[\frac{\partial}{\partial u^{(s)}} Sp(\Lambda A_m) \right]$$

и, следовательно, $\frac{\delta H_m}{\delta u} = 0$ при $x = x_0$, так как в точке $x = x_0$ матрица $u(x)$ и все ее производные по x по предположению равны нулю. Далее, в точке $x = x_0$ имеем $\frac{\partial A}{\partial \zeta} = 0$. Отсюда следует, что в точке $x = x_0$ разность $\frac{\delta H}{\delta \bar{u}} - i \frac{\partial A}{\partial \zeta}$ стремится к нулю при $\zeta \to \pm\infty$ быстрее любой отрицательной степени ζ. Далее, согласно равенствам /30/ и /31/, имеем равенство

$$J = \tilde{\psi}(x, \zeta)\left(\frac{\delta H}{\delta \bar{u}} - i \frac{\partial A}{\partial \zeta}\right)\phi(x, \zeta),$$

из которого следует справедливость равенства /32/.

Таким образом, величина $i \frac{\partial A}{\partial \zeta}$ допускает асимптотическое разложение, совпадающее с асимптотическим разложением величины $\frac{\delta H}{\delta \bar{u}}$. С другой стороны, пользуясь уравнением /29/ и асимптотическим разложением /15/, нетрудно убедиться, что асимптотическое разложение величины $i \frac{\partial A}{\partial \zeta}$ имеет вид

$$i \frac{\partial A}{\partial \zeta} \sim \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{(i\zeta)^{m+1}} A_m . \qquad /34/$$

Сравнивая разложения /33/ и /34/, мы без труда убеждаемся в справедливости равенства /25/ для финитных матриц $u(x)$. Отсюда следует справедливость равенства /25/ для любой бесконечно дифференцируемой матрицы $u(x)$, если она достаточно быстро стремится к нулю при $x \to \pm\infty$ вместе со всеми производными по x. Значит справедливость равенства /24n/ также доказана. С учетом равенства /23/ из равенства /25/ имеем важное равенство

$$\frac{\delta I_{m,k}}{\delta \tilde{u}} = (m-1)\frac{\partial A_{m-1}}{\partial a_k}. \qquad /35/$$

Покажем теперь, что величины $I_{m,k}$ не меняются со временем, если $u = u(x,t)$ есть решение какого-нибудь из уравнений /2n/, стремящееся к нулю при $x \to \pm\infty$ вместе со всеми производными по x. Действительно, исходя из равенства /22/, после интегрирования по частям получаем равенство

$$\dot{I}_{m,k} = \int_{-\infty}^{\infty} Sp\left(\frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\delta I_{m,k}}{\delta \tilde{u}}\right)dx .$$

Отсюда на основании равенств /2n/ и /35/ имеем

$$\dot{I}_{m,k} = (m-1)\int_{-\infty}^{\infty} Sp\left([\Lambda, A_{n+1}]\frac{\partial A_{m-1}}{\partial a_k}\right)dx. \qquad /36/$$

Вычислим интеграл, стоящий в правой части равенства /36/. С этой целью умножим справа равенство

$$[\Lambda, A_{n+1}] - [u, A_n] - \frac{\partial A_n}{\partial x} = 0$$

на $\dfrac{\partial A_{m-1}}{\partial a_k}$ и сложим с равенством

$$\left[\Lambda, \frac{\partial A_m}{\partial a_k}\right] - \left[u, \frac{\partial A_{m-1}}{\partial a_k}\right] - \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial A_{m-1}}{\partial a_k} = 0,$$

умноженным слева на A_n. В результате получим равенство

$$[\Lambda, A_{n+1}]\frac{\partial A_{m-1}}{\partial a_k} + A_n[\Lambda, \frac{\partial A_m}{\partial a_k}] =$$

$$=[u, A_n\frac{\partial A_{m-1}}{\partial a_k}] + \frac{\partial}{\partial x}(A_n\frac{\partial A_{m-1}}{\partial a_k}).$$

Отсюда следует

$$Sp([\Lambda, A_{n+1}]\frac{\partial A_{m-1}}{\partial a_k}) = Sp([\Lambda, A_n]\frac{\partial A_m}{\partial a_k}) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}Sp(A_n\frac{\partial A_{m-1}}{\partial a_k}).$$

Решая это рекуррентное соотношение, получаем

$$Sp([\Lambda, A_{n+1}]\frac{\partial A_{m-1}}{\partial a_k}) = \frac{\partial}{\partial x}Sp(\sum_{s=0}^{n} A_{n-s}\frac{\partial A_{m-1+s}}{\partial a_k}). \quad /37/$$

Из равенства /37/ следует, что под знаком интеграла в правой части равенства /36/ стоит полная производная по x. Отсюда, с учетом сделанного ранее предположения, что матрица $u(x,t)$ и все ее производные по x стремятся к нулю при $x \to \pm\infty$, следует, что $\dot{I}_{m,k} = 0$, т.е. величины $I_{m,k}$ не меняются со временем. Значит, согласно равенству /23/, гамильтониан H_{n+2} системы /24n/ также не меняется со временем.

Если в равенстве /6/ положить $A_0=E$, то в силу равенства /9/ будем иметь $A=E$. Отсюда следует, что при любом $m>0$ справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial A_m}{\partial a_k} = 0.$$

Значит, согласно равенству /22/, при любом $m>1$ справедливо соотношение

$$\sum_{k=1}^{r} I_{m,k} = 0. \qquad /38/$$

Других линейных соотношений между величинами $I_{m,k}$ нет, т.е. из справедливости тождества

$$\sum_{k=1}^{r} c_k I_{m,k} \equiv 0 \qquad /39/$$

при каком-нибудь $m=m_0>1$ следует, что $c_1=c_2=\ldots=c_r$. Действительно, в противном случае мы могли бы положить

$$A_0 = \mathrm{diag}(c_1, c_2, \ldots, c_r),$$

где c_k не все равны между собой и для них справедливо тождество /39/ при некотором $m=m_0>1$. Отсюда на основании равенства /23/ следовало бы, что $H_{m_0} \equiv 0$, т.е., согласно равенству /25/, мы бы имели $A_{m_0-1} = 0$. На основании равенства /16/ отсюда следовало бы, что равенство $A_m = 0$ справедливо также при всех $m \geq m_0$. Следовательно, справедливо асимптотическое при $\zeta \to \pm\infty$ разложение

$$A \sim \sum_{m=0}^{m_0-2} (i\zeta)^{-m} A_m . \qquad /40/$$

В этом разложении должно быть $m_0>2$, ибо, согласно равенству /17/, имеем $A_1 \not\equiv 0$. Подставим теперь разложение /40/ в равенство /14/. В результате получим некоторый полином $R(z)$ от переменной $z=\frac{1}{i\zeta}$ с матричными коэффициентами. Коэффициент при z в наивысшей степени равен $p_r \cdot A^{r'}_{m_0-2}$. Из равенства /14/ следует, что все коэффициенты полинома $R(z)$ равны нулю, т.е., в частности, и коэффициент при z в наивысшей степени. Отсюда следует, что $A_{m_0-2} \equiv 0$. Повторив это рассуждение еще $(m_0 - 3)$ раз, мы получили равенство $A_1 \equiv 0$ вопреки равенству /17/. Значит, соотношение /39/ возможно только при условии $c_1 = c_2 = \ldots = c_r$.

Определим теперь для произвольных функционалов f и g Λ-скобку $\{f,g\}$ с помощью равенства

$$\{f,g\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Sp}\left(\frac{\delta f}{\delta u}\Lambda\frac{\delta g}{\delta u} - \frac{\delta g}{\delta u}\Lambda\frac{\delta f}{\delta u}\right)dx. \qquad /41/$$

Нетрудно видеть, что правая часть равенства /41/ линейна по каждому из аргументов и кососимметрична. Из равенства /37/, согласно равенствам /25/ и /35/, следует равенство

$$\{ I_{m,k} , H_n \} = 0.$$

С учетом равенства /23/ отсюда имеем

$$\{ H_m , H_n \} = 0.$$

Наконец, из равенства /37/ следует

$$\mathrm{Sp}([\Lambda , \frac{\partial A_{n-1}}{\partial a_k}] \frac{\partial A_{m-1}}{\partial a_{k'}}) = \frac{\partial}{\partial x} \mathrm{Sp}(\sum_{s=0}^{n-2} \frac{\partial A_{n-2-s}}{\partial a_k} \frac{\partial A_{m-1+s}}{\partial a_{k'}}),$$

откуда на основании равенства /35/ следует равенство

$$\{ I_{m,k} , I_{n,k'} \} = 0.$$

В заключение необходимо сделать несколько замечаний. Прежде всего выясним, насколько существенно требование $\lambda_\mu \neq \lambda_\nu$ при $\mu \neq \nu$, наложенное на диагональные элементы матрицы Λ. Тщательный анализ показывает, что содержательная теория может быть построена и без этого требования. Однако при этом возникает ряд вопросов, на которых необходимо остановиться. Прежде всего нужно потребовать, чтобы у матрицы $u=u(x,t)$ в этом случае были равны нулю не только диагональные элементы $u_{\mu\mu}$, но и те элементы $u_{\mu\nu}$ с индексами $\mu \neq \nu$, для которых $\lambda_\mu = \lambda_\nu$, т.е. необходимо, чтобы матрица $u(x,t)$ допускала представление $u=[\Lambda, v]$ с некоторой матрицей $v=v(x,t)$. Далее, при выборе диагональной матрицы A_0 необходимо соблюдать условие $a_\mu = a_\nu$, если $\lambda_\mu = \lambda_\nu$. Только при соблюдении этого условия мы сможем определить элементы $A_{1,\mu\nu}$ и $A_{m_0+1,\mu\nu}$ матриц A_1 и A_{m_0+1} соответственно с индексами $\mu \neq \nu$, для которых $\lambda_\mu = \lambda_\nu$, с помощью равенств /18/ и /21/. Формулы /17/ и /20/ в этом случае становятся непригодными. И наконец, поскольку число параметров, определяющих матрицу A_0, а следовательно, и матрицу A, уменьшается, количество первых интегралов у системы /2n/ также уменьшится. В этом случае число серий первых интегралов системы

/2 n/ будет равно числу различных диагональных элементов матрицы Λ. При этом между этими сериями будет иметь место единственное линейное соотношение типа /38/.

Возникает естественный вопрос о существовании для уравнений /2n/ представления Лакса. Весьма вероятно, что для каждого $n \geq 0$ существует оператор

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_n = \sum_{m=0}^{n} P_m \partial^{n-m} \qquad /42/$$

с матричными коэффициентами $P_0, P_1, \ldots, P_n$, такой, что уравнение /2n/ следует из равенства

$$\frac{\partial}{\partial t} L + [\, \mathcal{P}, L \,] = 0,$$

если в качестве L взят прежний оператор $\Lambda^{-1}(\partial + u)$. При этом элементы матриц P_m могут быть представлены в виде суммы конечного числа квазиоднородных полиномов ранга $\rho \leq m$ от элементов матриц $u, u' = \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, u^{(m-1)} = \frac{\partial^{m-1} u}{\partial x^{m-1}}$ $(m = 0, 1, \ldots, n)$. Однако явное построение оператора /42/ в общем виде сопряжено с трудностями, которые следует назвать техническими.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И.М., Дикий Л.А. Функц. анализ, 1977, 11, вып. 2, с. 11.

2. Шабат А.Б. Функц. анализ, 1975, 9, вып. 3, с. 75.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 сентября 1977 года.